CB 17

DESCUBRIENDO, ANALIZANDO Y RECONSTRUYENDO FUNCIONES POLINÓMICAS

Patricia Di Pantaleo, Marcela Platero & Verónica Pagliaccio

IMA – Escuela Cristiana Vida
Neuquén. Argentina
patriciadipantaleo@gmail.com, marcelaplatero26@gmail.com, vpagliaccio@yahoo.com.ar

Palabras claves: producto de funciones, funciones polinómicas, comportamiento, GeoGebra.

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo mostrar una experiencia áulica, realizada por alumnos de 4° Año de Nivel Medio en el Instituto María Auxiliadora y en la Escuela Cristiana Vida, ambas de Neuquén Capital.
Su objetivo principal es el de "descubrir" el comportamiento de las funciones polinómicas de grado 3 a través del producto de funciones conocidas, es decir, a través del producto de una función cuadrática y de una lineal o del producto de tres funciones lineales. Realizando primero la actividad con lápiz y papel y luego incorporando el GeoGebra para verificar y complementar lo obtenido.
Sabemos que lo alumnos deben enfrentarse a situaciones en las que pongan en juego sus conocimientos previos, para que a partir del hacer, puedan en este caso en particular, con la incorporación del recurso tecnológico, determinar la validez o no de lo producido y las relaciones que han ido estableciendo.
La utilización del software ayudó a los alumnos a "visualizar" el planteo de las actividades sugeridas, y a generar datos, a realizar argumentaciones, para poder arribar al enunciado de conjeturas, que pueden o no, haber sido obtenidas previo al desarrollo algebraico, para luego poder completarlas.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene como objetivo mostrar una experiencia áulica, realizada por alumnos de 4° Año de Nivel Medio (cuyas edades oscilan entre los 15-16 años) del Instituto María Auxiliadora (IMA) y de la Escuela Cristiana Vida, ambas de la Ciudad de Neuquén Capital.
Su objetivo principal es el de "descubrir" el comportamiento de las funciones polinómicas de grado 3 a través del producto de funciones conocidas, es decir, a través del producto de una función cuadrática y de una lineal o del producto de tres funciones lineales.
Las situaciones propuestas fueron extraídas de una serie de actividades trabajadas en el Taller: "Una introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas. Incorporación del GeoGebra al trabajo en el aula.", en la IV Repem realizada en Santa Rosa (La Pampa) en agosto de 2012 y en el Curso-Taller: "Resolución de Problemas de Geometría que se modelizan con funciones, usando GeoGebra" dictado en la Universidad Nacional de Río Negro.
El eje está puesto en "descubrir" el comportamiento de las funciones polinómicas de grado 3 realizando primero la actividad con lápiz y papel y luego incorporando el GeoGebra para

verificar y complementar lo analizado. Sabemos que los alumnos deben enfrentarse a situaciones en las que pongan en juego sus conocimientos previos, para que a partir del hacer, puedan en este caso en particular, con la incorporación del recurso tecnológico, determinar la validez o no de lo producido y las relaciones que han ido estableciendo.
La incorporación del software de geometría dinámica en el aula “ayuda” a los alumnos a visualizar tanto la imposibilidad de solución como analizar múltiples soluciones de un problema, situación que con lápiz y papel, en general, los alumnos no analizan, ya sea por una cuestión de comodidad o por la “costumbre” de que la mayoría de los problemas tienen una única solución. La visualización y la exploración que se genera al mover o dejar fija una función polinómica determinada, hace que la justificación y argumentación ante determinada respuesta tome mayor importancia y no sea una mera repetición de un concepto teórico o la aplicación inmediata de un Teorema.

FUNDAMENTACIÓN

Tradicionalmente, estamos acostumbrados a desarrollar funciones polinómicas, desde su expresión polinómica, porque nos permite “reforzar” los casos de factoreo de un polinomio; o bien, desde la representación gráfica de una función polinómica de grado mayor a dos, donde en un principio analizamos ceros o raíces, ordenada al origen, conjunto de positividad y de negatividad y a partir de diferentes gráficos obtener conclusiones con respecto al orden de multiplicidad de las raíces de la función que estamos trabajando, para luego continuar con la reconstrucción de la función a partir de determinados datos dados.
Desde el momento en que se seleccionaron las 4 (cuatro) actividades para trabajar en un entorno virtual tuvimos en cuenta dos ideas centrales que menciona Fioriti (2012) en el prólogo de GeoGebra entra al aula de Matemática; el buscar problemas, en este caso en un contexto intramatemático, en el que los alumnos hagan matemática, es decir *“…que la producción de conjeturas y de pruebas son tareas constitutivas de la actividad matemática y que gran parte de la actividad matemática puede identificarse con la modelización, es decir la construcción de modelos de lo que queremos estudiar para trabajar con ellos y producir e interpretar resultados.”* Y por otro lado, la importancia de la gestión de la clase al utilizar las computadoras como recurso, ya que nuestra mayor experiencia del trabajo como docentes ha sido organizando y seleccionando actividades para trabajar con lápiz y papel.
Para ayudarnos, en el artículo de Arcavi, Hadas (2003) se mencionan algunas características que deben tener los ambientes computarizados dinámicos. Nos dice, que se nutren de la visualización, experimentación, la sorpresa, la retroalimentación y necesidad de pruebas y demostraciones.[1]
Es por esto que las actividades seleccionadas nos parecieron ideales para trabajar la función polinómica tanto desde su expresión simbólica como desde su representación gráfica, ya que los contenidos previos que necesitan los alumnos (valor numérico de una función, operatoria de funciones, concepto de ordenada al origen y raíz, gráfico aproximado) ya han sido trabajados al estudiar función lineal y función cuadrática. Por otro lado, también nos resultó interesante generar la función polinómica desde el producto de dos o más funciones, de manera de fortalecer la forma factorizada de escritura de la misma, como así también la posibilidad de generar más de una solución como respuesta a las consignas planteadas, que ayudarán a generar un espacio de discusión en la clase.
El uso del GeoGebra es fundamental para poder explorar y elaborar argumentos para anticipar y validar conclusiones.

[1] Ver observaciones.

DESARROLLO

A los alumnos, de ambas instituciones, se les entregó una fotocopia con las actividades que mostramos en el ANEXO.

Fueron trabajadas en 4 encuentros de 80 minutos cada uno, es decir durante dos semanas de clase. Estas actividades arrojaron los siguientes resultados:

Actividad 1: Para la resolución del inciso a) en el IMA tuvimos un inconveniente con las fotocopias y es que la cuadricula en la representación gráfica no salió, lo que motivó a que los alumnos buscaran la expresión analítica de las funciones (todos resolvieron de la misma manera).

La respuesta general, fue “la función *h* es una cúbica que viene del producto de una función lineal y de una cuadrática.” Todos los alumnos hallaron la expresión polinómica de la función cúbica, siendo que la función cuadrática la hallaron en su expresión factorizada por los datos que tenían, pero luego aplicaron propiedad distributiva para obtener su forma polinómica.

En ningún momento se dieron cuenta que no era necesario la expresión analítica de *h*, porque como se les pide el valor numérico con mirar el gráfico alcanza, ya que por ejemplo, $h(1) = f(1) \,.\, g(1) = (-2) \,.\, 2 = -4$.

Sin embargo en la Escuela Vida se presentaron dificultades cuando tenían que buscar la imagen de una de las raíces de la parábola. Luego de que se planteó la duda, comenzamos con una puesta en común, y una de las alumnas pudo determinar la imagen de *h(-3).*

Algunas conclusiones que fueron surgiendo:

- $h(-3) = 0$, -3 es una de las raíces de *h* porque es raíz de *f*.
- las raíces de *h* son las mismas de las funciones que forman el producto.
- $h(0) = -3$ es la ordenada al origen, pero no necesariamente es la ordenada al origen de *f* o de *g*. En este caso coincide, pero si $f(0) = -3$ y $g(0) = 2$, $h(0) = -6$ y no coincide con ninguna de las ordenadas al orden de las funciones que conforman el producto.
- $h(6)$ es positivo porque las dos funciones son positivas.
- no se ve el valor numérico de $h(-20)$, pero como una función “va para arriba” y la otra “va para abajo”, es negativo (aunque la gran mayoría lo calculó con la expresión de *h*).

Actividad 2: En ninguna de las escuelas fue una actividad que presentara dificultad. En el IMA La primera parte ya estaba resuelta, acá nos detuvimos a “desarmar” la expresión de *h*.

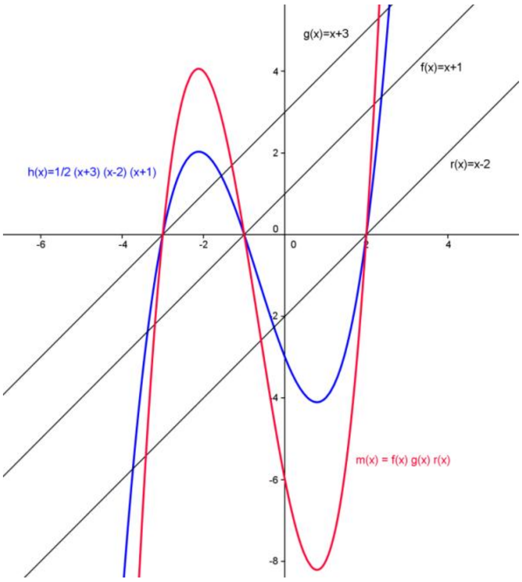
$$h(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2,5\,x - 3 = \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right)}\,(x+1) = \frac{1}{2}(x+3)\,(x-2)\,(x+1) \quad (1)$$

Mientras que en la Escuela Vida dejaron la función polinómica expresada en forma factorizada.

No tienen dificultad para escribir las funciones en el GeoGebra (más allá de la conclusión anterior) siguen trabajando la expresión polinómica, y esto dificulta los incisos c) y d) ya que la función *h* no está generada por el producto de las funciones *f* y *g*.

Para el inciso b), la gran mayoría trabajó con las siguientes funciones lineales

$$f(x) = x + 1 \,,\, g(x) = x + 3 \text{ y } r(x) = x - 2 \quad (2)$$



Al representarlas gráficamente, coinciden las raíces pero el resto del dibujo no, varía la altura de la cresta, es exactamente el doble de función *h*, lo que nos ayuda a determinar que falta el coeficiente principal y como debemos reducir a la mitad la altura de la cresta $a = \frac{1}{2}$, ¿pero este coeficiente principal, afecta a todas las funciones lineales? ¿Cuántas funciones lineales generan *h*?

No nos olvidemos que

$$h(x) = \frac{1}{2}\,(x+3)\,(x-2)\,(x+1) \qquad (3)$$

por los que existen tres posibles funciones lineales que serían:

<u>Caso 1:</u>

$$h(x) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)}_{g(x)}\,\underbrace{(x-2)}_{r(x)}\,\underbrace{(x+1)}_{f(x)} \qquad (4)$$

<u>Caso 2:</u>

$$h(x) = \underbrace{(x+3)}_{g(x)}\,\underbrace{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)}_{r(x)}\,\underbrace{(x+1)}_{f(x)} \qquad (5)$$

<u>Caso 3:</u>

$$h(x) = \underbrace{(x+3)}_{g(x)}\,\underbrace{(x-2)}_{r(x)}\,\underbrace{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)}_{f(x)} \qquad (6)$$

El inciso c), un solo grupo, con solo leer la consigna ya se dio cuenta que la actividad no tiene solución porque como la función cuadrática tiene 2 raíces reales distinta y es la función que debemos dejar fija, en ningún momento se iba a lograr que la función *h* atraviese el eje *x* una sola vez.

En el inciso d) tuvimos que "recalcar" que la función *h* está generada por el producto de las funciones *f* y *g*, de lo contrario cuando "movamos" la parábola en la función cúbica no se producirá ninguna modificación. Se analiza además que sucede cuando el vértice de la parábola coincide con la raíz de la función lineal y se sistematiza, a través de un cuadro, la cantidad de raíces de la función cúbica y el orden de multiplicidad de las mismas.

Actividad 3: como se trata de una actividad de reconstrucción de funciones a partir de datos dados, no resulta, en principio, una actividad con dificultad. En el inciso b) se refuerza la idea de que alguna de las raíces dadas debe ser una raíz doble y como no tenemos más datos existen dos posibles funciones con infinitas soluciones ya que el coeficiente principal de la misma no lo podemos determinar. A diferencia del inciso d) donde se les dio una dato más que es un punto de la función. Mientras que, en el inciso e) por ejemplo, como el dato era solamente que 7 era raíz, la gran mayoría de los alumnos consideró que era una raíz triple y no la posibilidad de que fuera el producto de una función lineal cuya raíz sea 7 y el de una cuadrática que no tenga raíces reales.

Actividad 4: fue una actividad que costó bastante, ya que es una actividad que integra los contenidos trabajados en las situaciones anteriores con los conocimientos previos que el alumno debe tener a disposición (concepto de raíz, Teorema del Resto, Regla de Ruffini, división de polinomios, fórmula de Baskara).

Al momento de querer usar la regla de Ruffini los alumnos se encontraron con el obstáculo de que el polinomio divisor era de la forma $a\ x + b$, por lo que para poder utilizar la Regla de Ruffini era necesario transformarla en su expresión equivalente

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right) \quad (7)$$

En el inciso c) no tuvieron problemas para hallar la expresión factorizada como producto de 3 funciones lineales, pero si les costó identificar cuáles eran las 3 funciones lineales.

CONCLUSIONES

Luego de haber puesto en aula las situaciones seleccionadas, nos hemos dado cuenta de que hemos fomentado tanto los desarrollos analíticos en años anteriores, que a los alumnos les cuesta “despegarse” de la fórmula, y en este caso en particular, como lo que se buscaba era una función, para la gran mayoría, debía estar expresada en forma polinómica.

También hemos tenido que recalcar la lectura con detenimiento de las consignas ya que en la actividad 2, por ejemplo, no interpretaban que la función h está generada por el producto de las funciones f y g y no por una expresión analítica que no les ayudaba a generar ninguna conclusión.

No menor es la “ansiedad” que nos provoca que nuestros alumnos incorporen un software, en este caso de Geometría Dinámica, como herramienta. El no poder tener el total “control de la clase” hace que veamos, en muchos casos, como que la clase fue “desprolija”, que tal vez no todos nuestros alumnos tuvieron los mismos tiempos para explorar y arribar a conclusiones, pero no debemos “desesperar”, todos estamos aprendiendo a trabajar en entornos virtuales.

Seguimos apostando al desafío de seguir generando situaciones para incorporar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC´s) en la enseñanza de la matemática.

OBSERVACIONES

Arcavi, Hadas. 2003. El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque, 25-45.

- *La visualización.*
  …la visualización “no sólo organiza los datos disponibles en estructuras significativas, sino que también es un factor importante que orienta el desarrollo analítico de una solución.”
- *Experimentación.*
  ...el desempeño con los ambientes dinámicos permite a los estudiantes aprender a experimentar, y “a apreciar la facilidad de obtener muchos ejemplos..., para buscar

casos extremos, ejemplos adversos y de carácter no estereotipados…"(Yerushalmy, 1993, pág. 82)

La información obtenida de esta manera puede ser un paso hacia la enunciación de generalizaciones y conjeturas que a su vez deben servir como base para la siguiente característica importante a considerar.

- *La sorpresa.*
  Las actividades curriculares, tales como las situaciones problema, deben ser diseñadas de tal manera que los tipos de preguntas que a los estudiantes le sean requeridas puedan jugar papeles significativos en la profundidad e intensidad de un aprendizaje experimental. El reto es encontrar situaciones en las cuales el resultado de la actividad sea inesperado o contra-intuitivo, de tal forma que la sorpresa (o el desconcierto) generado cree una clara diferencia con las predicciones explícitamente enunciadas. Éste puede ser el detonador para nutrir la propia necesidad de los estudiantes para re-analizar su conocimiento y predicciones, estableciendo las oportunidades para un aprendizaje significativo.
- *La retroalimentación.*
  Las sorpresas originan una desigualdad entre una expectativa explícita de una cierta acción y del resultado de esa acción. La retroalimentación es proporcionada por el ambiente mismo, el cual reacciona a medida que es requerido. Tal retroalimentación directa es potencialmente más efectiva que el proporcionado por un profesor, no solamente porque es un afirmación emotiva (carencias de juicio de valor), sino también porque puede involucrar motivación para volver a verificar, revisar la predicción y puede motivar la necesidad de una demostración.
- *Necesidad de pruebas y Demostraciones.*
  El diseño de tareas exitosas debe tener en cuenta también algo más. El ciclo de experimentación-retroalimentación-reflexión debe suministrar las semillas de la argumentación que ayude a explicar y a demostrar una declaración. De esta manera el ambiente dinámico apoya realmente a "cerrar el ciclo".

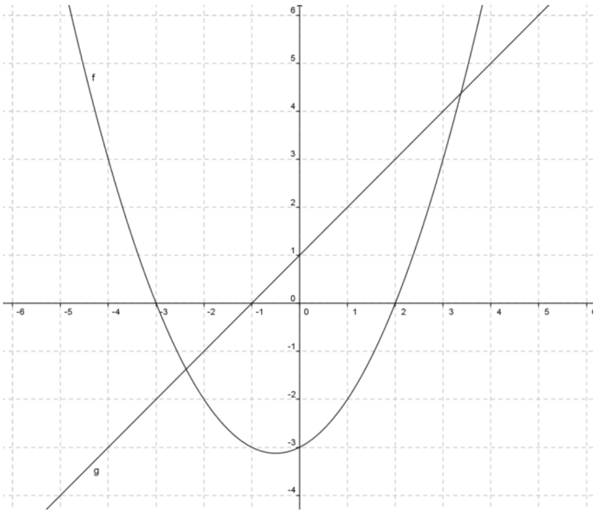
REFERENCIAS

- Arcavi, Hadas (2003). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. Documento de Trabajo del Grupo EM&NT. Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.
- Arvavi, A. (1995): El sentido de los símbolos. Generación de intuiciones en matemáticas formal. Actas de las VII JAEM (pp. 77-83). Madrid.
- Fioritti, Gema (2012). Prólogo. En: Ferragina, Rosa (Ed.) (2012). *GeoGebra entra al aula de Matemática*. Buenos Aires: Miño y Dávila srl. (pp. 11-15).

ANEXO

Actividad 1 (para realizar con lápiz y papel): A continuación se dan los gráficos de $f(x)$ y de $g(x)$. Sea

$$h(x) = f(x).g(x)$$



a) Calcular:

$h(1) =$ $h(0) =$ $h(-3) =$

$h(-2) =$ $h(3) =$ $h(-4) =$

b) Decidir si $h(x)$ es positiva, negativa o cero en cada caso:

$h(6)$ $h(1, 5)$ $h(-4)$

$h(0)$ $h(-2, 5)$ $h(-20)$

c) Indicar ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad.

d) Graficar aproximadamente $h(x)$.

Actividad 2 (para realizar con GeoGebra):

a) Graficar la recta y la parábola del problema anterior buscando las fórmulas de ambas y graficar la función producto $h(x)$.

b) En un nuevo archivo volver a graficar $h(x)$. ¿Pueden expresar h como producto de 3 rectas? En caso de ser posible, escriban la fórmula de las tres rectas que encontraron y grafiquen la función producto en la misma ventana para ver si se superpone con el gráfico de h. En caso de no ser posible justifiquen por qué. Guardar este archivo.

c) Abran el archivo que guardaron en a). Dejen fija la parábola y muevan la recta paralelamente a ella misma de tal manera de lograr que el producto h atraviese el eje x una sola vez. Guardar este archivo sin modificar el archivo a).

d) Abran el archivo que guardaron en a). Dejen fija la recta y muevan la parábola para lograr que el producto h tenga un cero simple y otro doble. Guardar este archivo sin modificar el archivo a).

Actividad 3: En cada caso, hallen si existe, la fórmula de una función cúbica h que verifique lo pedido. Si les parece que no hay expliquen por qué:

a) Las raíces son -5, -2 y 4 y h toma valores negativos para x mayores que 4.

b) Las raíces son -3, 2 y 8 y el gráfico de h corta al eje de las “y” en 12.

c) Las raíces son solamente 2 y 7.

d) Las raíces sean solamente 0, -1 y $h(1) = 10$.

e) que tenga un solo cero y esté en $x = 7$.

f) que tenga un cero doble en $x = -5$.

g) que no tenga ceros.

La función que encontraron en cada caso, ¿es la única que cumple esas condiciones? Si creen que sí, justifiquen, y si creen que no, hallen al menos tres fórmulas diferentes.

<u>Actividad 4:</u> La función

$$h(x) = 4\,x^3 - \ 6\,x^2 - \ 22\,x + 12$$

es el producto de dos funciones *f*(*x*)y *g*(*x*).
a) ¿Puede ser que *g*(*x*)= 2 *x* - 1? Si les parece que si encuentren *f*. Si les parece que no, justifiquen.
b) ¿Y si fuera *g*(*x*) = *x* -1?