**CB 15**

# LOS MISTERIOS DE LAS PIRÁMIDES. DESANDANDO UNAS PRÁCTICAS, CONSTRUYENDO OTRAS

**Norma Beatriz Di Franco, Wiliams Noel Uribe, Aida Romina Altamiranda, Georgina Paola Cesanelli, Alexis David Fernandez, María Florencia Ferrari, Dario Ezequiel Marchant, Micaela Alejandra Recchioni Barrio, Sheila Solange Sgala & Marlene Del Milagro Sulca**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa
Av. Uruguay 151- (6300) Santa Rosa - La Pampa - Argentina
*ndifranco @ gmail.com, wiliams_uribe @hotmail.com*

**Palabras clave**: prácticas de formación, conocimiento profesional del profesor, buenas prácticas, experiencia de búsqueda de regularidades.

## RESUMEN
La propuesta se desarrolla en la Práctica Educativa III, asignatura del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. Allí se focaliza en la recuperación de conceptualizaciones de diferentes campos de saber de la formación para revisarlas de miras a la elaboración de nuevas aproximaciones y relaciones con el saber cómo objeto de enseñanza y en el desarrollo de experiencias de investigación educativa que fortalezcan procesos reflexivos, que aporten a la elaboración de conocimiento profesional del profesor. Focalizamos en la situación de las pirámides, transformada en un problema a partir de conflictuar su diseño y su resolución. Una metodología de trabajo que permitió que se analizara la reducción a pirámides de menor cantidad de celdas en la base como estrategia de intervención ante problemas complejos, la utilización de cifras que colaboren con la explicitación de alguna regularidad, el ensayo con cantidades ubicadas en lugares estratégicos, la optimización del valor de la cúspide, la recurrencia a saberes conocidos como el Triángulo de Pascal, la transferencia de casos, la búsqueda con otras operaciones, la apelación a diferentes campos numéricos, la exploración de posibilidades de soluciones únicas, la articulación con la combinatoria o las probabilidades. Ratificamos la importancia de buscar oportunidades de establecer nuevas vinculaciones con los saberes disciplinares y didácticos, como modo de contribución a la construcción de conocimiento profesional del profesor y al desarrollo de buenas prácticas, aquellas de un docente que puede establecer qué quiere que los estudiantes aprendan y cómo.

## LA PROPUESTA
La propuesta se desarrolla en el marco de la cursada de la Práctica Educativa III, una de las asignaturas del Campo de las Prácticas del plan de estudios del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam, espacio destinado al aprendizaje y desarrollo sistemático de las posibilidades para la actuación docente en las aulas y en los distintos ámbitos de desempeño profesional.
Se focaliza en las situaciones y problemáticas en relación con las Prácticas Profesionales Docentes - PPD – que se realizan como parte del trabajo en esta asignatura, con la que se

culmina el recorrido de todo el campo de las prácticas de la carrera. Se promueve una formación docente como práctica social, que se aprende con otros, en una cultura de colaboración, así como se intenta favorecer una enseñanza desde una perspectiva epistemológica y ética, la articulación del saber (al interior de las asignaturas, con otras asignaturas y con la escuela), y la posibilidad de pensar al plan de estudios como susceptible de ser llevado a la práctica.

Se parte de considerar los saberes de la disciplina y de la didáctica de las matemáticas como campos de conocimientos medulares de la formación de profesorado.

De los núcleos que se priorizan adquieren particular sentido en esta presentación aquellos que promueven que los estudiantes de Profesorado de Matemática puedan:

.Recuperar conceptualizaciones de los diferentes campos de saber de la formación de profesorado, para revisarlas de miras a la elaboración de nuevas aproximaciones y relaciones con el saber cómo objeto de enseñanza.

.Desarrollar experiencias de investigación educativa que aporten a la elaboración de conocimiento profesional del profesor.

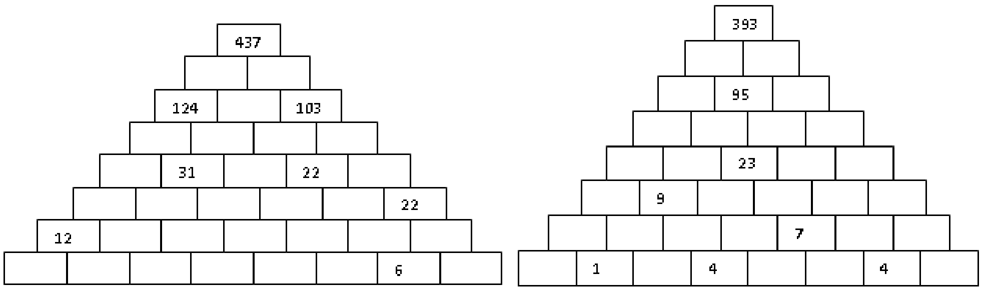
.Y analizar situaciones emergentes en la implementación de experiencias de residencia u otras PPD fortaleciendo procesos reflexivos que nutran el conocimiento profesional del profesorado.

Font y Godino (2011), enmarcados en el Enfoque Ontosemiótico, identifican temáticas relacionadas a la formación profesional entre las cuales citan: estrategias para desafiar y cambiar la práctica de la enseñanza, diseño de la evaluación, aprendizaje para promover comprensión, valores de profesores y formadores y su influencia en las decisiones, regulación de la entrada a la profesión, papel de la matemática en la formación, integración teoría práctica y tendencias y tareas en el desarrollo profesional. Godino y Neto (2013) explican, en el mismo marco del enfoque ontosemiótico (Godino, 2012; Font, Planas, Godino, 2010) que denominan idoneidad didáctica a los criterios que describen buenas prácticas en esta concepción. En Font y Godino (2011) tales criterios de idoneidad se sintetizan como: Idoneidad epistémica, requiere que las matemáticas enseñadas sean unas 'buenas matemáticas'; idoneidad cognitiva, grado en que los aprendizajes pretendidos/implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos así como la proximidad de los aprendizajes logrados a los pretendidos/implementados; idoneidad interaccional, grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje; idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje; idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio e idoneidad ecológica, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, entre otros. El desarrollo de la Práctica Educativa III se convierte así, en el espacio privilegiado de reflexión y elaboración de conocimiento profesional del profesorado.

Expresa Nuria Planas que "uno de los requisitos para que una práctica de enseñanza pueda considerarse buena práctica es que, junto con los objetivos sobre la enseñanza, se plantee en función de los objetivos de aprendizaje" (2011: 65). Todo programa de formación de profesorado debería incluir referencias explícitas a la distinción entre enseñanza y aprendizaje. Recuperamos la importancia de que se lo haga vinculándose con el conocimiento de manera reflexiva, protagonizando las construcciones, rompiendo con el esquema que sostiene un discurso de formación de alumnos críticos mientras se llevan adelante prácticas de repetición y aprendizajes mecanicistas. Cómo interrumpir esas prácticas.

Agrega la autora que afirmar que el profesorado sepa distinguir entre lo que supone enseñanza y lo que supone aprendizaje, continúa siendo demasiado teórico y difícil de imaginar en la práctica. Propone unos criterios –significatividad, reflexividad, interdisciplinariedad e

inclusión-, unos recursos – contexto real, conversación, ciencias y diversidad- y unos métodos – trabajo por proyectos, guión de preguntas, experimentación y estudio de casos – como elementos de ayuda en la implementación y el análisis para unas buenas prácticas.
De esta manera, posicionados en una formación para la comprensión, para la intervención y para la reflexión, las posibilidades nos orientan siempre a generar en el profesorado nuevas oportunidades de experimentar otras formas de enseñar y aprender.
La experiencia de este relato. Fue presentada en la cátedra una situación, en principio sin trascendencia ni complejidades, como la de resolver unas pirámides numéricas de las que aparecen en las revistas de Juegos y Pasatiempos o en la sección de entretenimientos de los periódicos. Las transcribimos:



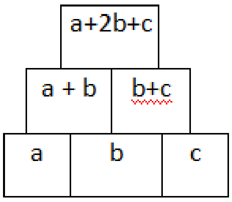

Los estudiantes fueron invitados a resolverlas a partir de las reglas extraídas de la revista (‘Completa la pirámide colocando un número de una o más cifras en cada casilla, de modo tal que cada casilla contenga la suma de los dos números de las casillas inferiores. Como ayuda, van algunos ya indicados.’) y luego a reflexionar en base a algunos planteos iniciales como: ¿Qué preguntas creés que le podría generar a un lector de revistas de juegos de entretenimientos, si tuviera que buscar buenas estrategias de resolución? O: consideremos los números de la base de cualquier pirámide, ¿da lo mismo ponerlos en cualquier orden?; ¿La conmutatividad de la suma te daría argumentos para responder?; si no da lo mismo, ¿cómo se podría maximizar el número del rectángulo superior de la pirámide? Por último se les solicitaba escribir tres regularidades que sería bueno tenerlas en cuenta en caso de desempeñarse como diseñador de pirámides.
Comenzó a configurarse como:

- una situación extremadamente sencilla, entendible en sus reglas, no amenazante.
- desde un escenario accesible, que invitaba a resolverla rápidamente.
- en una tarea en la cual no había nada que ocultar, no teníamos casi referencias bibliográficas, pedíamos que se consultara a cualquier persona, profesor, elaborador de pirámides de las editoriales.
- un trabajo colaborativo –unos estudiantes aportando a otros-, a medida que cada quien desarrollaba su tarea la subía a un sitio en internet compartido por el grupo.
- un problema abierto, fecundo, fértil –como suele denominárselo -, desde la matemática y desde las posibilidades didácticas.
- un problema frondoso, que -aunque no lo parecía inicialmente- permitía que todos trabajaran en un proyecto personal dedicado a un aspecto de su resolución.
- una problemática que demandaba procesos propios de la disciplina como los de búsqueda de regularidades.

Como grupo de estudiantes universitarios el proceso incluyó desde expresar qué fácil era resolver esas pirámides a sorprenderse ante las primeras regularidades que nos ponían en relación con el triángulo de Tartaglia, por ejemplo, más aún ante la posibilidad de que todos trabajaran en proyectos diferentes, hasta llegar a formular la complejidad de la sistematización

de algunas regularidades. Complejo porqué. ‘Por no estamos acostumbrados a este tipo de tareas’ fue la respuesta generalizada.
Algunos desarrollos de los estudiantes permiten describir recorridos.

**Relación entre las casillas de la base, la “cúspide/cima” de la pirámide y los coeficientes del Triángulo de Tartaglia.**
Algunos estudiantes comenzaron a analizar una pirámide de n=3 casillas de base, donde una casilla resulta ser la suma de las dos casillas inferiores.

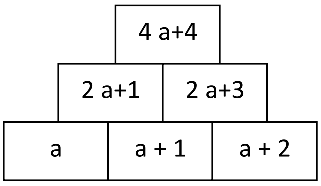


**Pirámide de 3 casillas de base**

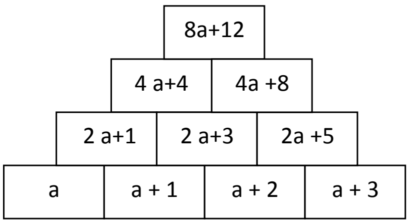
Y así con las pirámides de base 5, 6, 7 o más casilleros en la base, de donde se fueron obteniendo los coeficientes son los del triángulo de Pascal.

| Cantidad de celdas en la base | Cima |
|---|---|
| 3 | a+2b+c |
| 4 | a+3b+3c+d |
| 5 | a+4b+6c+4d+e |
| 6 | a+5b+10c+10d+5e+f |
| 7 | a+6b+15c+20d+15e+6f+g |
| 8 | a+7b+21c+35d+35e+21f+7g+h |

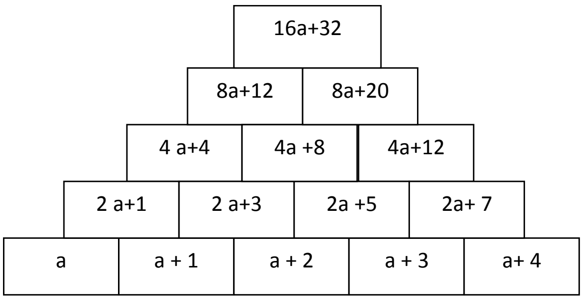
**Pirámides con números consecutivos en los casilleros de la base para explicitar relaciones**
Otra estudiante, de miras a explicitar propiedades, comenzó a analizar qué sucede cuando las bases son números consecutivos, qué modificaciones genera en el cálculo de la cima de la pirámide. Luego, en vez de ir completando la base con números que van de uno en uno, se propuso analizar qué sucede cuando ponemos números de dos en dos, de tres en tres, etc, para pirámides de diferente cantidad de casillas en la base. Entonces tenemos por ejemplo:



**Pirámide con n=3 casillas de base**



**Pirámide con n=4 casillas de base**



**Pirámide con n=5 casillas de base.**

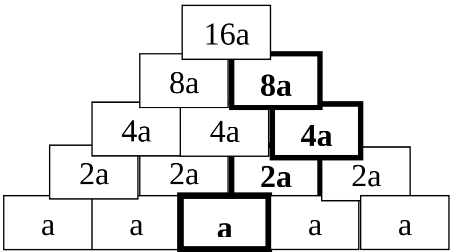
- Si el número de casillas de la base es n=3: “sumo el primer número de la base más el último número de la base, y a esto lo multiplico por 2 da el número de la cima.”
- Si el número de casillas de la base es n=4: “sumo el primer número de la base más el último número de la base, y a esto lo multiplico por 4 da el número de la cima.”
- Si el número de casillas de la base es n=5: “sumo el primer número de la base más el último número de la base, y a esto lo multiplico por 8 da el número de la cima.”

Si una pirámide tiene *n* casillas de base y *a* es el primer elemento de la base de la pirámide tenemos que $(2a+n-1).2^{n-2}$ es el valor de la cima de una pirámide con *n* valores consecutivos y ordenados en la base, siendo '*a*' el primer valor de la base.
Una de las consecuencias radica en que, si se conoce el valor numérico de cualquiera de las celdas de la pirámide, ya se puede resolver y tiene solución única.

**Pirámides en las que los números de los casilleros de la base son idénticos**
Otro camino consistió en analizar qué sucedería si los números de los casilleros de la base fueran idénticos y una regularidad interesante permite llegar a la siguiente expresión de la cima.

$$\left(\sum_{i=0}^{n-2} 2^i.a\right)+a=2^{n-1}.a \qquad (1)$$

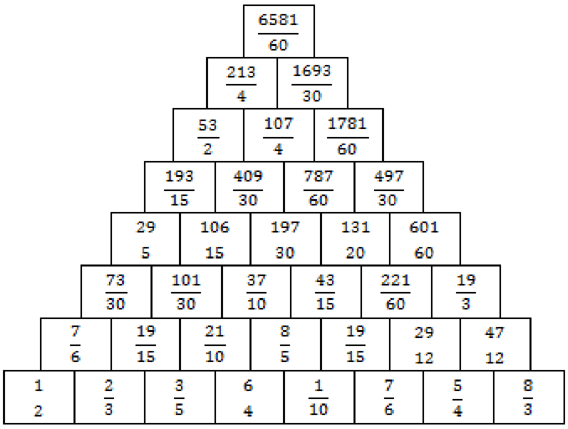
Expresiones análogas de la misma regularidad se pueden observar en otras sub pirámides, como la que se muestra en el esquema (*), en el que $(a+2a+4a)+a=8a$



**esquema (*)**

Al igual que en el caso anterior, sabiendo que todos los elementos de la base son idénticos, solo basta con proporcionar el valor de cualquier casilla de la pirámide, para poder resolver la misma.

**Pirámides que en sus casilleros tienen números que pertenecen al conjunto de los números racionales**.
Para comenzar a investigar alguna regularidad se creó la siguiente pirámide donde una casilla resulta de la suma de las dos inferiores:




**Pirámide con números racionales**

Se observa que, si tomamos los números de la base y lo multiplicamos por los valores que encontramos en la 8° posición del Triángulo de Pascal y los sumamos nos da el número de la cima de nuestra pirámide: $\frac{1}{2}+\frac{7*2}{3}+\frac{21*3}{5}+\frac{35*6}{4}+\frac{35*1}{10}+\frac{21*7}{6}+\frac{7*5}{4}+\frac{8}{3}=\frac{6581}{60}$

Entonces, a partir de los campos numéricos, sus operaciones y propiedades, ratificamos que la relación entre las casillas de la base y la cúspide, cuando sumamos, es independiente del campo numérico en el que se define nuestra pirámide.

**Pirámides con otras operaciones: el caso de la diferencia de números reales**.

Al trabajar en la exploración de las pirámides cuando la operación es de sustracción. Se llega a que la cúspide de una pirámide de n filas se calcularía así:

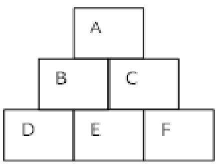
$$\sum_{i=1}^{n} (valor\ de\ la\ casilla\ i).\binom{n}{i}.(-1)^{i+1} \tag{2}$$

Nuevamente aparecen los coeficientes del Triángulo de Tartaglia, al relacionar las casillas de la base con la cúspide de la pirámide, completando esta relación con el factor que determina el signo de cada término.

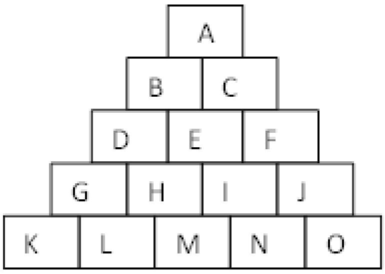
**Pirámides con multiplicaciones**.

¿Qué regularidades aparecen en las pirámides numéricas cuando cambiamos de operación, en vez de usar la suma, utilizamos la multiplicación? ¿Existe alguna relación entre los elementos de la base, el valor de la 'cúspide' y los coeficientes del Triángulo de Pascal, al igual que para la suma?

Al generalizar las pirámides se puede observar que, al igual que para la suma, aparecen los coeficientes del triángulo de Pascal pero esta vez en forma de exponentes. Veamos unos ejemplos:




**Valor de la cúspide en función de las casillas de la base**
**$A=D^1.E^2.F^1$**




**Valor de la cúspide en función de las casillas de la base**
$A=K^1.L^4.M^6.N^4.O^1$

**Acerca de la mínima cantidad de datos y su distribución, como restricciones para que las pirámides tengan soluciones únicas.**

Del análisis de una pirámide de n=2 casillas de base, se concluye que se deben conocer 2 datos para que la solución sea única. Además para obtener una solución única, se tienen que ubicar dos datos en tres casillas, por lo cual al menos un valor si o si debe estar en la base.

¿Qué sucede con una pirámide de n=3 casillas de base? Se puede considerar una sub-pirámide de n=2 casillas de base. Por el análisis anterior, sabemos que con dos datos tiene solución es única, teniendo en cuenta las restricciones que se aclararon. Por lo tanto bastará con conocer uno de los valores que no quedaron considerados en la subpirámide para que la solución de la pirámide sea única. En el caso en que no se tenga ninguno de los valores de esas casillas, existirá más de una solución. Además al considerar una sub-pirámide de dos filas, por el análisis anterior, la base de la pirámide debe tener al menos un dato.

El mismo argumento se utiliza para pirámides de n>3 casillas de base.

Entonces, en una pirámide de n casillas de base, se deben proporcionar n datos, cuya distribución debe seguir las siguientes reglas: al menos un valor en la base; los datos que queden no deben formar una sub-pirámide.

Al momento de analizar la distribución de los valores que se deben proporcionar, una sospecha: 'Si en un renglón no se aporta información, el siguiente debe tener al menos un dato'. Para la cual bastó un contraejemplo para descartarla. Ya que si sólo se aportan como dato todos los valores de la base, la pirámide puede resolverse.

Siguiendo este análisis, en el aula se pueden trabajar sobre varios temas:

.Números triangulares y la suma de los primeros n naturales, ya que la cantidad total de casillas de una pirámide de n celdas de base es:

$$\frac{n^2+n}{2} \tag{3}$$

Y la cantidad de casillas que se deben 'borrar':

$$\frac{n^2-n}{2} \tag{4}$$

.Poner a la par las pirámides a resolver y el Triángulo de Tartaglia, ya que este último nos aporta información interesante, en particular la diagonal de los números triangulares.

El análisis en cuanto a la solución única y la cantidad de datos es el mismo, es independiente del campo numérico y de la operación binaria que relaciona una casilla con las dos casillas inferiores.

**Posibilidades de transferencia.**

Generalizar una de las regularidades que se venían construyendo permitió pensar en otros contextos de utilización. Concretamente para que una pirámide tenga solución única, cada una de las subpirámides (pirámides de orden menor), tiene que tener solución única, ya sea a partir de los datos originales o porque se pueden calcular el resto a partir de los mismos. Esto tiene implicaciones sobre la distribución de los datos. Una de las consecuencias es la que se expresaría: en la pirámide de orden n tiene que existir un dato como mínimo en cada una de las posibles bases, considerando las tres posibles si se rotara. Ídem siguiendo el proceso para cada orden menor (n-1, n-2,....).

Esta construcción promovió la reflexión acerca de otras situaciones a ser trabajadas como problemas abiertos para desarrollar en aulas propuestas por proyectos. Nos referimos a juegos como el buscaminas, la batalla naval, entre otros, con otras estructuras de diseño con posibilidades abiertas.

**Las pirámides también nos vinculan con el mundo de las probabilidades**.

Como las relaciones que se cumplen en el triángulo de Pascal ayudan a analizar regularidades, una alternativa es pensar en los números de las pirámides a partir de los coeficientes del triángulo escritos como números combinatorios y como referentes de las combinaciones posibles de establecer en un conjunto de n datos tomados de a m. Para pensar en las posibilidades y en las probabilidades.

## A MODO DE REFLEXIONES FINALES

La situación de la pirámide permitió que se analizara la reducción a pirámides de menor cantidad de ladrillos en la base como estrategia de intervención ante problemas complejos, la utilización de cifras que colaboren con la explicitación de alguna regularidad, el ensayo con cantidades ubicadas en lugares estratégicos, la optimización del valor de la cúspide, la recurrencia a saberes conocidos con los cuales se pueden establecer analogías para el nuevo análisis como el Triángulo de Pascal, la transferencia de casos, la búsqueda con otras operaciones numéricas, la apelación a diferentes campos numéricos –naturales, enteros, racionales -, la exploración de posibilidades de soluciones únicas, la articulación con la combinatoria o las probabilidades. Es decir, permitió diferentes vinculaciones con los saberes disciplinares y didácticos, desde un lugar que contribuye a la construcción del conocimiento profesional docente.

Para ello también, en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brusseau, 2007), las nociones de variable didáctica y de intervenciones docentes, (Sadovsky, 2005, 2008) tanto como la de medio como herramienta para analizar decisiones (Fregona, 2011) y las conceptualizaciones acerca de las praxeologías didácticas (Gascón y Bosh, 2001, 2009) de la Teoría Antropológica de lo Didáctico nos significan fecundos analizadores de prácticas en esta experiencia y nos permiten profundizar el estudio de las prácticas docentes en tanto dispositivos de conocimiento, de comprensión y de intervención.

Nos seguimos planteando cómo se construye un equipamiento praxeológico de profesor, cómo superar aquellas prácticas descriptas como teoricistas o tecnicistas en el análisis de las epistemologías implícitas en las prácticas de profesorado de Gascón (2001).

Los estudiantes expresan que experiencias como éstas no han resultado las más habituales en su formación previa, ni escolar, ni académica. Sin embargo también mucha expresión –quizás sólo presente en órdenes discursivos – apela al trabajo por proyectos para atender la diversidad, a las exploraciones personales que estimulen el desarrollo autónomo de los estudiantes y a la criticidad. Estamos convencidos que no se forma en la autonomía siempre en vínculo con tareas de repetición y de dependencia de construcciones sólo autorizadas externamente, ni se forma criticidad sin enfrentarse al conflicto como tampoco se trabaja por la inclusión si no se generan oportunidades de proyectos en los cuales quepa lo personal y se tensione desde lo grupal. Insistimos en que los programas de formación deberían contribuir con la reflexión teórica sobre las prácticas identificados por el doble interés en investigar e introducir prácticas de mejora y transformación, ya que las consideraciones teóricas no dan cuenta por sí solas cómo mejorar la enseñanza y el aprendizaje. Significatividad, reflexividad, interdisciplinariedad e inclusión; una alternativa de ayuda para pensar en buenas prácticas de educación matemática.

## REFERENCIAS


- Bosch, M. & Gascón, J. (2001) *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas*. http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/almeria/Practicas_docentes.PDF.
- Bosch, M. & Gascon, J. (2009) *Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la Formación del Profesorado de Secundaria*. En M. L. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.) Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 89-113). Santander: SEIEM.
- Bressan, A. M; Marino, M. R; y Calamandrei, M. M. *Matemática. Una buena pareja: juego y cálculo mental*. Neuquén: Consejo Provincial de Educación.
- Font, V. & Godino, J. (2011) *"Inicio a la investigación en la enseñanza de las Matemáticas en secundario y bachillerato"*. En Goñi, Jesus María (coord.) MATEMÁTICAS. Investigación, innovación y buenas prácticas. Barcelona: Graó.
- Fregona, D & Orús Báguena, P. (2011) *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Gascón, J. (2001) *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME).
- Godino, J. D. & Neto, T. (2013) *Actividades de iniciación a la investigación en educación matemática*. UNO. Revista de Didáctica de la Matemática, 63, 69-76.
- Muller, J. H. (2003) *Exploring Number-Pyramids in the Secondary Schools*. En the Teaching of Mathematics, Vol. Vol 1, Pp. 37–48.
- Planas, N. (2011) *"Buenas Prácticas en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato"*. En Goñi, Jesus María (coord.) MATEMÁTICAS. Investigación, innovación y buenas prácticas. Barcelona: Graó.
- Sadovsky, P. (2005) *La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática.* En Alagia,H; Bressan,A y P. Sadovsky. Reflexiones teóricas para la Educación Matemática. Buenos Aires: Libros del Zorzal
- Sadovsky, P (2008) *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Serie Reforma Integral de la Educación Básica, Primaria. SEP. México.
- *Quijote, Libros de Entretenimiento*. Revista n°35 -1a ed.- diciembre 2012. ISBN 978-950-765-443-5 Buenos Aires: Juegos & Co. Ediciones De Mente.