**CB 14**

# UNA SITUACIÓN PROBLEMA EN UNA PROPUESTA DIDÁCTICA QUE RESIGNIFIQUE CONTENIDOS

**Fabio Prieto; Matías Juárez; Silvia Martínez & Nydia Dal Bianco**

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa – Argentina**
**Uruguay 151 - (6300) - Santa Rosa (LP) - Argentina.**
*prieto.fabio@gmail.com, matiasjuarez88@hotmail.com*

**Palabras Clave:** problemas, sentido, representaciones, matemática, funciones.

## RESUMEN

Con el objetivo de que los alumnos encuentren sentido a la matemática, los docentes de esta disciplina buscamos constantemente herramientas en el campo de la didáctica que mejore la enseñanza-aprendizaje de esta ciencia. Particularmente en las carreras que se dictan en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam como Profesorado en Química y en Ciencias Biológicas, donde cursan desde el inicio Matemática, Química general y Biología I, siendo la primera asignatura de régimen anual y considerada "no propia" a la carrera que ellos han elegido como futuro profesional.

En este trabajo presentamos una propuesta didáctica siguiendo los lineamientos de Polya para la resolución de problemas complementado con la teoría de (Duval, 1998) sobre los objetos matemáticos y sus representaciones. La metodología de enseñanza basada en la resolución de problemas ayuda al estudiante a resignificar el conocimiento, en la medida en que lo convierte en un instrumento de control de los resultados de su actividad, construyendo así un conocimiento contextualizado.

## INTRODUCCIÓN

Ante las dificultades observadas en ciclos anteriores con respecto a la resolución de problemas, es interesante enfocar el aprendizaje mediante esta tipo de actividades, porque permite al alumno aprender qué conocimientos y procedimientos aplicar ante una situación concreta, integrando saberes de distintas disciplinas, al mismo tiempo que internalizan nuevos conocimientos o conceptos.

Presentamos una situación problemática como aplicación de los temas que se irán desarrollando en las clases teórico-prácticas, a fin de integrar distintos contenidos de la currícula, motivar y lograr mayor participación de los estudiantes. El objetivo es trabajar como una propuesta didáctica esta situación, en distintos períodos del ciclo académico

## MARCO TEÓRICO

Cuando hablamos de problemas no solamente hacemos referencia a cálculos numéricos, lo importante es que haya algo que buscar o un enigma que aclarar dentro de un contexto bien planteado. Como requisito previo es importante enseñar el lenguaje o la nomenclatura usual en matemática para poder efectuar los planteos en forma correcta. (García, 2003)

Según (Santaló, 1994) los problemas tienen algunas ventajas esenciales: despiertan interés en el alumno por conocer las herramientas matemáticas necesarias para resolverlos y para generalizarlos a situaciones más complejas y reales, desarrollan cualidades propias de la educación matemática, a saber: ordenación de datos, método deductivo, razonamiento lógico, capacidad de síntesis y de generalización, creación de modelos y presentación esquemática de situaciones reales.
Para facilitar el interés cognoscitivo de los estudiantes, se pueden presentar problemas que resulten significativos, éstos pueden referirse al porqué del funcionamiento de las cosas, a la necesidad de satisfacer requerimientos o condiciones dentro de una situación perteneciente a la aplicación práctica de conceptos y teorías.
Para hablar de resolución de problemas citamos a (Polya, 1997) quien considera cuatro etapas por las que debe transitar el resolutor:

1. Comprender el problema: identificar la o las incógnitas del mismo, los elementos con los que se cuenta y recurrir, si es necesario a dibujos, tablas o gráficos.
2. Idear un plan: separar en partes el problema, reformularlo e identificarlo con situaciones similares. Seleccionar las variables y evaluar la relación entre ellas en una forma ordenada a través de fórmulas, representaciones gráficas y expresiones coloquiales, que expresan los pasos a seguir, integrando gradualmente los temas que se pretenden abordar.
3. Ejecutar el plan: considerar distintas representaciones de los objetos matemáticos tratando de simplificar las condiciones propias del problema, plantear e identificar ecuaciones y los posibles métodos de solución.
4. Examinar la solución: verificar analítica, algebraica, geométrica y si es posible gráficamente la solución obtenida que satisface al problema dado. Establecer la coherencia entre resultado y enunciado del problema.

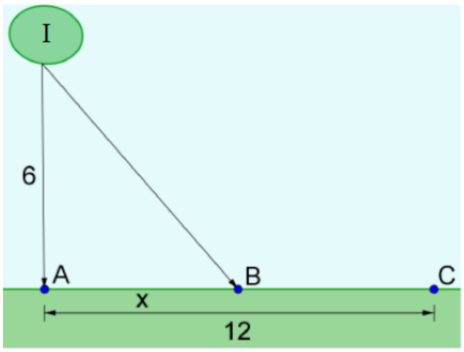
Según la teoría de (Duval, 1999) para que el aprendizaje sea significativo es necesario que el alumno sea capaz de interactuar entre diferentes registros de representación. Un sujeto comprende el significado de un determinado concepto si, por ejemplo es capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, establecer relaciones con otros objetos y aplicarlo en diversas situaciones problemáticas.
Un objeto matemático se relaciona con otros según el contexto o su notación, y cada contexto ayuda a producir determinado sentido, que en conjunto amplían el significado del objeto matemático.

## DESARROLLO

Presentamos una propuesta contextualizada en una situación de las Ciencias Naturales, con el objetivo de mostrar al estudiante la aplicación de la Matemática y brindar herramientas para que encuentren el verdadero sentido de esta disciplina, en los planes de estudio de su formación.
La actividad está diseñada para ser implementada en dos etapas, en la primera el alumno puede resolver la situación problemática haciendo uso de sus conocimientos previos y los conceptos matemáticos estudiados al momento de presentar esta propuesta: Números Reales y Funciones (Dominio, Imagen, Monotonía, representación gráfica) (Azcárate, Deulofeu, 1990).
La dificultad de arribar a una solución exacta, justifica la necesidad de aplicar herramientas matemáticas de mayor complejidad, como las del cálculo diferencial en la segunda etapa de la actividad.
Se propone el uso de la tecnología como herramienta auxiliar del cálculo, ya sea para la representación gráfica de las funciones, confección de tablas de valores, realizar cálculos de derivadas, entre otros.

**Definición del Problema en estudio**

Al estudiar el comportamiento de los pájaros durante el vuelo, los ornitólogos descubrieron que ciertas especies tienden a evitar volar grandes masas de agua durante las horas de luz. Una posible explicación de este comportamiento se basa en la creencia de que se consume más energía al volar sobre agua que sobre tierra, porque habitualmente el aire se eleva sobre la tierra y desciende hacia el agua durante el día. (Flores Rodríguez, 2010)
Denominamos con W a la energía por km necesaria para volar sobre el agua, y con L a la energía por km necesaria para volar sobre tierra (W y L medidos en joules por km)
Supongamos que un pájaro que tiene este comportamiento se libera en una isla I que está a 6km del punto más cercano A sobre una costa recta. El pájaro vuela primero a un punto B sobre la costa y luego a su nido, situado en un punto C, también sobre la costa, situado a 12km de A, como se muestra en la figura.




a) Hallar la expresión de la función energía total E(x) consumida por el pájaro en el vuelo desde la isla a su nido.

b) Supongamos que W = 1,5L; y tomando un valor de L = 1J/km. Hallar el punto B al cual el pájaro debe volar para minimizar el consumo total de energía.

Siguiendo los pasos de Polya para resolver esta situación problemática mostramos el siguiente análisis:

1.- Comprender el problema:
En este punto los estudiantes no presentarán grandes dificultades al interpretar los datos del problema, identificar la o las incógnitas, variables independiente y dependiente, dado que la figura que se adjunta ayuda a interpretar la situación.

2.- Diseñar el plan:
Observamos que, para quien tiene conocimientos básicos de análisis matemático, y lee la situación, resolvería el apartado b) en forma inmediata aplicando los conceptos de derivada. Sin embargo pensamos que los estudiantes podrían resolver el problema aplicando los conocimientos de funciones (interpretando adecuadamente los registros algebraico y gráfico (Duval, 1998)), correspondientes a los primeros ejes temáticos de la asignatura. Por tal motivo reformulamos la situación problemática en una secuencia de actividades sugeridas a través de nuevas preguntas, que orienten la ejecución de un plan aplicando conceptos estudiados como

reales, intervalos y funciones. (Azcárate, Deulofeu, 1990). Se proponen entonces las siguientes consignas para un primer acercamiento a la solución de la situación problemática.

a) Expresar las distancias IB y BC en función de x.
b) Recordando que W representa la energía necesaria para volar sobre el agua, y L representa la energía necesaria para volar sobre tierra. ¿Qué significaría un valor grande de la razón W/L en términos del vuelo del pájaro? ¿Qué significado tendría un valor pequeño?.
c) Hallar la expresión de la función energía total E(x) consumida por el pájaro en el vuelo desde la isla a su nido.
d) Encontrar un intervalo válido para la variable independiente.
e) Supongamos que W = 1,5L; y tomando un valor de L = 1J/km, representar gráficamente la función E(x) utilizando un software adecuado.
f) Observando la gráfica de la función hallar intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y el punto B al cual el pájaro debe volar para minimizar el consumo total de energía.
g) Generalizando, supongamos que W = kL, k>1. En el gráfico utilizar diferentes valores de k a fin de hallar cómo varía el punto B cuando k crece o decrece.
h) Hallar el o los valores de k para que el pájaro minimice el consumo total de energía cuando vuela directamente a su nido.

En una nueva instancia se resolverá el mismo problema aplicando las herramientas del cálculo diferencial. De este modo el alumno podrá revalorizar la aplicación de las herramientas matemáticas como “facilitadoras” al momento de resolver situaciones más complejas.

3.- Ejecutar el plan:
Aquí se responderá a las nuevas consignas:
a) Expresar las distancias IB y BC en función de x.
En esta primera consigna el estudiante deberá identificar las variables dependiente e independiente, aplicar la definición de función, entendiéndola como una relación de dependencia entre esas variables e interactuar entre lenguajes, en particular el coloquial y el simbólico.
Se espera que el alumno obtenga las siguientes expresiones

$$IB = \sqrt{36 + x^2} \tag{1}$$

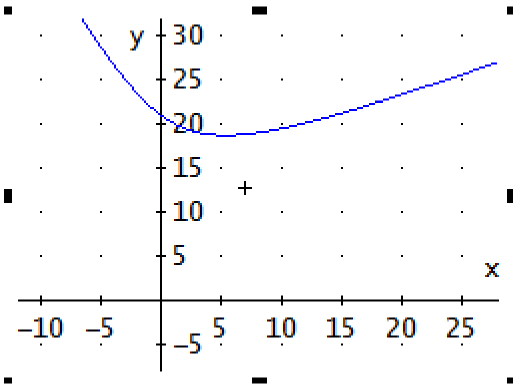
$$BC = (12 - x) \tag{2}$$

b) Recordando que W representa la energía necesaria para volar sobre el agua, y L representa la energía necesaria para volar sobre tierra. ¿Qué significaría un valor grande de la razón W/L en términos del vuelo del pájaro? ¿Qué significado tendría un valor pequeño?
El objetivo de esta consigna es que interprete el concepto de razón y lo pueda transferir a una situación concreta.
Un valor grande de la razón W/L significaría que la energía que el pájaro gasta al volar sobre el agua es mucho mayor que al volar sobre tierra.
Un valor pequeño de la razón W/L significaría que la energía que el pájaro gasta al volar sobre el agua es mucho menor que al volar sobre tierra.
c) Hallar la expresión de la función energía total E(x) consumida por el pájaro en el vuelo desde la isla a su nido.
Solicitar la energía total demanda en el alumno utilizar el lenguaje simbólico para expresar esta función en términos de la variable *x*.

$$E(x) = W.\sqrt{36 + x^2} + L.(12 - x) \quad (3)$$

d) Encontrar un intervalo válido para la variable independiente.
Este intervalo corresponde al dominio de la función, debiendo restringirlo para que tenga sentido físico. En este caso dicho intervalo es $[0{,}12]$.

e) Supongamos que W = 1,5L; y tomando un valor de L = 1J/km, representar gráficamente la función E(x) utilizando un software adecuado.
Como la función no es conocida se recurre a un software para representarla, aquí se utilizó el Derive, no obstante el alumno podrá graficarla con algún otro con el que dispone habitualmente. A partir del registro gráfico se podrán estimar las soluciones al problema, pues en esta instancia no dispone de los conocimientos específicos necesarios para resolver la situación en registro algebraico - analítico.

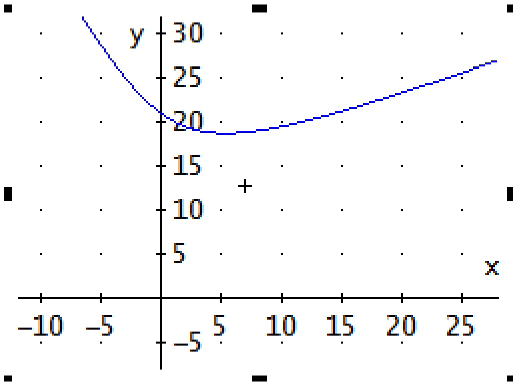



f) Observando la gráfica de la función hallar intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y el punto B al cual el pájaro debe volar para minimizar el consumo total de energía.
De la representación gráfica podrá estimar para que valor de x se obtiene el mínimo de la Energía Total y concluir entonces que el pájaro debe volar hasta un punto B ubicado aproximadamente a 5 Km de la costa y desde allí volar sobre la tierra hasta el nido.
Los intervalos de decrecimiento y crecimiento son [0, 5] y [5, 12] respectivamente, lo cual puede deducir a partir de la definición. Observando a partir de la gráfica de la función que la concavidad es hacia arriba.
Esta lectura del gráfico se puede realizar pues en el trabajo práctico correspondiente a funciones se proponen ejercicios donde el alumno interactúa entre los diversos registros, en particular para algunas funciones algebraicas y trascendentes. Al graficar una función determinada puede estudiar los diversos parámetros, los desplazamientos, dominio, imagen, visualizar los ceros, asíntotas, monotonía y simetrías.

g) Generalizando, supongamos que W = kL, k > 1. En el gráfico utilizar diferentes valores de k a fin de hallar cómo varía el punto B cuando k crece o decrece.

$$E(x) = kL.\sqrt{36 + x^2} + L.(12 - x) \quad (4)$$

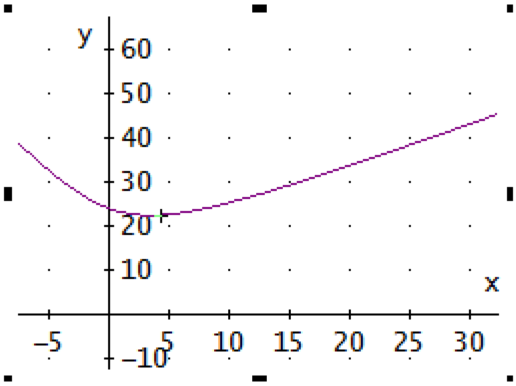
Si k = 1 , L = 1




Gráfica de la Ecuación (4) para k = 1 , L = 1

Si k = 2 , L = 1

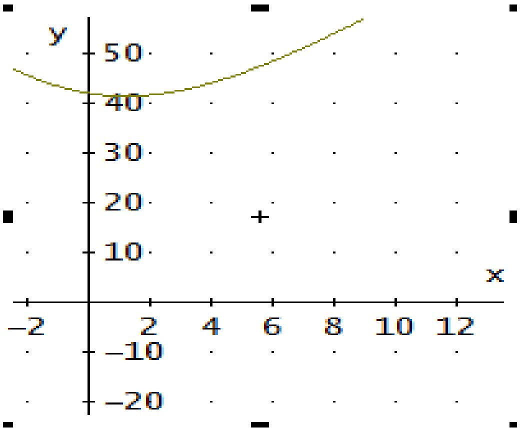
$$E(x) = 2.\sqrt{36 + x^2} + 1.(12 - x) \tag{5}$$




Gráfica de la Ecuación (4) para k = 2 , L = 1

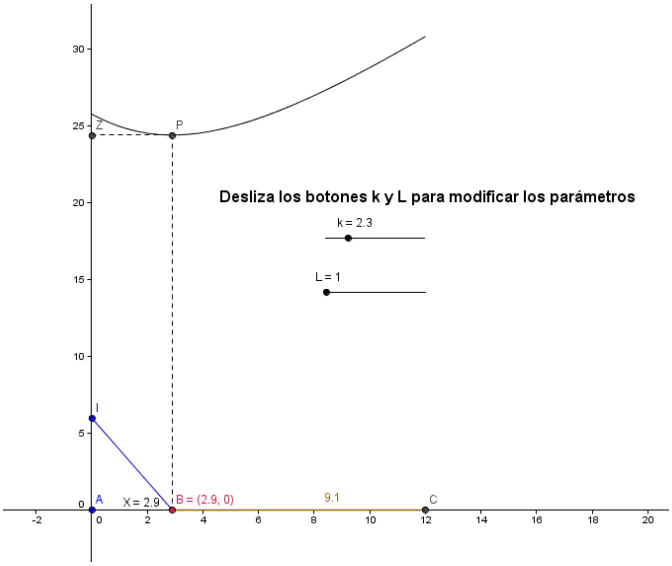
Si k = 5 , L = 1

$$E(x) = 5.\sqrt{36 + x^2} + 1.(12 - x) \tag{6}$$




Gráfica de la Ecuación (4) para k = 5 , L = 1

En estos gráficos para tres valores de k, se observan pequeñas modificaciones en los valores que toma el punto B, pero haciendo lo mismo con el software GeoGebra utilizando deslizadores, se puede observar también que cuando k crece el punto B se acerca al punto A en la costa recta, por lo tanto se aleja del nido, el punto C. Y si k decrece el punto B se acerca al punto C.
El alumno podrá disponer de un aplicativo realizado con el software GeoGebra, en el cual puede interactuar dinámicamente variando los parámetros k y L para hacer las observaciones necesarias, y sacar las conclusiones correspondientes.



Aplicativo realizado con el software GeoGebra

h) Hallar el o los valores de k para que el pájaro minimice el consumo total de energía cuando vuela directamente a su nido.

El valor de k se puede obtener utilizando el aplicativo (moviendo el deslizador k en el GeoGebra hasta que el punto B coincida con C). Se puede observar entonces que para que el pájaro minimice el consumo de energía el valor de k debe ser aproximadamente 1.12.
Hasta este punto la resolución se puede obtener en forma aproximada utilizando los conocimientos sobre funciones e interactuando con el registro gráfico.
Luego de estudiar los conceptos de derivada y aplicaciones de la derivada se resolverá el problema original, dado que en ese momento el alumno podrá contar con las herramientas del Cálculo para obtener un resultado exacto. De este modo trabajarán en el registro algebraico, comparando los resultados con los que habían obtenido anteriormente del registro gráfico. (Duval, 1999)
Se pretende que el alumno descubra que las herramientas matemáticas usadas en forma adecuada facilitan la resolución del problema. (García, 2003)
Partimos de la expresión algebraica de la Energía Total expresada como función de x

$$E(x) = W.\sqrt{36 + x^2} + L.(12 - x) \quad (7)$$

Derivando $E(x)$ en función de x, se obtiene:

$$E'(x) = \frac{Wx}{\sqrt{36 + x^2}} - L \quad (8)$$

Para obtener el mínimo el estudiante deberá utilizar los conocimientos sobre Optimización de funciones. Primero calcular el punto crítico como se muestra a continuación

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{Wx}{\sqrt{36+x^2}} - L = 0 \quad (9)$$

$$\frac{Wx}{\sqrt{36+x^2}} = L \quad (10)$$

$$Wx = L\sqrt{36+x^2} \quad (11)$$

$$W^2x^2 = L^2(36+x^2) \quad (12)$$

$$W^2x^2 - L^2x^2 = 36L^2 \quad (13)$$

$$x^2 = \frac{36L^2}{W^2-L^2} \quad (14)$$

$$x = \sqrt{\frac{36L^2}{W^2-L^2}} \qquad \text{para } W > L \quad (15)$$

Para el caso de que L = 1 y W = 1.5L

El punto crítico es $x = \frac{12\sqrt{5}}{5} \approx 5.36656$, que representa la distancia desde el punto más cercano a la isla hasta el punto B donde el pájaro comienza a volar sobre la tierra.

Como el signo de la derivada primera es negativa para $x < \frac{12\sqrt{5}}{5}$, y es positiva para $x > \frac{12\sqrt{5}}{5}$ es decir cambia de negativo a positivo, el punto hallado es un mínimo.

4.- Examinar la solución

Al resolver el problema mediante análisis gráfico de la función y luego por aplicación de la derivada, los estudiantes podrán observar al comparar los resultados que ambos son válidos, siendo el segundo más exacto. De esta forma, encontrarán sentido a los nuevos conocimientos estudiados y podrán contar con las herramientas para aplicarlos en situaciones similares. (García, 2003)

Utilizando el primer método se hace imprescindible recurrir al uso de la tecnología, en particular con algún software que permita representar gráficamente la función, cambiar las escalas para realizar una estimación de la solución.

## CONCLUSIONES

Se propone en esta situación didáctica, elaborada sobre la base de la resolución de problemas, que el alumno interactúe entre registros de representación y comprenda el objeto de enseñanza aplicado a una situación concreta. De esta forma, se brindan las herramientas para que el estudiante resignifique y contextualice el conocimiento.

La propuesta revaloriza la situación problemática como objeto de estudio, en este caso, analizando y avanzando en distintas etapas a efectos de simplificar la actividad. Consideramos que el alumno, al mismo tiempo que internaliza los conceptos matemáticos, adquiere habilidades como ordenación de datos, razonamiento lógico, capacidad de síntesis y representación esquemática de situaciones reales. La enseñanza basada en la técnica de resolución de problemas despierta en el estudiante el interés por conocer las herramientas necesarias para resolverlos y los orienta a generalizar en situaciones más complejas (Parra, Saiz, 1994).

**REFERENCIAS**


- Azcárate, C.; Deulofeu, J. (1990). *Funciones y Gráficas.* Editorial Sintesis. Madrid España.
- Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- Duval, R. (1999). *"Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales"*. Traducción al español por Myriam Vega. Colombia)
- Flores Rodríguez, R. 2010. *Problemario con aplicaciones Matemáticas*. Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología. Instituto Politécnico Nacional. México.
- García, J. (2003). *Didácticas de las Ciencias, resolución de problemas y desarrollo de la creatividad.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio. Colombia.
- Parra, C. & Saiz, I. (1994). *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones.* Editorial Paidós Educador. Buenos Aires. Argentina.
- Polya, G. (1997). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. México.
- Santalo, L; Brousseau G & Saiz, I. (1994). "*Didáctica de Matemáticas aportes y reflexiones*". Paidós Educador. Buenos Aires. Argentina.