CB 13

UN MÉTODO GEOMÉTRICO PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES UTILIZANDO LAS TIC

Araceli Hernández*, Marina Lattanzi & Néstor Thome†**

***Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa.**
Calle 110 Nº 390, General Pico, La Pampa.
****Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa.**
Av. Uruguay 151, Santa Rosa, La Pampa.
†Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València.
Camino de Vera s/n, València, España.
aracelih@ing.unlpam.edu.ar

Palabras clave: sistema de ecuaciones lineales, rectas en el plano, solución aproximada, TIC.

RESUMEN
En este trabajo se propone un problema proveniente de situaciones de la vida real que los estudiantes pueden resolver utilizando las TIC. Se presenta un algoritmo para resolver, en forma aproximada, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este algoritmo está basado en el método de Kaczmarz, el cual proporciona una solución aproximada de un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado.

INTRODUCCIÓN
El desarrollo de la tecnología en el campo de la informática a mediados del siglo pasado y la aparición de computadoras cada vez más potentes han influido notablemente en la investigación en diferentes áreas. Además, desde que las nuevas tecnologías forman parte de nuestra vida cotidiana, las metodologías docentes han comenzado a cambiar de manera paulatina. El uso de las TIC se ha tornado necesario en el aprendizaje de los estudiantes tanto de nivel universitario como de los demás niveles educativos, no sólo para la búsqueda de información sino también para la realización de trabajos.
Con la intención de utilizar este recurso para impartir las clases de manera más amena, el profesor tiene la posibilidad de elaborar material para que el estudiante lo utilice como objeto de aprendizaje.
Para la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en el nivel medio se estudian generalmente el método de sustitución y el método de igualación, entre otros. En el nivel universitario por lo general los sistemas lineales se resuelven mediante el método de eliminación de Gauss, la factorización *LU*, etc. (Meyer, 2000).
En este trabajo se muestra un método para resolver un sistema de ecuaciones lineales desde un punto de vista geométrico. Como es un método iterativo, de manera natural aparecerán los conceptos de límite, convergencia, error, solución aproximada, así como aspectos geométricos relativos a la gráfica de rectas, proyecciones, etc. No se desarrollan formalmente todos estos conceptos, pero es posible hablar de ellos de manera intuitiva para familiarizar a los estudiantes con temas que posiblemente encontrarán en sus estudios futuros. Si bien no se

trata de realizar un desarrollo teórico con las demostraciones pertinentes en su forma más general, las ideas intuitivas con que se tratará el tema seguramente resultarán formativas tanto para estudiantes de nivel medio como para estudiantes de nivel superior.
En el nivel medio, se pueden mencionar los resultados que avalan o garantizan la validez del procedimiento, sin necesidad de demostrar formalmente los mismos. En el nivel superior, por ejemplo si el tema se aborda en alguna asignatura relacionada al Álgebra Lineal (Burgos, 2006) o al Álgebra Lineal Numérica (Noble y Daniel 1989), el método se puede desarrollar completamente introduciendo cada ecuación como un hiperplano y su solución como la intersección de los mismos, analizando además la demostración de la convergencia del método (Meyer, 2000).
Con el propósito de motivar a los estudiantes, primero se plantea un problema de tráfico vehicular en un sector céntrico de una ciudad que en horas pico suele presentar congestión de tránsito. Este problema se puede representar a través de un sistema de ecuaciones lineales. Para resolverlo se propone un método iterativo basado en una representación geométrica, muy intuitivo en el caso de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuya convergencia está demostrada para sistemas compatibles determinados de cualquier tamaño.

PLANTEO DEL PROBLEMA

La Figura 1 representa un plano de un sector céntrico de una ciudad. Hay estadísticas realizadas que permiten conocer el número promedio de vehículos que circulan por hora en ciertos tramos de algunas calles. Estos valores se muestran en el plano y las flechas representan la única dirección de circulación permitida en cada calle. Como en los puntos de cruce no hay semáforos y los autos no pueden estacionar en las calles que figuran en el plano, existe un continuo flujo de tráfico a través de todo el sistema.

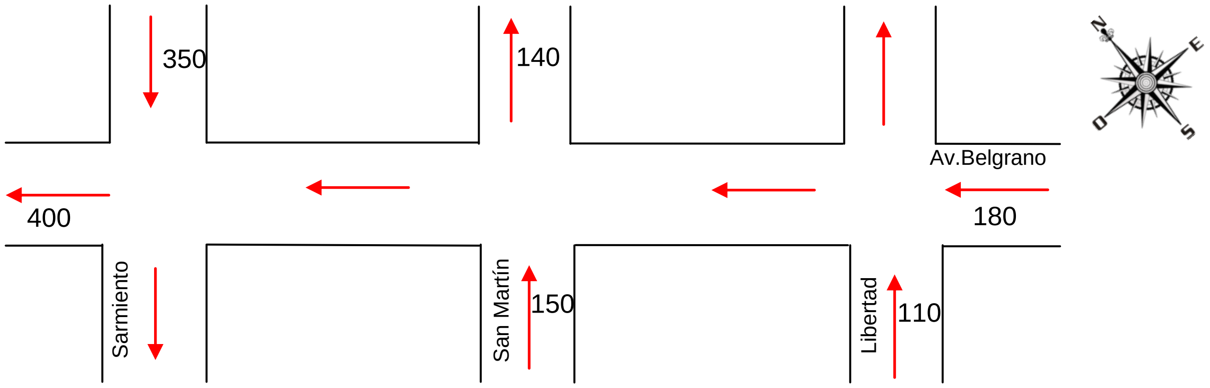

Figura 1

El municipio de esta ciudad necesita reparar los desagües ubicados sobre la calle San Martín, razón por la cual cortará el tránsito sobre dicha arteria en las cuadras adyacentes a la Av. Belgrano. El municipio no quiere cortar el tránsito en la Av. Belgrano, pero no podrá usarse la calle San Martín para ingresar a la avenida ni para salir de ella. Además, por razones de infraestructura, sería conveniente que el número de autos por hora (en promedio) que circula por el tramo de la Calle Libertad desde la Av. Belgrano hacia el noreste coincida con el número de autos por hora que circula por el tramo de la Calle Sarmiento desde la Av. Belgrano hacia el sudoeste.

Teniendo en cuenta esta situación, ¿cuál es la cantidad de autos que deberían circular por cada tramo de calle para que el flujo de tráfico sea continuo en este sector de la ciudad, es decir, para que no se produzca congestionamiento en el tránsito?

Por otra parte, a dos cuadras de la Av. Belgrano hacia el noreste hay una escuela cuyos estudiantes provienen, en la gran mayoría, de un barrio ubicado en el sur de la ciudad. Por este motivo, en los horarios correspondientes a entrada y salida de estudiantes de la escuela, denominados "horas pico" para el tránsito vehicular, se duplica la cantidad de autos por hora que circulan por el sector del plano ubicado al sudeste de la calle Libertad, incluida la misma. ¿Cuál es la cantidad de autos que deberían circular en las "horas pico" por cada tramo de calle para que el flujo de tráfico sea continuo en este sector de la ciudad, es decir, para que no se produzca congestionamiento en el tránsito?

Para responder a la primera pregunta, se puede considerar el esquema que se muestra en la Figura 2, donde el corte de la calle San Martín está representado por líneas punteadas. Con x e y se representa el número de autos por hora (en promedio) que circula en cada tramo considerado, bajo los requerimientos planteados.

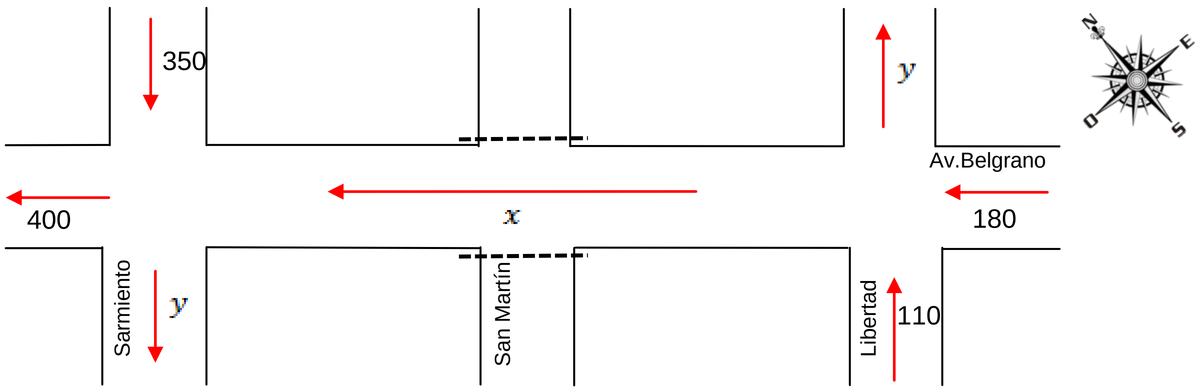

Figura 2

Para mantener el flujo normal de tráfico, es necesario que el número de autos por hora que entra a una intersección de calles sea igual al que sale de ella. Teniendo esto en cuenta, dado que existen dos intersecciones en el sector considerado, es claro que

$$\begin{cases} 350 + x = y + 400 \\ 180 + 110 = x + y \end{cases}$$

La solución de este sistema de ecuaciones da respuesta a la primera situación planteada.
Para poder responder a la segunda pregunta formulada, algunos datos del esquema de la Figura 2 deben ser modificados como se muestra en Figura 3.

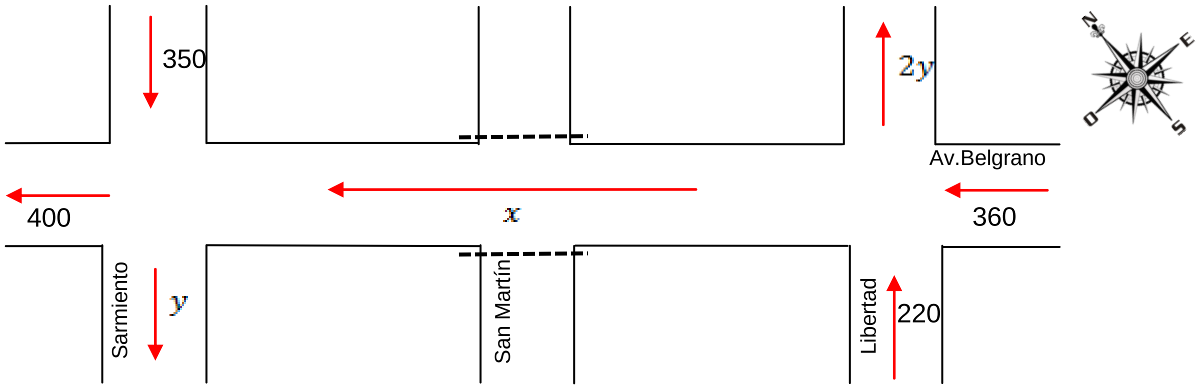

Figura 3

En este caso se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} 350 + x = y + 400 \\ 360 + 220 = x + 2y \end{cases}$$

Es probable que los estudiantes se sientan más motivados para trabajar cuando se plantean problemas que provienen de situaciones de la vida real (Possani, Trigueros, Preciado y Lozano, 2010) y que puedan resolver utilizando las TIC.

En el nivel medio, generalmente, para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, el primer método con el que se trabaja es el gráfico. Esto permite utilizar algún tipo de software para representar gráficamente las rectas que intervienen en el sistema y resolverlo. Luego, es posible explicar intuitivamente el fundamento del método iterativo que se propone, el cual los estudiantes podrán implementar con sus netbooks en el aula para resolver el sistema de forma aproximada.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

El método que se va a utilizar para resolver el sistema de ecuaciones planteado se conoce con el nombre de Método de las Proyecciones o Método de Kaczmarz y tiene muchas aplicaciones en el procesamiento y reconstrucción de imágenes, tomografía computada, etc. Aunque probablemente la idea subyacente de este método ha sido concebida por varias personas, se atribuyó a Stefan Kaczmarz (1895-1939), quien publicó sus resultados en 1937. Kaczmarz formaba parte de un grupo de jóvenes matemáticos polacos brillantes que prosperó a principios del siglo XX.

Se trata de un método iterativo que resuelve sistemas de ecuaciones lineales realizando proyecciones ortogonales sobre los hiperplanos que definen las ecuaciones del sistema. Más precisamente, sea $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas compatible determinado. Cada una de las ecuaciones define un hiperplano. El método consiste en partir desde un punto arbitrario $\boldsymbol{p_0}$ en $\mathbb{R}^n$ y proyectarlo sobre el primero de los hiperplanos obteniendo el punto $\boldsymbol{p_1}$, luego proyectar $\boldsymbol{p_1}$ sobre el segundo hiperplano obteniendo $\boldsymbol{p_2}$, y así sucesivamente. Cuando se ha proyectado sobre el último hiperplano se vuelve a proyectar nuevamente sobre el primero de ellos y se continúa el proceso.

En un sistema *2×2* es muy fácil entender y visualizar el procedimiento. La solución de un sistema no singular de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, o más específicamente

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

es la intersección de los dos hiperplanos (rectas en este caso) $H_1 = \{(x,y)\colon\ ax + by = c\}$ y $H_2 = \{(x,y)\colon\ dx + ey = f\}$. Es visualmente evidente que partiendo de un punto $\boldsymbol{p_0}$ arbitrario y proyectando ortogonal y alternadamente sobre H_1 y H_2 como se muestra en la Figura 4, la sucesión de proyecciones $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3}, \boldsymbol{p_4}, \dots$ converge a $H_1 \cap H_2$, la solución de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

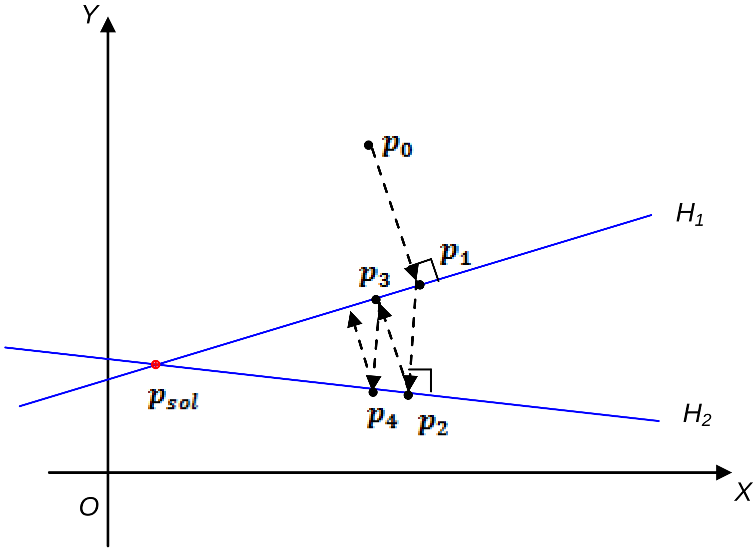

Figura 4

Como este trabajo se basa en el método de Kaczmarz para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \tag{1}$$

donde a, b, c, d, e y f son coeficientes reales y x e y las incógnitas, la clave es conocer la proyección ortogonal de un vector dado sobre un hiperplano. Para facilitar la notación se trabajará en $\mathbb{R}^2$ usando notación vectorial.
Como es habitual, los vectores son vectores columna (es decir matrices 2×1) y si A es una matriz, con A^t se indica la traspuesta de A.

Se considera el hiperplano $H = \{(x,y)\colon\ rx + sy = q\}$, donde r, s y q son constantes reales, $\boldsymbol{n} = (r,s)^t$ y $\boldsymbol{p_0}$ un punto del plano. La proyección ortogonal de $\boldsymbol{p_0}$ sobre H es el vector:

$$\boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{p_0} - \frac{(\boldsymbol{n}^t\boldsymbol{p_0} - q)}{\boldsymbol{n}^t\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{n}. \tag{2}$$

En efecto, H tiene dimensión 1 por ser un hiperplano en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto r y s no son simultáneamente nulos. Se sabe que $\boldsymbol{n}$ es un vector ortogonal al subespacio $\{(x,y)\colon rx + sy = 0\}$ paralelo al hiperplano H.
Como lo muestra la Figura 5, para hallar la proyección $\boldsymbol{p_1}$ del vector $\boldsymbol{p_0}$ sobre H, es necesario encontrar el vector $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_0}$ paralelo a $\boldsymbol{n}$, es decir, se debe encontrar el escalar real z tal que

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_0} = z\,\boldsymbol{n}.$$

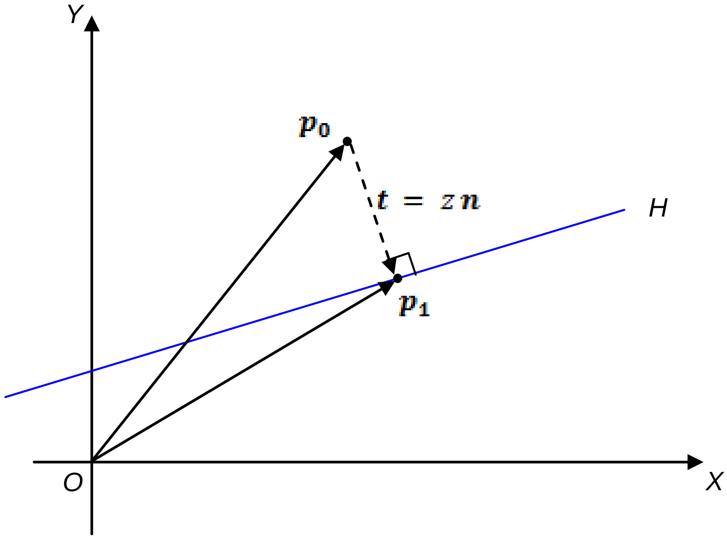

Figura 5

Sumando miembro a miembro $\boldsymbol{p_0}$ en la última igualdad y premultiplicando luego por el vector $\boldsymbol{n^t}$ se tiene que

$$\boldsymbol{n^t p_1} = \boldsymbol{n^t p_0} + z\boldsymbol{n^t n}.$$

Como $\boldsymbol{p_1}$ es un elemento de *H*, resulta que $\boldsymbol{n^t p_1} = q$. Luego,

$$z\,\boldsymbol{n^t n} = \boldsymbol{n^t p1} - \boldsymbol{n^t p_0} = q - \boldsymbol{n^t p_0}\ .$$

Dado que $\boldsymbol{n^t n}$ es un escalar no nulo se obtiene

$$z = \frac{q - \boldsymbol{n^t p_0}}{\boldsymbol{n^t n}}\ .$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{p_0} - \frac{\boldsymbol{n^t p_0} - q}{\boldsymbol{n^t n}}\ \boldsymbol{n}.$$

En el nivel medio es posible que los alumnos no estén familiarizados con el concepto de vector. En este caso se puede reescribir la expresión **(2)** para calcular la proyección ortogonal de un punto sobre una recta de la siguiente manera:

> *Consideremos la recta* $L = \{(x, y): rx + sy = q\}$, *donde* r, s *y* q *son constantes reales,* r *y* s *no simultáneamente nulos,* $\boldsymbol{p_0} = (x_0; y_0)$ *un punto del plano y* $k = \frac{rx_0 + sy_0 - q}{r^2 + s^2}$. *La proyección ortogonal de* $\boldsymbol{p_0}$ *sobre L es el punto:*

$$\boldsymbol{p_1} = (x_1; y_1) = (x_0; y_0) - k(r; s).$$

Con la intención de eliminar en la expresión **(2)** el factor $\boldsymbol{n^t n}$, que es el cuadrado del módulo del vector $\boldsymbol{n}$, se pueden considerar ecuaciones que definan los mismos hiperplanos utilizando vectores unitarios. Es decir se trabajará con ecuaciones equivalentes en las cuales los vectores normales a los hiperplanos que ellas definen tienen norma 1. Sean $\boldsymbol{F_1^t} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ y $\boldsymbol{F_2^t} = \left(\frac{d}{\sqrt{d^2+e^2}}, \frac{e}{\sqrt{d^2+e^2}}\right)$, de esta manera el sistema **(1)** es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F_1^t}\ \boldsymbol{p} = c' \\ \boldsymbol{F_2^t}\ \boldsymbol{p} = f' \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

donde $\boldsymbol{p^t} = (x, y)$, $c' = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y $f' = \frac{f}{\sqrt{d^2+e^2}}$.

Si bien el método de Kaczmarz brinda una solución aproximada del sistema si el mismo es compatible determinado, en este trabajo se va a proporcionar un algoritmo para resolver el sistema **(3)** cualquiera sea la situación, es decir tanto en el caso compatible (determinado o no) como incompatible.

Sean $\boldsymbol{H_1}$ y $\boldsymbol{H_2}$ los hiperplanos determinados por la primera y segunda ecuación de **(3)**, respectivamente.
Los hiperplanos $\boldsymbol{H_1}$ y $\boldsymbol{H_2}$ son coincidentes si y sólo si existe una constante real z no nula tal que $\boldsymbol{F_2} = z\boldsymbol{F_1}$ y $f' = zc'$.
Las siguientes condiciones son equivalentes:
(a) existe una constante real z no nula tal que $\boldsymbol{F_2} = z\boldsymbol{F_1}$ y $f' = zc'$,
(b) $\boldsymbol{F_2^t F_1} \neq 0$, $\boldsymbol{F_2} = (\boldsymbol{F_2^t F_1})\boldsymbol{F_1}$ y $f' = (\boldsymbol{F_2^t F_1})c'$.

Es claro que $\boldsymbol{H_1}$ y $\boldsymbol{H_2}$ son paralelos y distintos si y sólo si existe una constante real z no nula tal que $\boldsymbol{F_2} = z\boldsymbol{F_1}$ y $f' \neq zc'$. En este caso, el sistema **(3)** es incompatible.

Para comenzar a resolver **(3)** se parte de un vector inicial $\boldsymbol{p_0}$ arbitrario y se lo proyecta sobre $\boldsymbol{H_1}$ obteniéndose $\boldsymbol{p_1}$. Luego, se proyecta $\boldsymbol{p_1}$ sobre $\boldsymbol{H_2}$ para obtener $\boldsymbol{p_2}$, y éste se proyecta sobre $\boldsymbol{H_1}$ para encontrar $\boldsymbol{p_3}$. Esto es,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p_1} &= \boldsymbol{p_0} - (\boldsymbol{F_1^t}\ \boldsymbol{p_0} - c')\ \boldsymbol{F_1}, \\ \boldsymbol{p_2} &= \boldsymbol{p_1} - (\boldsymbol{F_2^t p_1} - f')\boldsymbol{F_2}, \\ \boldsymbol{p_3} &= \boldsymbol{p_2} - (\boldsymbol{F_1^t}\ \boldsymbol{p_2} - c')\ \boldsymbol{F_1}. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes (ver Figura 6):
(a) existe una constante real z no nula tal que $\boldsymbol{F_2} = z\boldsymbol{F_1}$ y $f' \neq zc'$,
(b) $\boldsymbol{p_1} \neq \boldsymbol{p_2}$ y $\boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{p_3}$.

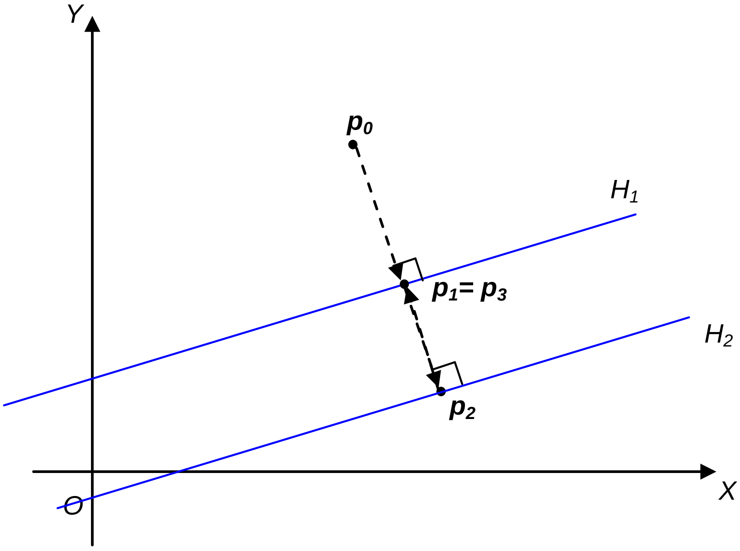

Figura 6

Así, si $\boldsymbol{p_1} \neq \boldsymbol{p_2}$ y $\boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{p_3}$ el proceso finaliza y el sistema es incompatible. Caso contrario, se aplica el método de Kaczmarz para encontrar una solución aproximada del sistema, es decir, se continúa proyectando alternadamente sobre ambos hiperplanos de manera reiterada. Se tiene así la sucesión de puntos del plano:

$$\boldsymbol{p_i} = \begin{cases} \boldsymbol{p_{i-1}} - (\boldsymbol{F_1^t p_{i-1}} - c')\boldsymbol{F_1} & si\ i\ es\ impar \\ \boldsymbol{p_{i-1}} - (\boldsymbol{F_2^t\, p_{i-1}} - f')\boldsymbol{F_2} & si\ i\ es\ par \end{cases}$$

donde $i \geq 4$, que converge a la solución $\mathbf{p_{sol}}$ del sistema lineal planteado (ver (Meyer, 2000)).

Este método es relativamente sencillo de implementar en los lenguajes de programación. Un posible pseudocódigo del algoritmo a utilizar para resolver el sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{F_1^t\ p} = c' \\ \boldsymbol{F_2^t\ p} = f' \end{cases}$$

donde $\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}$ son vectores unitarios, $\boldsymbol{p^t} = (x, y)$, y c', f' son contantes reales, es el siguiente:

Entradas: Punto inicial: $\boldsymbol{p_0}$,
Vectores: $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$,
Constantes: c' y f',
Constante positiva: e (cota de error permitido)
Número máximo de iteraciones permitidas: m
Si $\boldsymbol{F_2^t F_1} \neq 0$, $\boldsymbol{F_2} = (\boldsymbol{F_2^t F_1})\boldsymbol{F_1}$ y $f' = (\boldsymbol{F_2^t F_1})c'$,
Salida "El sistema es compatible indeterminado"
Sino,
Calcular: $\boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{p_0} - (\boldsymbol{F_1^t\ p_0} - c')\ \boldsymbol{F_1}$
$\boldsymbol{p_2} = \boldsymbol{p_1} - (\boldsymbol{F_2^t\ p_1} - f')\ \boldsymbol{F_2}$
$\boldsymbol{p_3} = \boldsymbol{p_2} - (\boldsymbol{F_1^t\ p_2} - c')\ \boldsymbol{F_1}$
Si $\boldsymbol{p_1} \neq \boldsymbol{p_2}$ y $\boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{p_3}$

Salida "el sistema es incompatible".

Sino,

$\boldsymbol{proy_1} = \boldsymbol{p_3}$

$\boldsymbol{proy_2} = \boldsymbol{p_2}$

$itera = 0$

$error =$ norma de $(\boldsymbol{proy_1} - \boldsymbol{proy_2})$

Mientras $itera \leq m$ y $error > e$ hacer

$\boldsymbol{proy_2} = \boldsymbol{proy_1} - (\boldsymbol{F_2^t}\, \boldsymbol{proy_1} - f')\, \boldsymbol{F_2}$

$\boldsymbol{proy_1} = \boldsymbol{proy_2} - (\boldsymbol{F_1^t}\, \boldsymbol{proy_2} - c')\, \boldsymbol{F_1}$

$itera = itera + 1$

$error =$ norma de $(\boldsymbol{proy_1} - \boldsymbol{proy_2})$

Fin del mientras

Si $error \leq e$ entonces

Salida: "La solución aproximada es $\boldsymbol{proy_1}$"

Sino,

Salida "Se llegó al máximo de iteraciones y el error es '$error$'"

SOLUCIÓN AL PROBLEMA

En esta sección se va a utilizar el método descripto anteriormente para resolver el problema planteado.

Para responder a la primera pregunta del problema se debe resolver el sistema

$$\begin{cases} 350 + x = y + 400 \\ 180 + 110 = x + y \end{cases}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 25\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 145\sqrt{2} \end{cases}$$

Estas ecuaciones definen los hiperplanos

$$H_1 = \left\{(x,y):\ \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 25\sqrt{2}\right\} \text{ y } \quad H_2 = \{(x,y):\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 145\sqrt{2}\},$$

de donde, $\boldsymbol{F_1^t} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\boldsymbol{F_2^t} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Primero se debe determinar si el sistema es compatible indeterminado. Realizando los cálculos se obtiene que $\boldsymbol{F_2^t F_1} = 0$, es decir, las rectas no son coincidentes.

Sea $\boldsymbol{p_0} = (200{,}200)^t$; se procede a calcular las proyecciones $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$ y $\boldsymbol{p_3}$:

$$\boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{p_0} - \left(\boldsymbol{F_1^t}\, \boldsymbol{p_0} - 25\sqrt{2}\right)\boldsymbol{F_1} = (225{,}175)^t,$$
$$\boldsymbol{p_2} = \boldsymbol{p_1} - \left(\boldsymbol{F_2^t} \boldsymbol{p_1} - 145\sqrt{2}\right)\boldsymbol{F_2} = (170,\ 120)^t,$$
$$\boldsymbol{p_3} = \boldsymbol{p_2} - \left(\boldsymbol{F_1^t}\, \boldsymbol{p_2} - 25\sqrt{2}\right)\boldsymbol{F_1} = (170{,}120)^t,$$

Como $\boldsymbol{p_1} \neq \boldsymbol{p_2}$ y $\boldsymbol{p_1} \neq \boldsymbol{p_3}$ entonces el sistema no es incompatible. Además, la diferencia entre $\boldsymbol{p_2}$ y $\boldsymbol{p_3}$ es cero, es decir la solución al sistema es $x = 170$ e $y = 120$.

Por lo tanto, para que no se produzca congestionamiento en el tránsito bajo las circunstancias planteadas en la primera parte del problema, deberían circular 170 vehículos por hora en Av. Belgrano, desde Libertad hasta Sarmiento; mientras que por la calle Sarmiento, desde la Av. Belgrano hacia el sudoeste, deberían circular 120 vehículos por hora, al igual que por la calle Libertad desde la Av. Belgrano hacia el noreste.
Para responder la segunda pregunta planteada hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} 350 + x = y + 400 \\ 360 + 220 = x + 2y \end{cases}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y = 25\sqrt{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}x + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y = 116\sqrt{5} \end{cases}$$

En este caso, $\boldsymbol{F_1^t} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\boldsymbol{F_2^t} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Dado que $\boldsymbol{F_2^t}\boldsymbol{F_1} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \neq 0$ pero $\boldsymbol{F_2} \neq -\frac{1}{\sqrt{10}}\boldsymbol{F_1}$, el sistema no es compatible indeterminado.
Considerando $\boldsymbol{p_0} = (240{,}180)^t$ se calculan las proyecciones $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$ y $\boldsymbol{p_3}$:

n	***0***	***1***	***2***	***3***
x	240	235	236	236,5
y	180	185	187	186,50

Tabla 1

Dado que $\boldsymbol{p_1} \neq \boldsymbol{p_2}$ y $\boldsymbol{p_1} \neq \boldsymbol{p_3}$, el sistema no es incompatible. Por lo tanto se aplica el método de Kaczmarz para encontrar una solución aproximada, obteniendo los datos que se muestran en la Tabla 2.

n	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
x	240	235	236	236, 5	230,6	227,65	227,06
y	180	185	187	186, 50	174,7	177,65	176,47

n	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***
x	226,76	226,70	226,67	226,66	226,66
y	176,77	176,65	176,68	176,66	176,66

Tabla 2

Luego de algunas iteraciones se observa que el valor absoluto de la diferencia entre dos valores consecutivos de *x* y de *y* es cero. En este caso, la solución es $x = 226{,}66$ e $y = 176{,}66$.

Estos valores indican que para que el flujo de tráfico vehicular en las “horas pico” sea continuo en el sector de la ciudad considerado, deberían circular, por hora, 226 vehículos por Av. Belgrano, desde Libertad hasta Sarmiento, 176 vehículos por la calle Sarmiento, desde la Av. Belgrano hacia el sudoeste; y 354 vehículos por la calle Libertad desde la Av. Belgrano hacia el noreste.

REFERENCIAS

- Burgos, J. 2006. *Álgebra Lineal*. (McGrawHill. Madrid).
- Meyer, C. D. 2000. *Matrix analysis and applied linear algebra*. (SIAM. Filadelfia).
- Noble, B. & Daniel, J. W. 1989. Álgebra Lineal Aplicada. (Prentice-Hall Hispanoamericana. México).
- Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G. & Lozano, M.D. 2010. Use of models in the teaching of linear algebra, Linear Algebra and its Applications, Special issue devoted to the 15th ILAS Conference at Cancún, México, junio 16-20, 2008, 2125-2140.