

**CB 07****DE LO NUMÉRICO A LO ALGEBRAICO A TRAVÉS DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS -UNA EXPERIENCIA DE TRABAJO COLABORATIVO.****Patricia Detzel, Rosa Martínez, Analía Petich & Ethel Barrio****UNComahue FaEA, FACE  
Buenos Aires 1400 Nqn.***pdetzel@gmail.com, rosifmartinez@gmail.com, apetich@gmail.com, ethel.barrio@gmail.com***Palabras Clave:** práctica docente, reflexión, trabajo colaborativo, entorno algebraico, números negativos.**RESUMEN**

Nos propusimos adaptar –en forma colaborativa profesores e investigadores– una propuesta de enseñanza en relación a la introducción de los números negativos en un entorno algebraico, para ser puesta en aula con alumnos de primer año de la escuela secundaria. Los insumos de investigaciones requieren innovaciones en las propias prácticas de enseñanza y para su apropiación, es importante un proceso-acompañamiento que abra el juego a la explicitación de las ideas y de las acciones y así se puedan constituir en herramientas de análisis. En este trabajo mostraremos un proceso de reformulación de actividades para implementarlas en el aula.

**INTRODUCCIÓN**

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación que pretende -entre investigadores y profesores de escuelas medias - acercar la Didáctica de la Matemática a las prácticas del aula creando un ambiente de estudio y producción de conocimiento matemático-didáctico. Autores como Bednarz (1999), Desgagné (2001) y Anadón (2001, 2008), destacan la importancia de incorporar a los docentes de las escuelas medias a los grupos de estudio para realizar investigaciones “con” ellos más que “sobre” ellos.

A partir de las demandas de un grupo de docentes de matemática de una escuela secundaria, surge de común acuerdo el estudio de la enseñanza de los números negativos. Investigadores y profesores aceptamos el desafío y compartimos la responsabilidad de involucrarnos en un proceso de investigación acerca de esta problemática. En este contexto, nos propusimos adaptar –en forma colaborativa profesores e investigadores– una propuesta de enseñanza en relación a la introducción de los números negativos en un entorno algebraico, para ser puesta en aula con alumnos de primer año de una escuela secundaria.

Los insumos de investigaciones requieren innovaciones en las propias prácticas de enseñanza y para su apropiación, es importante un proceso-acompañamiento que abra el juego a la explicitación de las ideas y de las acciones y así se puedan constituir en herramientas análisis. En este trabajo mostraremos parte de este proceso.

## LA ELECCIÓN DE LA PROPUESTA

Se optó por estudiar la propuesta de Cid, E. & Ruiz Munzón (2011), para introducir los números negativos en un contexto algebraico. Las actividades de estudio e investigación que presenta están divididas en sesiones y han sido adaptadas en forma colaborativa, entre docentes e investigadores, para ser implementadas en un primer año del Colegio de Educación Media N°15, de la ciudad de Cipolletti, provincia de Río Negro.

Generalmente, el proceso de enseñanza de los números negativos, en la escuela media, consiste en introducir los números enteros en un entorno aritmético, en el que se apela a la *analogía* con modelos concretos como deudas-haberes, pérdidas-ganancias, situaciones de temperaturas sobre cero-bajo cero, entre otros. Las actividades que se proponen pueden ser resueltas usando números positivos; por ello, los números negativos no aparecen como un conocimiento necesario, lo que no favorece la construcción del sentido de estos números.

Distintos autores ponen de manifiesto las limitaciones y los inconvenientes del uso de tal analogía como herramienta didáctica para darle sentido a los números negativos. Por ejemplo, el modelo de las deudas y haberes permitiría deducir que  $(-7)$  es mayor que  $(-2)$  porque “una deuda de 7 pesos es mayor a una deuda de 2 pesos”, o el de las temperaturas el que permitiría deducir que  $(-7) - (-2) = +5$  “porque la diferencia entre ambas es de 5 grados”.

En los fundamentos de la propuesta seleccionada, los autores, apoyados en estudios epistemológicos de los números negativos, dan luz a diferentes cuestiones relacionadas con su enseñanza y justifican la introducción simultánea de los números negativos y del álgebra escolar como instrumento de *modelización algebraica* (Chevallard, 1989; Gascón, 1993-94; Bolea 2003).

La propuesta exige entonces un trabajo algebraico funcional desde su inicio que, en ocasiones, entra en tensión con ideas arraigadas y concepciones de los negativos, dificultando trascender lo numérico.

A continuación compartiremos algunas cuestiones que nos parece importante destacar, ya que corresponden a algunos puntos claves que debimos asumir como grupo de estudio y poner en tensión con nuestras propias concepciones:

- *Los significados de los signos “+” y “-”*

En esta propuesta, *los significados de los signos “+” y “-”*, se trabajan en forma sucesiva y minuciosa al operar en principio como sumandos y sustraendos -en lugar de números- para luego aceptarlos como tales. Es decir, ante la expresión  $m - 8 - 2$  tenemos que entender que a  $m$  se le tiene que “restar 8” y luego “restar 2”, lo que es equivalente a “restar 10”. Esto permite iniciar un trabajo algebraico cuando aún no se dispone de las reglas de los signos. En general, para resolver dicha expresión se recurre a que  $(-8) + (-2) = -10$ .

- *La presentación de las notaciones*

En esta propuesta se comienza con notaciones incompletas, por ejemplo,  $-4 - 2$  y luego se termina presentando las notaciones completas, por ejemplo,  $(-4) + (-2)$ , es decir notaciones en las que los signos “+” que indican operación binaria aparecen escritos. En general, se hace el recorrido inverso que va de la notación completa a la incompleta.

- *La modelización algebraica*

Las tareas presentadas en la propuesta requieren de un *cálculo algebraico funcional*, es decir, un cálculo que exige reflexión y toma de decisiones para poner en evidencia las propiedades del sistema modelizado. Las relaciones que existen entre los diferentes componentes del sistema dan lugar a expresiones algebraicas en las que intervienen letras, que pueden jugar un papel de incógnitas, parámetros o variables. Esta idea será retomada más adelante.

- *Los programas de cálculo como objeto de estudio*

Esta propuesta exige detenerse en el estudio de las equivalencias de las diferentes expresiones algebraicas. El encadenamiento de las operaciones deriva en un trabajo descontextualizado propio del trabajo algebraico. La tarea de simplificación de expresiones algebraicas tiene su razón de ser en la economía y justificación del cálculo algebraico, no se presenta como técnica algorítmica.

## **DESARROLLO DEL TRABAJO**

Durante los años 2013 y 2014 docentes investigadores, docentes de nivel medio y estudiantes del profesorado de matemática, conformamos un equipo de trabajo colaborativo para (re)pensar ajustes a la propuesta con el fin de llevar a cabo su implementación. En el marco de este proyecto nos interesó estudiar las condiciones bajo las cuales esta propuesta –producto de una investigación– se puede convertir en un insumo para la práctica docente.

Planificamos para la puesta en aula y decidimos realizar una observación participante de las clases a cargo de dos personas, de modo tal que alguna de ellas sostuviera su presencia para garantizar la continuidad entre las clases. En forma simultánea, trabajamos en un espacio de acompañamiento semanal con el docente a cargo de poner en marcha la propuesta.

Pensamos estos encuentros como una oportunidad de adentrarnos como grupo en la comprensión y definición de tareas a analizar, las discusiones colectivas y la generación de acciones que fueran animando y acompañando la transformación de las ideas en acciones y las acciones en ideas, en un proceso de adaptabilidad. La producción e intercambios de estos encuentros y de las clases se registraron de modo minucioso y sistemático, documentando los momentos de trabajo a través de registros escritos y de grabaciones.

En este proceso, de análisis de las actividades de la propuesta original, de análisis de lo decidido para llevar al aula y de análisis de lo que efectivamente pasó en la clase, se generó una dinámica de reflexión, dando lugar a una reapropiación personal de esas situaciones, a propósitos de interpretaciones que se hicieron y experiencias que se compartieron. En este sentido, se intenta la elaboración de un repertorio común y compartido que, por un lado, incluya las diferentes miradas y los conocimientos que ponen en juego docentes e investigadores y, por otro lado, supere la tensión con las concepciones propias y de los otros, y, a la vez, permita desnaturalizar las ideas que subyacen en ellas para entrar en diálogo con las ideas que subyacen a la propuesta.

Este proceso de construcción es sumamente complejo dado que el objeto de enseñanza supone una presentación y un abordaje simultáneo de dos objetos matemáticos: los números negativos y el álgebra escolar. Para esta propuesta, una puerta “genuina” de entrada al álgebra está conformada por los números negativos. Sin embargo, a la hora de la puesta en obra y probablemente por las razones expuestas en los párrafos precedentes, resultaba difícil la comprensión de la significatividad de las escrituras algebraicas como soluciones de las primeras tareas, prevaleciendo así lo numérico por sobre lo algebraico.

A continuación nos detendremos en esta cuestión, a partir de mostrar distintos episodios en relación a discusiones de la tarea 1, correspondiente a una de las actividades de la propuesta.

## **¿CÓMO PASAR DE UN TRABAJO NUMÉRICO A UN TRABAJO ALGEBRAICO?**

En el grupo de estudio (docentes  $D_i$ , investigadores C) discutíamos el alcance de la Tarea 1 focalizándonos en el uso de la letra para expresar regularidades.

Tarea 1. Laura se llevó sus figuritas al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 figuritas y en la segunda ganó 7. ¿Cuántas figuritas le quedaron después de jugar?

A continuación se muestra un fragmento de la discusión entre diferentes integrantes del equipo acerca de las respuestas esperadas por los alumnos:

*D<sub>1</sub>: En la tarea 1 no necesariamente vamos a exigir que el alumno escriba la expresión. Con que lo deje expresado en forma coloquial alcanza ¿no? Además es bueno dejar que cada alumno elija una cantidad inicial distinta y después analizar... vos elegiste 10 y llegaste a 8, otro eligió 30 y le quedaron 28 y así [...] hacerles ver [a los alumnos] que en todos los casos independientemente de la cantidad elegida siempre tienen dos menos que al principio, que es lo que queremos destacar en este trabajo algebraico...*

*C1: Claro...*

*[registro grabado E4 – 00:02:42 03-04-2013]*

Como se puede observar en el diálogo, nos centramos más en que los alumnos puedan hallar la regularidad entre la cantidad inicial y la cantidad final. Después de las primeras clases y haciendo un balance de los logros de los alumnos, avanzamos sobre algunos hallazgos, le dimos mucho peso al rol de la letra como variable y no nos detuvimos en un trabajo con la equivalencia de las expresiones que, en términos de la propuesta, sería el programa de cálculo. En este caso, la idea que “dos menos que al principio”, “dos menos que antes”, “ $X - 9 + 7$ ” y “ $X - 2$ ” son maneras de decir lo mismo; esto quedó desdibujado en las clases.

En el grupo se trae a discusión cómo generar un trabajo de modelización algebraica. Se hizo evidente la necesidad de convocar nuevamente a los alumnos en un trabajo que involucre el estudio de equivalencias de expresiones algebraicas, que propicien hacer públicas las producciones de los alumnos, en instancias individuales y grupales. Esto nos llevó a procesos de reflexión acerca de las consignas. Para mostrar parte de este proceso traemos un extracto de la discusión en un encuentro, en referencia al siguiente problema:

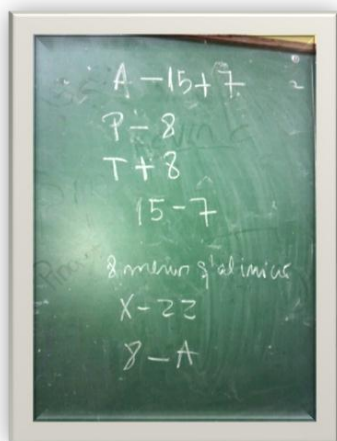
Tarea 1: Ana lleva tazos a la escuela. En el primer recreo pierde 15 tazos, y en el segundo gana 7 tazos. ¿Con cuántos tazos vuelve a su casa?

*C<sub>1</sub>: Si leemos la tarea, en ese enunciado no está claro que los alumnos tengan que producir una expresión. ¿qué pregunta? ¿qué intervención hacer para que los alumnos produzcan escrituras del tipo de las que esperamos?*

*C<sub>3</sub>: armemos la tarea en fases, una fase 1 para pedir que una escritura que dé cuenta de una expresión del tipo  $x - 8$ .*

*D: qué otras expresiones podrán aparecer aparte de estas dos que se me ocurren a mí:  $x - 15 + 7$  y  $x - 8$ .*

Cada uno de los integrantes del grupo va diciendo distintas expresiones, algunas incorrectas, usando letras, en forma coloquial y se van escribiendo en el pizarrón como se muestra a continuación:



D: *las posibles respuestas deben ser analizadas porque no todas son correctas*

C<sub>1</sub>: *¿cómo se genera esta discusión por parte de los alumnos? así luego se podrá abordar el trabajo con las equivalencias.*

C<sub>3</sub>: *las expresiones que den los alumnos podrían aparecer con distintas letras, ¿esto importa? ¿las unificamos?*

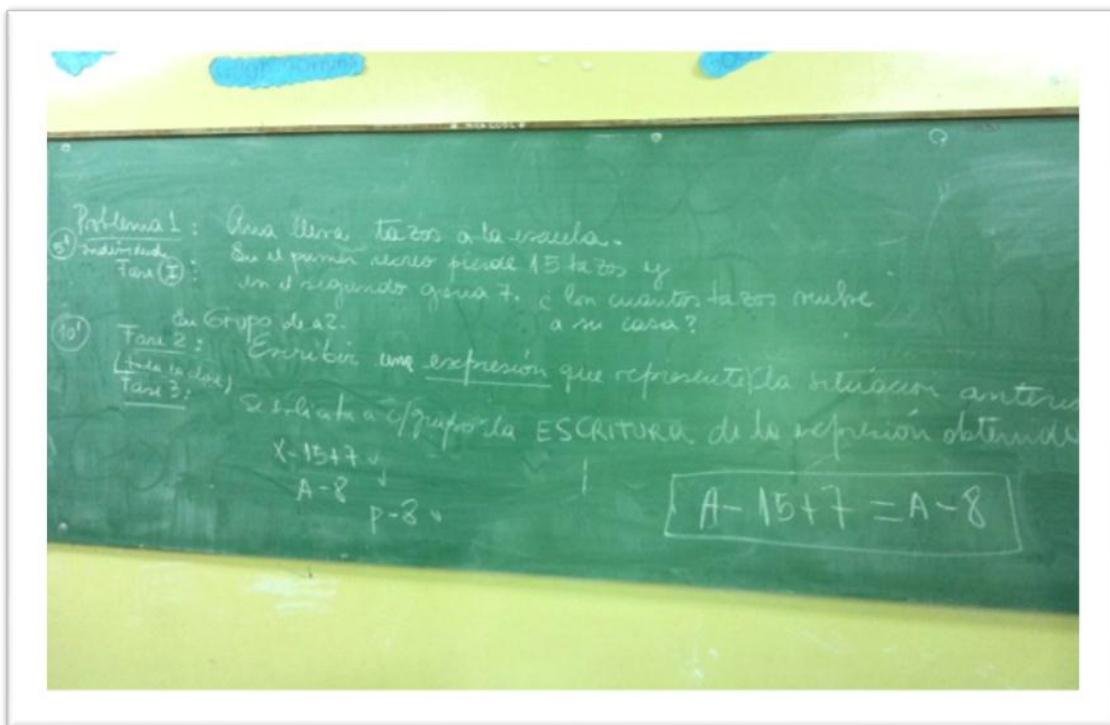
C<sub>1</sub>: *¿cómo se interviene, en la clase, para que los alumnos se pongan a discutir acerca de la igualdad de las expresiones que son correctas?*

(registro grabado E19:26-08-13)

Como se puede observar en el extracto anterior, es una preocupación del grupo encontrar condiciones para convocar a los alumnos a un trabajo en el que tengan que estudiar “*esta expresión representa lo mismo que esta otra expresión*”.

Así, para que los alumnos tengan la oportunidad de analizar distintas escrituras, es importante que cuente con varias expresiones; para ello, un medio posible es la socialización de las producciones de los alumnos, el hacer públicas las producciones. Se piensa entonces en organizar la tarea con distintas fases.

A medida que se avanza en la discusión se van escribiendo en el pizarrón las posibles consignas, como lo muestra la siguiente imagen:



Estas discusiones realizadas en los encuentros, conllevan a “acuerdos” que se registran en archivos que llamamos diarios.

A continuación presentamos el extracto de un diario en el que se muestra la tarea 1 reformulada.

*“La tarea 1 ha sido organizada teniendo en cuenta diferentes momentos de la misma, para ello se los distinguen por fases. Sería conveniente que en la clase se vaya planteando fase por fase y no proporcionar todas las consignas impresas de una vez, pues nos parece crucial el trabajo de cada fase y entonces el modo de resguardar dicho trabajo sería el propuesto.*”

*Tarea 1: Ana lleva tazos a la escuela. En el primer recreo pierde 15 tazos, y en el segundo gana 7 tazos. ¿Con cuántos tazos vuelve a su casa?*

*Se trata de abordar la construcción de un programa de cálculo; trabajar la equivalencia de expresiones que surjan de los alumnos, para que finalmente se presente:  $x-15+7 = x-8$  con el propósito de contrastar las equivalencias entre los distintos programas de cálculo.*

*Fase 1: Individual (5´)*

*Se planteará la situación y la pregunta: ¿Con cuántos tazos vuelve a su casa?*

*Se dejará que resuelvan individualmente. Podrán aparecer expresiones como:*

*$x-8$  8 menos que al principio a-22*

*Se observará estas producciones pasando por los bancos.*

*Fase 2: en grupos de a dos (10´)*

*Se propondrá a los alumnos: “escribir una expresión que represente la situación anterior”.*

*Fase 3: en forma colectiva, se solicitará a cada grupo que indique la expresión producida/la escritura (en la fase 2) y se analizará la validez de las mismas.*

*Se espera que los grupos propongan algunas de las siguientes expresiones:*

*A – 15 + 7; T – 8; T + 8; 15 – 7; 8 menos que al inicio; X – 22; 8 – X*

*Toda la clase, dice en el pizarrón. Se presentan las escrituras en el pizarrón, todos tienen que comprender las escrituras de cada grupo y analizar la validez de las expresiones, es decir, aceptar las que consideran correctas y rechazar las erróneas.*

*El trabajo sobre la equivalencia de escrituras sería para abordar la regla de traslación, es decir “asociar y establecer que restar 19 y sumar 15, es lo mismo que restar 4; .....”*

*Se tratará de cerrar esta fase con la expresión: “restar 15 y sumar 7 es lo mismo que restar 8”*

*[registro diario E 19, 26-08-2013]*

Como se puede observar en el diario anterior, además de la consigna del problema reformulada, escribimos lo que se espera en cada fase, ejemplos de posibles producciones de los alumnos, qué se podría hacer en la clase, etc. Los diarios se constituyen en la “memoria” del camino recorrido, a la vez que un apoyo para la gestión de la clase del docente.

El análisis en conjunto, entre investigadores y profesores, de las actividades de la propuesta seleccionada proporcionó un escenario fértil de investigación sobre el proceso de adaptabilidad de la misma a las clases comunes. Asimismo, nos colocó en un lugar de horizontalidad en el desarrollo del trabajo colectivo. En este sentido, la reflexión grupal resulta indispensable para pensar y repensar las prácticas diarias y conforma una experiencia colectiva que hace las veces de un “motor de avance” insustituible en vías de promover transformaciones en la realidad educativa.

En esta adaptabilidad prevaleció la necesidad de habilitar una dinámica que permitiera problematizar el conocimiento a enseñar y hacer consciente el proceso de decisiones. Desmenuzar el repertorio de elecciones brinda conocimiento a los docentes que les posibilita ampliar su margen de maniobra. Subyace en este trabajo una concepción de la Didáctica de la Matemática según la cual la reflexión didáctica comporta una interpelación de los objetos matemáticos considerados.

## **A MODO DE CIERRE**

Al decidir qué enseñar y cómo hacerlo, el docente toma múltiples decisiones, entre un conjunto de opciones posibles. Así, para la elección de un camino a seguir, debe considerar alternativas de acción: en algunos casos, este proceso se realiza de forma implícita; en otros -

como en este trabajo colaborativo- la reflexión sobre la práctica hace visible el conjunto de esas elecciones potenciales, abriendo un espacio de estudio para llevar adelante estas tareas. Esta vivencia nos llevó a ampliar nuestras miradas y a realizar acciones que interrumpieron la rutina. Pudimos reconocer y extender nuestros marcos interpretativos, interpelando nuestras prácticas desde diferentes lugares.

Consideramos que el camino que recorrimos –investigadores y docentes- nos brindó aprendizajes que podrían integrarse en dos ideas que consideramos estructurantes: aprender a utilizar el conocimiento en situación y aprender a situarnos frente al conocimiento, al propio y al de los otros.

## REFERENCIAS

- Anadón, M y L'Hostie (2001), *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation*. Les press de l'université Laval. Canadá.
- Anadón, M. (2008), La investigación llamada “cualitativa”: de la dinámica de su evolución a los innegables logros y los cuestionamientos presentes. *Invest Educ Enferm*. 26(2):198-211.
- Bednarz, N. at col (1999), Un lien possible entre la recherche en didactique des mathématiques et la pratique de classe: la recherche collaborative. Actes du congrès de la commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM). Neufchâtel, Suisse.
- Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège Troisième partie: Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit X*, 25, 5-38
- Cid, E. y Bolea P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action..* Ville : Maison d'édition.
- Cid, E. & Ruiz Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Eds.) (2011), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Desgagné, S. (2001a), La recherche collaborative: nouvelle dynamique de recherche en éducation, chap. 2, pp.51-76, á Anadón et L'Hostie (2001), *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation*. Les press de l'université Laval. Canadá.
- Desgagné, S. - Bednarz, N. Lebuis, P. – Poirier, L. et Couture, C. (2001b), L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation, *Revue des sciences de l'éducation* vol. 27, n° 1, p. 33-64. <http://id.erudit.org/iderudit/000305ar>.
- Gascón, J. (1993-1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, 37, 43-63.