CB 06

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN RACIONAL CON EL USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA

Alicia Iturbe & Claudia Garelik

Universidad Nacional de Río Negro
Isidro Lobo y Belgrano – General Roca – Río Negro
aliciaitu@gmail.com , garelikclaudia@gmail.com

Palabras Clave: Función racional, Software Geogebra, Registros de representación.

RESUMEN

El propósito de nuestro trabajo es describir una propuesta para la enseñanza de la "función racional" en el nivel medio, utilizando el software Geogebra, y desarrollar algunas reflexiones didáctico-matemáticas que surgen al planificar e implementar la misma.
Los propósitos de la propuesta son estudiar la función racional vinculando a la misma con los problemas que esta resuelve, analizar dicha función como objeto formal y enseñar la resolución de ecuaciones e inecuaciones con expresiones algebraicas racionales, apuntando a estrategias que vinculen distintos marcos, como el geométrico y el algebraico.
Se analizan algunas situaciones áulicas que permiten destacar las posibilidades que brinda el uso de un software como Geogebra, para el tratamiento y la integración de diferentes registros de representación al estudiar las funciones.

INTRODUCCIÓN

El propósito de nuestro trabajo es describir una propuesta para la enseñanza de la "función racional", utilizando el software Geogebra, y desarrollar algunas reflexiones didáctico-matemáticas que surgen al planificar e implementar la misma.
El proyecto de enseñanza se está llevando a cabo en 5to año Bachillerato, de un Colegio Salesiano de Nivel Medio de Gral. Roca, siendo la profesora a cargo del curso una de las autoras de este trabajo.
Desde hace aproximadamente tres años nos hemos interesado sobre el uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde nuestras actividades docentes y desde nuestras actividades de investigación. Ambas participamos en el proyecto de investigación que finalizó en el año 2013 "*Recursos tecnológicos para y por los docentes destinados a la enseñanza de Matemática en Argentina y Francia*", desarrollado entre la UNSAM (Universidad Nacional de San Martín), la UNRN y la Ecole Normale Supérieure de Lyon (Francia), en el que se estudió de manera conjunta entre investigadores y profesores, los medios de concebir, desarrollar y organizar propuestas para la enseñanza de la matemática en entornos informáticos. Actualmente, estamos desarrollando el proyecto "*Las TIC en la enseñanza de la Matemática y las Ciencias Naturales en el nivel medio: usos y sentidos que le atribuyen los docentes*", que pretende describir y analizar diferentes estrategias de utilización que docentes de nivel medio hacen de las TIC y propiciar de manera colaborativa, entre investigadores y docentes, el diseño de desarrollos didácticos.

LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA Y SUS FUNDAMENTOS

Uno de los propósitos de la propuesta es estudiar la función racional vinculando a la misma con los problemas que esta resuelve y le dan sentido, así como su análisis como objeto formal. Otro de los propósitos, también fundamental, es enseñar la resolución de ecuaciones e inecuaciones con expresiones algebraicas racionales, apuntando a estrategias que vinculen distintos marcos, como el geométrico y el algebraico. O sea superar el tratamiento algebraico de la resolución de estas ecuaciones, que suele convertirse en un procedimiento algorítmico, que muchas veces, en lugar de promover una comprensión profunda del objeto matemático que le da origen, se convierte en una técnica rutinaria que muy poco tiene que ver con dicho objeto.

Elaboramos una propuesta con problemas organizados en secuencia, promoviendo avances en la construcción de los conceptos matemáticos involucrados y que se desarrollará en un ambiente “papel, lápiz, tecnología”.

Organizamos las situaciones problemáticas considerando distintos aspectos: - el contenido que se pretende enseñar; - contemplar problemas contextualizados y descontextualizados; - propiciar el uso de distintos lenguajes matemáticos; - incluir la validación de los resultados. Se ha privilegiado, brindar a los alumnos la posibilidad de interpretar y expresar situaciones presentadas mediante diferentes lenguajes: gráfico, algebraico, verbal, utilizando diferentes formas de representación en las distintas situaciones planteadas, asegurando una continua vinculación entre las diferentes registros y el problema planteado, ya sea para interpretar los resultados obtenidos o para justificar la toma de decisiones a la hora de resolver el problema. En el plan de clase podemos distinguir tres partes.

Primera parte: Revisión de función cuadrática y familiarización con el software Geogebra.

Una de las intenciones de esta parte es revisar características de la función cuadrática, que ya se estudiaron en el año anterior. Se propone cuatro problemas que requieren encontrar el valor de la variable independiente o dependiente, hallar máximos, realizar gráficos, hallar dominio, determinar el conjunto de positividad y negatividad, hallar las raíces y eje de simetría, construir la fórmula más conveniente (polinómica, factorizada o canónica) de acuerdo a los datos dados.

En un primer momento los alumnos resuelven las situaciones dadas, con lápiz y papel, en el aula.

En un segundo momento las clases se desarrollan en el aula de informática, donde los alumnos resuelven dos de los problemas propuestos anteriormente, utilizando las herramientas de Geogebra y comparando los resultados obtenidos en los dos casos, con lápiz y papel y con el software.

El propósito, aquí, es conocer y utilizar los comandos de Geogebra que permiten ingresar la fórmula de una función, trazar una recta horizontal o vertical que pase por un determinado punto, intersectar curvas y resolver ecuaciones cuadráticas.

Segunda parte: La función racional.

Esta parte se desarrolla en la sala de informática.

Se proponen problemas sobre funciones racionales, para resolver utilizando el software.

El primer problema exige que los alumnos construyan la fórmula de una función racional y realicen la gráfica utilizando el Geogebra.

A partir de ese momento se plantea el análisis del gráfico y se establece el vínculo entre este tipo de función y la proporcionalidad.

Tercera parte: La resolución de las ecuaciones e inecuaciones racionales.
Se continúa trabajando en la sala de informática.
Se retoma aquellas consignas, de los problemas anteriores que requieren resolver ecuaciones e inecuaciones racionales. La idea acá, estudiar estas ecuaciones utilizando el geogebra, vinculando el registro gráfico y el cálculo simbólico.
Se pretende analizar las ventajas y limitación del CAS, en Geogebra.

ALGUNOS ASPECTOS TEÓRICOS QUE TUVIMOS EN CUENTA

Fundamentan esta propuesta los aportes de Duval (1996), que al ocuparse del tratamiento, comprensión y dificultades del aprendizaje conceptual, plantea que es fundamental no confundir objetos matemáticos con su representación y que a su vez no es posible acceder a los objetos matemáticos si no es a través de sus representaciones. Distingue, así, diferentes registros de representación semiótica, figuras, gráficas, escritura simbólica, lengua natural, etc... Este autor aclara que la construcción de un concepto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas, adquisición que depende de tres elementos: representación, tratamiento (en un mismo registro) y conversión (entre diferentes registros). Identifica como importante para la actividad matemática: - poder movilizar diferentes registros; - poder escoger el más conveniente; - sentirse cómodos en el tratamiento y - coordinar varios registros de representación. Artigue (2007), en este sentido, al analizar las dificultades de los estudiantes con el campo conceptual del análisis, distingue, justamente, la de “relacionar los diferentes registros semióticos (Duval, 1995) que permiten representar y trabajar funciones”.
Tenemos en consideración también a Santos Trigo (2007) que destaca el empleo de herramientas tecnológicas para la enseñanza de la matemática ya que, con el empleo de un software dinámico se enriquece la producción de diferentes representaciones, pudiendo ayudar a los estudiantes en procesos de resolución de problemas que incluyen la búsqueda de distintas soluciones, la necesidad de plantear conjeturas, el análisis de casos particulares y la importancia de buscar conexiones y significados de las ideas.
Por otro lado, Hitt (2003), plantea que el avance tecnológico influye en el desarrollo de nociones teóricas para explicar el aprendizaje de conceptos matemáticos. Por ejemplo, en este contexto, ha tomado gran relevancia el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y su papel en la construcción de conceptos.
El uso de tecnología para la enseñanza de la matemática, en particular Geogebra, por presentar la vista gráfica, la algebraica, el CAS y la planilla de cálculo, puede ampliar, complejizar, enriquecer, la interacción con y entre diferentes representaciones de las funciones.
La capacidad para visualizar cualquier concepto matemático o problema, requiere habilidad para interpretar y entender información figurativa sobre el concepto, manipularla mentalmente, y expresarla sobre un soporte material. Al utilizar representaciones gráficas de conceptos matemáticos como herramientas para interpretar problemas o resolver problemas, la visualización es un medio para llegar a su comprensión o resolución.
Al respecto, leemos en Hitt que por ejemplo, si queremos que el estudiante visualice una gráfica, esta tarea demanda una actividad mental más profunda en el sentido de reconocimiento de ciertos subconceptos, allí representados. Y es, en este punto, que debemos centrar la atención en entender los problemas que surgen al desarrollar una tarea de conversión entre representaciones, retomando los aportes teóricos de Duval.
En ese sentido el Geogebra da posibilidad de variación de problemas para que el alumno explore en forma autónoma, durante el proceso de solución, permite que aparezca la búsqueda y exploración de relaciones matemáticas, así como visualizar y explorar el significado de esas

relaciones. Como dice Santos Trigo (2007), "este ciclo de visualizar, reconocer y argumentar son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de herramientas" (p. 51).
Por estos fundamentos, hemos contemplado para esta propuesta el tratamiento integrado de las representaciones semióticas de la función cuadrática y de la función racional; el tratamiento dinámico mediado por el software geogebra para favorecer los procesos de visualización de los distintos conceptos que hemos enunciado con anterioridad.
Tenemos también en cuenta; la comunicación, validación y discusión matemática, en el aula, respecto de los procedimientos utilizados, las dificultades o errores, las definiciones o propiedades que validan cada decisión tomada, entrando así a un tipo particular de "cultura matemática".

LAS CLASES Y ALGUNOS FENÓMENOS OBSERVADOS

Para esta ponencia consideramos la descripción y análisis de algunas situaciones de aula correspondientes a la primera parte y segunda parte de la secuencia, desarrolladas en la sala se informática.

Situación: la expresión decimal de un número racional

Esta situación surge en el momento en que la profesora les plantea a los alumnos diferentes tareas en Geogebra para que se familiaricen con ciertos comandos.
Al solicitarles que encuentren las raíces de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2$ con lápiz y papel y utilizando Geogebra, se produce la discusión acerca de cuáles son efectivamente las raíces ya que, al utilizar las técnicas de Baskara o despejando la ecuación, se obtiene $\pm\sqrt{2}$, y al aplicar la técnica con Geogebra, que consiste en señalar la intersección entre la curva y el eje x, los valores que surgen en la vista algebraica son $\pm 1{,}41$.
Esta situación permitió no sólo que los alumnos conozcan la forma en que Geogebra reconoce las raíces y la posibilidad de manipular el redondeo, sino que también se convirtió en una rica situación para institucionalizar cómo, el resultado que obtengo, depende de la técnica utilizada y la equivalencia entre dichos resultados.

Situación: escala de los ejes y encontrar la imagen de un punto con Geogebra

Al proponerles resolver el siguiente problema con Geogebra, ya resuelto con lápiz y papel, comparando los resultados obtenidos en ambos casos, se suscitan dos hechos dignos de destacar.

1) El contador de una empresa ha determinado que la ganancia G (en \$), cuando se producen x unidades de cierto artículo, se puede calcular con la fórmula

$$G(x) = -5x^2 + 1000x - 5000$$

a) ¿Qué ganancia obtendrá la empresa cuando se produzcan 50 unidades?¿y cuando se produzcan 70 unidades?
b) ¿Cuántas unidades se deben producir para que la ganancia resulte mayor que $13000?
c) ¿Cuántas unidades debe producir la empresa para que la ganancia obtenida sea la máxima posible?
d) ¿Cuál es esa ganancia máxima?

Cuando los alumnos dan entrada a la función propuesta con el objetivo de obtener el gráfico para responder lo solicitado en el problema, observan que la vista gráfica no muestra ninguna curva. Ante esto, la profesora les propone discutir qué está pasando. Un alumno propone "hay

que alejarse, el vértice tiene valores grandes". Se presenta así, el uso del zoom, y en ese momento se escucha una exclamación de sorpresa al aparecer el gráfico. Se discute qué es lo que pasó y la profesora introduce la posibilidad de modificar la escala de los ejes en Geogebra.
Podemos observar acá, un ejemplo de tratamiento en el registro gráfico que permitió trabajar la idea de escala en los ejes coordenados y la relación de esto con la gráfica. Por otro lado, sabemos que al utilizar el software surgen algunas dificultades como que los alumnos, en general, no toman la pantalla como si fuera una ventana en donde solo estamos observando una parte de la gráfica y tienen dificultades para interpretar lo que se percibe en esa ventana, lo cual pudo ser abordado con esta actividad.
Cuando los alumnos tienen que resolver el inciso a), con Geogebra, surgen diferentes procedimientos y una rica discusión sobre la pertinencia de los mismos. Algunos alumnos interpretan que la tarea consiste en verificar si el par (50, 32500) pertenece a la curva, otros reconocen que la tarea a realizar es obtener la imagen de 50. Para los dos casos surgieron los siguientes procedimientos:
P1) Determinan un Punto en Objeto (la parábola) y lo desplazan mirando las coordenadas en la Vista Algebraica hasta obtener el punto buscado.
P2) Usan la cuadrícula de la Vista Gráfica y el zoom para ubicar el punto sobre la parábola.
P3) Trazan una recta perpendicular al eje x y la desplazan hasta encontrar el 50 y luego, con la herramienta Intersección de dos Objetos, buscan la intersección entre la recta y la parábola.
P4) Trazan la recta $x = 50$ (sin usar la perpendicularidad con el eje x, utilizan la recta que pasa por dos puntos) y usan la herramienta Intersección de dos Objetos para ver que el punto que surge en la Vista Algebraica coincida con (50, 32500) y como no usan la perpendicularidad con el eje, el punto no está sobre la curva.
P5) Trazan la perpendicular al eje x que pasa por el punto (50,0), luego con Intersección de dos Objetos, obteniendo en la Vista Algebraica el punto buscado.
Se les propone a los alumnos evaluar estos procedimientos. Algunos consideran como bueno el P3). Ante esta situación la profesora les pide ingresar el punto (50.002, 32500) y ver qué sucede. En la Vista Gráfica parece que es un punto de la parábola pero al proponerles hacer zoom ven que no es así. Se reconoce entonces, la herramienta Redondeo para identificar que Geogebra trabaja en forma aproximada.
Se concluye con la selección del último procedimiento como el más eficaz institucionalizando como la técnica para encontrar la imagen de un valor de x con Geogebra. Señalamos a la situación descripta como un ejemplo de la posibilidad de vincular la noción geométrica de punto como intersección entre curvas y la noción analítica de par ordenado perteneciente a una función.
En la clase siguiente se retoma esta conclusión al formalizar el inciso b), ya que los alumnos plantean trazar la recta perpendicular al eje y que pase por el punto (0, 13000) e intersectarla con la parábola. En dicha clase, una alumna propone ingresar la función lineal $f(x)=3$en lugar de trazar la perpendicular al eje y argumentando: "otra forma de encontrar la recta perpendicular es con la función lineal de pendiente 0 para no tantear tanto".
Podemos observar aquí un ejemplo de la posibilidad que brinda Geogebra para vincular marco geométrico y analítico.

Situación: surge la función racional

Se les propone resolver el siguiente problema con Geogebra:

Problema I Un club dispone de $50000 mensuales para el sueldo de sus deportistas. a) Si el club tiene 100 deportistas y todos cobran lo mismo, ¿cuánto cobra cada uno?

b) Encuentren una fórmula que permite calcular lo que cobra cada uno en función de la cantidad de deportistas.
c) ¿Qué pasa si en número de deportistas aumenta?
d) Si de lo que cobra cada deportista debe pagar $20 en impuestos, ¿cuál es el número razonable de deportistas que debe tener el club para que cada uno cobre por lo menos $300?

En la resolución de este problema se produce una situación interesante en el momento en que ingresan una fórmula para obtener el gráfico que les permita encontrar las respuestas a las consignas planteadas. Si bien todos resuelven sin problemas la consigna a), la fórmula que escriben corresponde a una función lineal (por ejemplo x – 50000) o una cuadrática (por ejemplo) y varios alumnos permanecen mirando la pantalla sin saber qué fórmula ingresar. Se escuchan expresiones como: “no se me ocurre qué hacer”, “sin solución” y “50000 dividido x porque eso varía la cantidad de personas, no queda otra”. Al final uno de los alumnos se “atreve” y escribe “f(x)=50000:x” en la Entrada. En un principio no aparece la gráfica, recuerda el uso del zoom y lo aplica hasta que aparece. Luego de que se instala la fórmula en el aula, surgen comentarios sobre el gráfico: “profe, me dio el par (100,500) pero sigo sin entender el gráfico”, “parece una función logarítmica o exponencial”. A partir de aquí se realiza un análisis del gráfico en forma colectiva, relacionándolo con el problema planteado.
Podemos destacar aquí una situación en la que el uso del Geogebra permitió iniciar el estudio de una nueva función a partir de un problema en un contexto familiar para los alumnos y, nuevamente, enriquecer el vínculo entre fórmula y gráfico.

CONSIDERACIONES FINALES

En general el origen de los conceptos matemáticos partió de las ideas intuitivas basadas en situaciones bien concretas y visuales, y hoy en día, el uso de la tecnología posibilita esto, lo hace mucho más sencillo, pero es necesario aclarar que el uso de la tecnología no resuelve por si misma el problema del aprendizaje de la matemática, sino que el docente debe hacer uso de ella de un modo planificado de acuerdo a los contenidos que quiere tratar, pensando lo que necesita enseñar y que los alumnos aprendan. Según Brousseau (1994), el rol del docente es “hacer vivir el conocimiento, hacerlo producir por los alumnos como respuesta razonable a una situación familiar y, además, transformar esa “respuesta razonable” en un “hecho congnitivo” extraordinario, identificado y reconocido desde el exterior”.
Haber llevado a cabo una propuesta de enseñanza con un variado repertorio de problemas y registros, en los que se involucraron procesos de representación, conversión y traducción, y el tratamiento de definiciones formales, permitió a los alumnos relacionar determinados conceptos que hasta este momento no tenían integrados y ampliar su bagaje de conocimientos sobre las funciones.
La realización de esta ponencia más que cerrar las cuestiones planteadas, abre interrogantes que permiten pensar en acciones de investigación pues al incorporar tecnología es necesario reconocer contenidos matemáticos y aspectos didácticos que problematizan la enseñanza de la matemática.

REFERENCIAS

- Agrasar, M.; Crippa, A.; Diaz, L.; Chemello, G.(Coordinadora). (2011). Matemática III. Ed. Longseller**.**
- Amman, S.; Bifano, F.; Cicala, R.; Gonzales, C.; Lupinacci, L. (2012). Geogebra Entra Al Aula De Matemática. (1a.Ed.). Argentina: Miño Y Davila. Uruguay:

Espartaco.

- Arcavi, A. & Hadas, N. (2002). Computer Mediated Learning: An Example Of An Approach. In F. Hitt (Editor), Representations and mathematics visualization. international group for the psychology of mathematics education North American. Chapter And Cinvestav-Ipn. México.
- Artigue, M. (2007). Tecnología Y Enseñanza De Las Matemáticas: Desarrollo Y Aportes De La Aproximación Instrumental. Xii Conferencia Interamericana De Educación Matemática, Celebrada En Querétaro, México.
- Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. Cap. Iv. En Rico, L. La Educación Matemática En La Enseñanza Secundaria. Orsori. Barcelona.
- Duval, R. (1993). Registres de répresentations sémiotiques et fonctionne mentcognitif de la pensée. annales de didactique et de sciencescognitives. 5, 37-65. Traducción Para Fines Educativos. Departamento De Matemática Educativa Del Cinvestav- Ipn 1996, México.
- Hitt, F. (2003). “Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología”. Boletín De La Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, N°2. p. 213.
- Kurzrok, E.; Comparatore, C.; Altman, S. (2011). Matemática II. De la práctica a la formalización. Ed. Longseller.
- Santos Trigo, L. (2007). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Querétaro. México.