CB 05

EL PROBLEMA DE LAS CIRCUNFERENCIAS TANGENTES. ANÁLISIS DE PRODUCCIONES DE ESTUDIANTES DE PROFESORADO

Liliana Siñeriz & María de la Trinidad Quijano

Centro Regional Universitario Bariloche – Universidad Nacional del Comahue
Dirección: Quintral 1250
Teléfono: 0294-4428505. Fax: 0294-4422111.
maria.quijano@crub.uncoma.edu.ar, liliana.sineriz@crub.uncoma.edu.ar

Palabras Claves: construcciones geométricas, métodos, heurísticas, proceso de resolución.

RESUMEN

El trabajo se enmarca en un proyecto que indaga los procesos de aprendizaje de las construcciones geométricas en la Formación de Profesores. Se describe el modelo de enseñanza desarrollado con alumnos de cuarto año del Profesorado de Matemática, centrado en el uso de heurísticas y métodos de resolución de problemas. Se presenta el estudio teórico de una situación abierta que formó parte de dicho modelo para promover el análisis del proceso de resolución. Además, se analizan las producciones de los estudiantes en torno a la misma, indagando la transferencia que realizan de los conocimientos que fueron objeto de enseñanza.

INTRODUCCIÓN

Considerando a la geometría, y especialmente a los problemas de construcción, como un dominio propicio para implicar al alumno en tareas propias del quehacer matemático, nos hemos propuesto analizar la multiplicidad de aspectos que se conjugan al abordarlos.
Este trabajo se encuadra en un proyecto de investigación, desarrollado en el Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue, en el que se indagan procesos de aprendizaje de las construcciones geométricas en la formación docente. Para ello planteamos una investigación cualitativa basada en el análisis de producciones escritas y/o registros de clase en torno a determinados problemas, atendiendo a categorías delimitadas en estudios previos.
En un proyecto anterior, descripto en Siñeriz, Guillén y Quijano (2013), hemos analizado Modelos de Enseñanza acotados al tratamiento de determinadas situaciones abiertas, en el marco de asignaturas de la Formación Inicial de Profesores de Matemática y de Profesores de Primaria, que permitieron establecer competencias implicadas al abordar tareas relacionadas con la enseñanza de esta clase de problemas. A partir de estos estudios de referencia tomamos como objeto de estudio las producciones de los estudiantes que han surgido en estos entornos de aprendizaje.
En esta comunicación nos centraremos en una de las situaciones abiertas y analizaremos las resoluciones de alumnos de “Seminario de la Enseñanza de la Matemática”, asignatura del último año del Profesorado de Matemática.

En Guillén y Siñeriz (2012) se ha examinado la actuación de una profesora de la Facultad de Magisterio de la Universidad de Valencia en torno a esta misma situación, y se ha presentado el marco teórico que sustenta dicho análisis, el que también será de referencia en este trabajo.
Fundamentalmente indagamos el proceso de resolución atendiendo a los métodos y heurísticas implicados en éste.
Por un lado, extrapolamos los métodos que en forma general se presentan en Polya (1962-1965). Consideramos al *Método de los Dos Lugares, Método de la Figura Auxiliar y Método de la Figura Semejante* como generadores de problemas, ya que su aplicación lleva a transformaciones del problema inicial que se traducen en nuevas construcciones. Así también nos valemos del *Método de Análisis-Síntesis* para organizar y estudiar el proceso de resolución. Por otro lado, rescatamos la clasificación de heurísticas de Puig (1996), distinguiendo entre *destrezas, herramientas heurísticas, métodos y sugerencias generales*.
En los apartados siguientes presentamos el contexto en el que se llevó a cabo la experimentación, describiendo el Modelo de Enseñanza en el cual se planteó la situación abierta. Además, realizamos un estudio teórico de la misma desde una perspectiva heurística y sobre esta base analizamos las producciones de los estudiantes, indagando la transferencia de los conocimientos que fueron objeto de enseñanza.

CONTEXTO PARA LA EXPERIMENTACIÓN

El ámbito de estudio lo constituyen los tres alumnos inscriptos en la asignatura. La intención de la misma en la carrera es brindar espacios de discusión y reflexión sobre temas relacionados con la enseñanza de la matemática, lo cual se lleva a cabo a través de talleres o cursos diseñados para tal fin.
En este contexto se ha desarrollado el curso "Regla y compás: conjugando Geometría y Heurística” en el que se utilizan las construcciones geométricas como instrumento para la enseñanza de la resolución de problemas en el aula, a partir de las cuales se introducen heurísticas y métodos de resolución de problemas.
El curso se llevó a cabo mediante un encuentro semanal de cuatro horas durante un mes; su propósito ha sido brindar elementos teóricos para la apropiación de formas de trabajo que pertenecen al plano heurístico y para la construcción de un marco de referencia que pueda ser integrado a la hora de planificar la tarea docente. En el último encuentro, se ha intentado promover el análisis del propio proceso de resolución, para lo cual se propuso la situación abierta cuyas respuestas a la misma examinaremos en este trabajo.

Respecto al Modelo de Enseñanza

Esencialmente la enseñanza estuvo dirigida hacia el uso de los métodos heurísticos, a través de la resolución de problemas seleccionados para tal fin.
De manera sistemática se han explicitado las herramientas heurísticas involucradas (consideración de casos particulares, examen de posibilidades, analogía) y las sugerencias generales (buscar problemas relacionados, resolver el problema de forma diferente, analizar la solución) que ayudan a avanzar en el camino de solución.
Se introdujo el uso de la figura de "figura de análisis" como punto de partida para resolver los problemas. Esta figura es un dibujo a mano alzada de la incógnita, donde se remarca lo dado, y a partir de ella se analizan los objetivos parciales o resultados intermedios que habría que plantearse para determinarla.
En primer término se presentó el "Método de los Dos Lugares", mediante un problema asociado a los criterios de congruencia de triángulos, que habitualmente tiene un tratamiento algorítmico en los libros de texto. La intención fue rescatar el procedimiento automático que

los alumnos utilizan para su resolución, y de este modo hacer su reinterpretación de acuerdo al método, lo cual da pie a la formulación de los pasos del mismo. Una vez explicitados estos pasos, se resolvieron otros problemas en los que el método es aplicable, enfocando los algoritmos de construcciones elementales implicados en estas resoluciones (mediatriz, bisectriz, recta paralela, recta perpendicular, arco capaz) y redescubriendo el método subyacente en ellos. Además se ha evaluado el campo de aplicabilidad del método, enunciando problemas en los que puede utilizarse sin llevar a cabo su correspondiente resolución. También se dio lugar a un espacio de reflexión respecto a ciertas variables que afectan la complejidad de los problemas (simplicidad o no de los lugares geométricos implicados, dependencia o independencia en cuanto al orden de construcción de los mismos). El sentido de estas instancias fue detectar implicaciones didácticas que surgen de la aplicación del método y que habrá de considerarse a la hora de diseñar actividades que faciliten el aprendizaje del tema.

El Método de la Figura Auxiliar y el Método de la Figura Semejante se fueron redescubriendo a medida que se resolvieron problemas, surgieron a partir de interpretar un procedimiento de resolución alternativo, que no respondía al Método de los dos Lugares, o ante la imposibilidad de aplicarlo.

Por otro lado, se ha puesto el acento en la aplicación de los distintos métodos a partir de una figura de análisis, lo cual refleja la presencia del Método de Análisis-Síntesis como organizador del proceso de resolución en cada problema abordado. El “Análisis” es el camino que lleva desde la incógnita a los datos, estableciendo progresivamente sus relaciones mutuas; la “Síntesis” es el camino contrario, que va desde los datos hasta la incógnita.

Los alumnos abordaron los problemas alternativamente en forma individual o grupal. Además desarrollaron tareas extra clase que requerían la búsqueda de problemas en libros de texto de secundaria y su resolución, atendiendo a la diversidad de procedimientos, cantidad de soluciones y a los métodos o heurísticas subyacentes, cuya discusión se realizaba posteriormente en forma conjunta.

Respecto a la situación abierta

La misma se abordó en forma individual durante aproximadamente 30 minutos, a partir de lo cual se realizó la puesta en común.

Consigna:
“Construir una circunferencia tangente a dos circunferencias exteriores. Decidir sobre la cantidad de soluciones posibles”
- Resolver el problema describiendo el proceso de resolución que has seguido.

Está planteada en forma abierta, lo cual no sólo lleva a examinar los datos y a establecer relaciones entre ellos y la figura a obtener, sino que da lugar a considerar distintas alternativas de solución.

Su elección se debe a que es fácilmente abordable e involucra nociones elementales de la geometría escolar. Es apta para la exploración, la cual puede desembocar en la formulación y validación de propiedades. Tiene la riqueza propia de los problemas de construcción en cuanto a movilizar el razonamiento argumentativo hacia la formulación de explicaciones a partir del conocimiento de las figuras. Se necesita saber qué propiedades tiene la circunferencia buscada para poder construirla o para realizar el análisis de la existencia o no de solución, y/o de la cantidad de soluciones posibles.

Estas características hacen que sea adecuada para reflexionar sobre el propio proceso de resolución.

ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN ABIERTA

El análisis de las partes principales de la situación abierta (datos, incógnita y condición) lleva al uso de heurísticas tales como la **consideración de casos** particulares o genéricos y el **examen de posibilidades**[1].

Atendiendo a los **datos**, se pueden considerar distintas alternativas respecto a los radios de las circunferencias dadas: $R_1=R_2$ (caso particular) o $R_1 \neq R_2$ (caso genérico).

El análisis de la **incógnita** también lleva a atender diferentes posibilidades respecto a la ubicación del centro de la circunferencia buscada con los centros dados: centros alineados (caso particular) o centros no alineados (caso genérico).

Al centrar la atención en la **condición** surgen cuatro casos posibles respecto a la relación entre la incógnita y cada una de las circunferencias exteriores dadas:

1. La circunferencia es tangente exterior con ambas circunferencias dadas.
2. La circunferencia es tangente interior con ambas circunferencias dadas.
3. La circunferencia es tangente exterior con $C_1(o_1,R_1)$ y es tangente interior con $C_2(o_2,R_2)$.
4. La circunferencia es tangente exterior con $C_2(o_2,R_2)$ y es tangente interior con $C_1(o_1,R_1)$.

Al hacer el estudio teórico de los problemas consideraremos al **método de análisis-síntesis** como organizador del proceso de resolución, siguiendo el espíritu de las orientaciones que han caracterizado al Modelo de Enseñanza. El análisis llevaría a identificar los lugares geométricos implicados, la figura auxiliar o la figura semejante, lo que derivaría en la aplicación del método correspondiente para resolver el problema; y la síntesis, llevaría a efectivizar la construcción que permite determinar la incógnita.

En los distintos problemas involucrados en esta situación abierta subyace uno de estos métodos, el **método de los dos lugares**, que consiste en: 1. Reducir el problema a la construcción de un punto; 2. Dividir la condición en dos partes de modo que cada parte suministre un lugar geométrico para el punto incógnita; cada lugar debe ser circular o rectilíneo.

En este trabajo nos limitaremos a analizar los problemas asociados al caso 1, ya que todas las producciones se centraron en él.

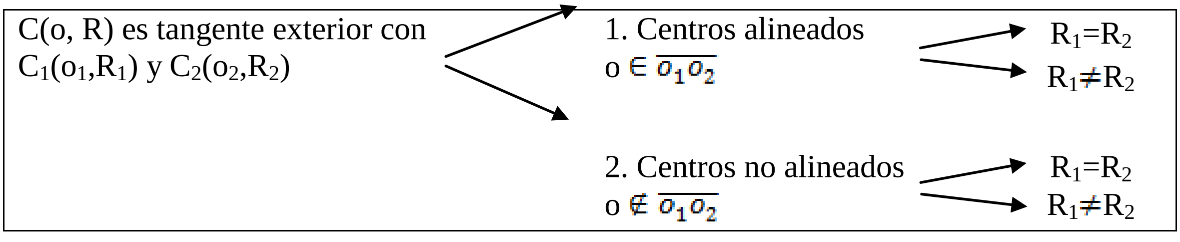
Construir una circunferencia tangente exterior con $C_1(o_1,R_1)$ y $C_2(o_2,R_2)$

Datos: $C_1(o_1,R_1)$ y $C_2(o_2,R_2)$, con $\overline{o_1 o_2} > \overline{R_1 R_2}$.

Reducimos el problema a la construcción de un punto, o, centro de la circunferencia buscada.

Incógnita: o

Podemos realizar un diagrama de árbol que nos permitirá sistematizar el análisis e identificar los problemas asociados a este caso.



[1] El examen de posibilidades consiste en descomponer el dominio de objetos a los que se refiere el problema mediante una partición y resolver el problema para cada una de las partes.

En cada uno de ellos se tomará a la figura de análisis como punto de partida para la aplicación del método, por tanto, el primer paso será dibujarla. A partir de la misma se intentará visualizar los lugares geométricos implicados en su resolución.

1. Centros alineados (o $\in \overline{o_1 o_2}$)

1.a) $R_1=R_2$

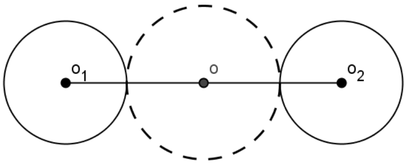


Figura de análisis 1.a

Condición $\begin{cases} o \in \overline{o_1 o_2} \\ o \in M_{\overline{o_1 o_2}} \text{ (mediatriz de } \overline{o_1 o_2}) \end{cases}$

Por lo tanto $\{o\} = \overline{o_1 o_2} \cap M_{\overline{o_1 o_2}}$

La solución es la circunferencia C(o,R), siendo $R = \frac{\overline{o_1 o_2}-2R_1}{2}$

1.b) $R_1 \neq R_2$

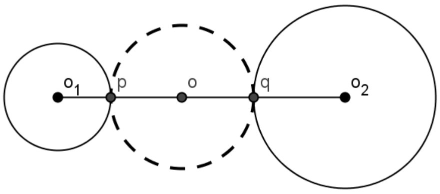


Figura de análisis 1.b

Sean p y q puntos de tangencia

Condición $\begin{cases} o \in \overline{o_1 o_2} \\ o \in M_{\overline{pq}} \end{cases}$

o $\{o\} = \overline{o_1 o_2} \cap M_{\overline{pq}}$

La solución es la circunferencia C(o,R), siendo $R = \frac{\overline{o_1 o_2}-\overline{R_1+R_2}}{2}$

2. Centros no alineados (o $\notin \overline{o_1 o_2}$)

El valor del radio R en las alternativas anteriores, lleva a anticipar que para que exista solución en este caso, debiera cumplirse $R \geq \frac{\overline{o_1 o_2}-\overline{R_1+R_2}}{2}$

2.a) $R_1=R_2$

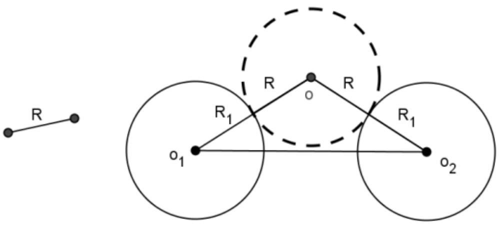


Figura de análisis 2.a

Para un valor arbitrario de R, la condición requiere: $\begin{cases} o \in C_1(o_1, R_1 + R) \\ o \in C_2(o_2, R_1 + R) \end{cases}$

Por lo tanto

$\{o, o'\} = C_1(o_1, R_1 + R) \cap C_2(o_2, R_1 + R)$

Para cada valor de R, habrá dos soluciones: C(o,R) y C(o',R).

El centro de la circunferencia buscada estaría en la mediatriz del segmento $\overline{o_1 o_2}$ ya que equidista de sus extremos.

2.b) $R_1 \neq R_2$

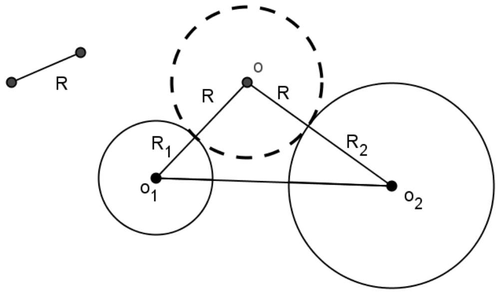


Figura de análisis 2.b

Para un valor arbitrario de R, la condición requiere: $\begin{cases} o \in C_1(o_1, R_1 + R) \\ o \in C_2(o_2, R_2 + R) \end{cases}$

Por lo tanto

$\{o, o'\} = C_1(o_1, R_1 + R) \cap C_2(o_2, R_2 + R)$

Para cada valor de R, habrá dos soluciones: C(o,R) y C(o',R).

Si bien no es inmediato, cabe señalar que el centro de la circunferencia buscada pertenece a una hipérbola, ya que la diferencia entre las distancias de este punto a cada uno de los centros dados es constante:

$\overline{oo_1} = \overline{R_1 + R} \qquad \overline{oo_2} = \overline{R_2 + R}$

$\overline{oo_2} - \overline{oo_1} = \overline{R_2 + R} - \overline{R_1 + R} = \overline{R_2 - R_1}$

ANÁLISIS DE PRODUCCIONES

Si bien la situación requiere un **examen de posibilidades**, como ya hemos mencionado, los tres alumnos se abocaron a trabajar la alternativa en la que la incógnita es tangente exterior a las circunferencias dadas.

Nos referiremos a las producciones como A, B y C queriendo indicar que respectivamente corresponden a las respuestas del alumno A, del alumno B o del alumno C.

En las tres resoluciones se comienza tomando el **caso particular** de centros alineados (el centro de la circunferencia solución pertenece a la línea de los centros dados) y considerando $R_1 \neq R_2$. En una de las producciones (A) se indica la alineación de centros (Figura 1), en otra (C) se indica "heurística: caso particular" pero sin especificar el caso considerado y en la restante (B) no se alude a la misma.

La presencia del **método de análisis-síntesis** se observa sólo en las respuestas de uno de los alumnos. La producción A muestra un uso sistemático y explícito de la **figura de análisis**, en los casos considerados se dibuja a mano alzada datos e incógnita utilizando lenguaje simbólico, a partir de lo cual se van elaborando conjeturas que luego se intentan validar. Las figuras 5 y 8, a las cuales nos referiremos posteriormente, dan cuenta del uso explícito de dicha figura durante este proceso de resolución. Asimismo, bajo el título de **síntesis** se efectiviza la construcción con regla y compás (Figura 1).

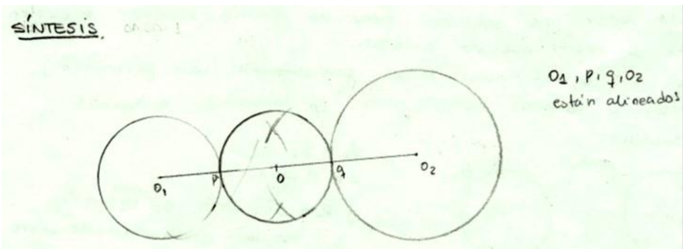


Figura 1

Las restantes producciones obvian hacer el análisis, directamente presentan la **síntesis** y realizan la construcción con los instrumentos de geometría. En ellas se realiza la presentación de los pasos que se han seguido utilizando lenguaje coloquial y simbólico, tal como puede observarse en la producción B (Figura 2)

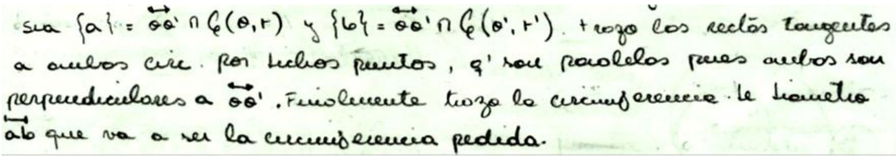


Figura 2

El uso del **método de los dos lugares** sólo se observa en la resolución A, organizada por el método de análisis-síntesis. En cada una de las aproximaciones realizadas se detallan los lugares geométricos implicados en lenguaje simbólico y se halla la solución como intersección de los mismos (Figura 3)

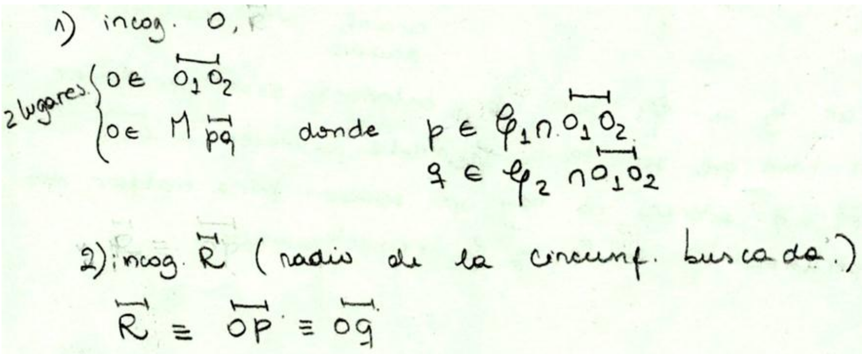


Figura 3

En dos resoluciones se pone de manifiesto la consideración de $R_1 = R_2$, otra opción para los datos. En C aparece al hacer exploraciones para hallar otras soluciones pero no se advierte la intencionalidad de considerar este caso particular como tal, si bien se hace la construcción correspondiente con regla y compás (Figura 4).

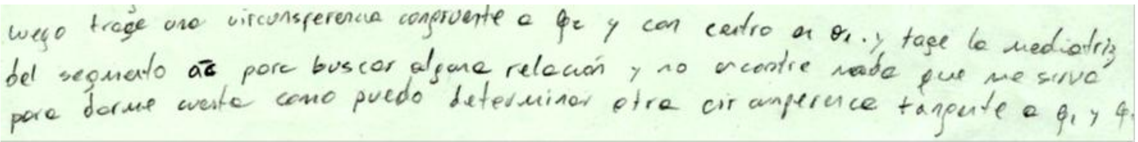


Figura 4

Por el contrario, en la producción A se percibe la intencionalidad de tomar en cuenta este caso, lo cual queda plasmado en una figura de análisis que responde a esta situación (Figura 5).

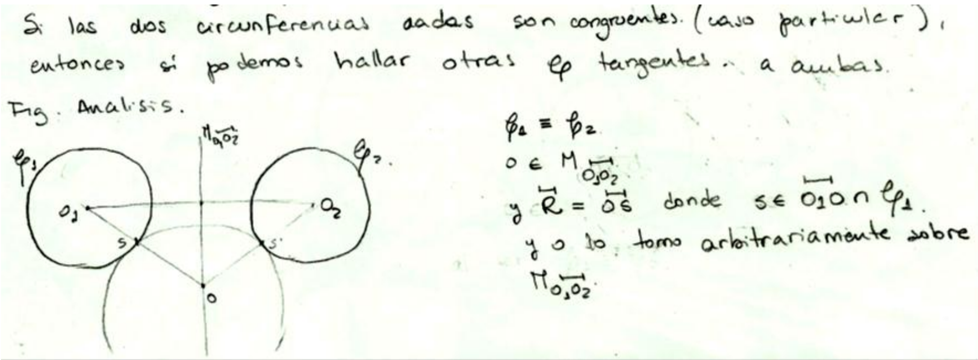


Figura 5

En general se observa un trabajo exploratorio respecto al **caso genérico** de centros no alineados, se agregan condiciones que derivan en una **transformación del problema.** En este sentido se fijan ambos puntos de tangencia y se introducen **elementos auxiliares**, ya sea se dibuja la recta que une los centros o rectas tangentes a las circunferencias dadas, que inciden en la elección de estos puntos de tangencia. En dos producciones (B y A) dichos puntos se encuentran en una recta paralela a la línea de centros (Figuras 6 y 8), y en la restante (C) están sobre una paralela a una de las rectas tangentes dibujadas (Figura 7). En esta última producción también se realiza una nueva transformación del problema, se fija sólo uno de los puntos de tangencia.

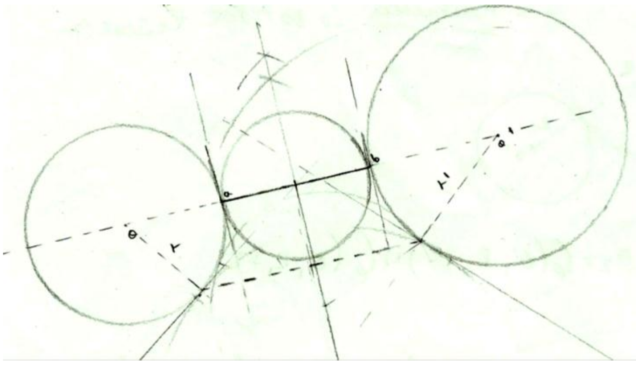


Figura 6

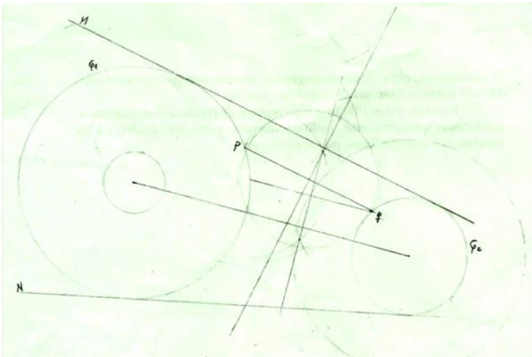


Figura 7

El uso de la heurística **conjeturar y verificar** parece guiar el proceso de las resoluciones. En dos producciones (A y C) se hace explícita la conjetura, indicando que el centro pertenecería a la mediatriz del segmento determinado por los puntos de tangencia. En la otra producción (B) se perciben trazos de arcos de circunferencias, cuyo centro pareciera ubicarse en la mediatriz hallada para el caso particular de centros alineados (Figura 6). En las producciones B y C se observa una constatación empírica de la conjetura, en cambio en A hay una argumentación deductiva para refutarla (Figura 8), lo que lleva a establecer una nueva conjetura: si las circunferencias dadas son congruentes, el centro buscado está en la mediatriz del segmento determinado por sus centros (Figura 5). Como ya se ha indicado, en esta resolución se señala que éste es un caso particular dentro de centros no alineados.

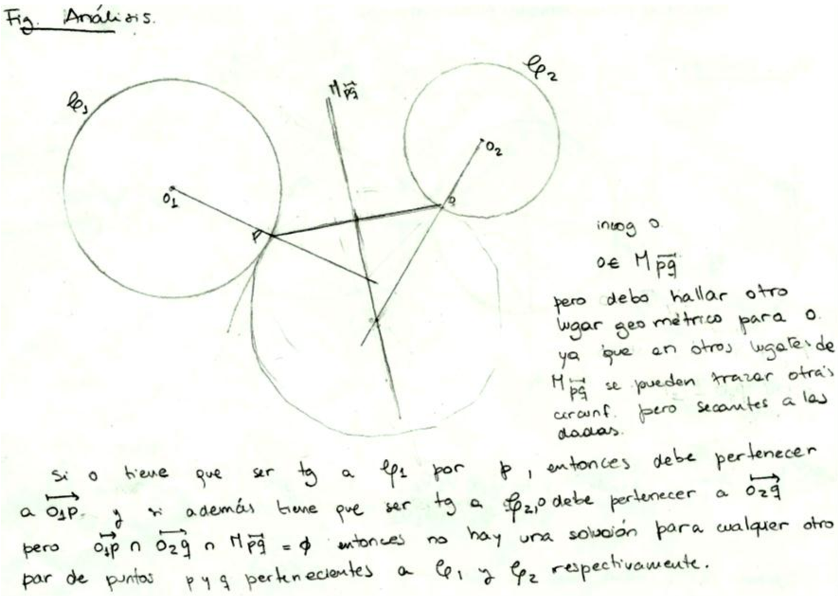


Figura 8

La idea central de los tres planes de solución sería fijar el centro "o", ya sea en la mediatriz del segmento determinado por los centros ($M_{\overline{o_1 o_2}}$) o en la mediatriz de los puntos de tangencia fijados, y estudiar la posibilidad de construcción de la circunferencia buscada. Este procedimiento les impide seguir avanzando en el camino hacia la solución, lo cual se pone de manifiesto en el relato del propio proceso en las producciones A, B y C (Figuras 9, 10 y 11).

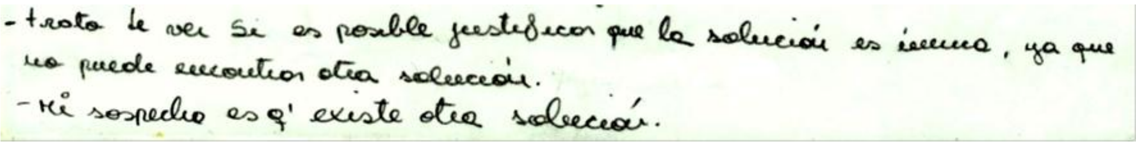

- trato de ver si es posible justificar que la solución es única, ya que no puedo encontrar otra solución.
- Mi sospecha es q' existe otra solución.

Figura 9

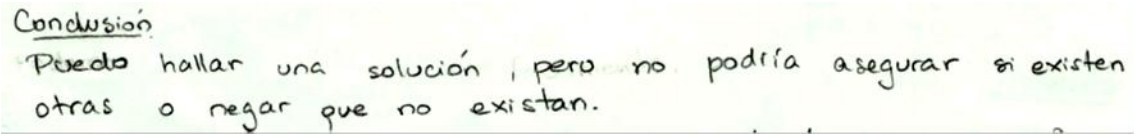

Conclusión
Puedo hallar una solución, pero no podría asegurar si existen otras o negar que no existan.

Figura 10

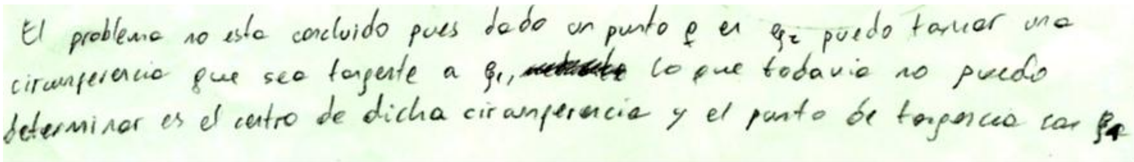

El problema no esta concluido pues dado un punto P en g_2 puedo trazar una circunferencia que sea tangente a g_1, lo que todavia no puedo determinar es el centro de dicha circunferencia y el punto de tangencia con g_1

Figura 11

COMENTARIOS FINALES

El análisis de las resoluciones de los estudiantes de profesorado muestra que la herramienta heurística consideración de casos subyace implícitamente en las producciones. En todas ellas se aborda el caso particular de centros alineados para luego pasar al caso genérico de centros no alineados, en el que se agregan nuevas condiciones al problema (se fijan los puntos de tangencia). En busca de la solución se ubica el centro en lugares geométricos muy particulares, lo que en una de las producciones genera la necesidad de argumentar acerca de la validez de esta conjetura y en las dos restantes, las figuras construidas parecen ser la evidencia para refutarla.

Sólo en una de las producciones se observa una exploración organizada por los métodos partiendo de la figura de análisis, lo cual evidenciaría la transferencia de los conocimientos que fueron objeto de enseñanza a esta nueva situación. Por el contrario, las otras dos se caracterizan por la elaboración de conjeturas a través de exploraciones poco estructuradas y su comprobación empírica usando los instrumentos de geometría.

Consideramos que podría ser una cuestión a tener en cuenta en futuros planes de enseñanza la posibilidad de generar más espacios para la reflexión del propio proceso, evaluando los efectos locales o globales que tienen sobre el mismo el hecho de agregar condiciones al problema o de seguir un plan que no contempla los métodos que son objeto de enseñanza.

Creemos que la situación abierta propuesta ha resultado apropiada para indagar el proceso de resolución de los estudiantes de profesorado. La búsqueda de otras situaciones con potencial heurístico y de nuevas experimentaciones se vislumbra como muy interesante para continuar investigando los procesos de aprendizaje en un contexto de planes de formación de profesores.

REFERENCIAS

- Guillén, G. y Siñeriz, L. (2012). El caso de la circunferencia tangente a otras dos. Análisis de la actuación de una profesora de Magisterio. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F. García, y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*, 331-340. Baeza: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Polya, G. (1962-1965). *Mathematical Discovery*. New York: Wiley & Sons.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Madrid: Síntesis.
- Siñeriz, L., Guillén, G. y Quijano, M. (2013). Hacia un modelo teórico respecto a la enseñanza de las construcciones geométricas que favorezca el trabajo heurístico y las prácticas argumentativas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27 (En prensa). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.