CB 04

HILVANANDO LA CIRCUNFERENCIA INTERMEDIA ENTRE LA INSCRIPTA Y LA CIRCUNSCRIPTA.

María Susana Dal Maso & Marcela Götte.

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.
Cuidad Universitaria Paraje El Pozo s/n. Santa Fe.
mariasusanadalmaso@gmail.com, marcelagotte@gmail.com

Palabras clave: conceptos figurales, circunferencia intermedia, geometría dinámica.

RESUMEN

Nos ocuparemos en esta presentación de un problema de geometría que nos permite trabajar conceptos conocidos como las circunferencias inscripta y circunscripta a un triángulo y conjeturar acerca de propiedades que surgen de pensar intuitivamente la circunferencia intermedia a dichas circunferencias. No desconocemos que muchos errores en los razonamientos pueden tener su origen en la separación entre el aspecto conceptual y figural de los conceptos figurales (Fischbein, 1993). Las imágenes y los conceptos interactúan en la actividad cognitiva del sujeto cooperando en algunos casos o en conflicto en otras situaciones. Pero el desarrollo de los conceptos figurales no es, generalmente, un proceso natural.
Este problema nos permite destacar el protagonismo de un software de geometría dinámica a la hora de “imaginar” posibles propiedades y soluciones.

INTRODUCCIÓN

Trabajamos en esta presentación un problema que llega a nuestras manos durante la preparación de un tutorial para trabajar GeoGebra con un grupo de docentes de escuela secundaria: *Construir un triángulo y la circunferencia intermedia entre la inscripta y la que lo circunscribe.* Este problema es extraído de la guía rápida de GeoGebra www.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf. La construcción de la circunferencia inscripta y circunscripta nos era conocida pero no así la definición de circunferencia intermedia.
Intuitivamente pensamos en una circunferencia que esté entre la circunferencia inscripta y circunscripta, y que tal como sucede con ellas, no se corten.
Pensar una circunferencia intermedia en el triángulo equiángulo es tarea sencilla. Dado que el circuncentro coincide con el incentro, la circunferencia intermedia será concéntrica a estas dos y con un radio mayor que el de la inscripta y menor que el de la circunscripta no tendrán punto en común.
Visualizar una circunferencia intermedia para un triángulo acutángulo u obtusángulo con lápiz y papel, es dificultoso. Preguntas como dónde estará el centro de la circunferencia o cuál será su radio, no tienen una respuesta inmediata.
Reflexionamos acerca de cómo un software de geometría dinámica ayuda a conjeturar la resolución de este problema aunque no alcanza para que la conjetura se convierta en propiedad.
Nuestros objetivos son:

- Proponer un problema geométrico donde el lápiz y el papel no resulta eficaz para realizar conjeturas y buscar soluciones.
- Analizar las potencialidades de las representaciones dinámicas para conjeturar la resolución de un problema geométrico.
- Reflexionar sobre la necesidad de validar las conjeturas halladas con el uso de un software como escalón necesario para el desarrollo del pensamiento matemático.

Aportes teóricos

Las relaciones entre dibujo y objeto geométrico construidas por un sujeto, que constituyen el significado para el sujeto, es lo que Fischbein (1993) llama concepto figural. Si bien el concepto figural es una entidad única, permanece bajo la doble y muchas veces contradictoria influencia de los sistemas que está relacionando (el conceptual y el figural). El sistema conceptual debería controlar los significados, las relaciones y las propiedades de la figura. Muchos errores en los razonamientos pueden tener su origen en la separación entre el aspecto conceptual y figural de los conceptos figurales. Las imágenes y los conceptos interactúan en la actividad cognitiva del sujeto cooperando en algunos casos o en conflicto en otras situaciones. Pero el desarrollo de los conceptos figurales no es, generalmente, un proceso natural.

Laborde (1996) expresa que la geometría enseñada trata de objetos teóricos pero pone también en juego representaciones gráficas cuyo papel en el aprendizaje de la geometría es indiscutible. En cuanto entidad material sobre un soporte, el dibujo puede ser considerado como un significante de un referente teórico. Se puede pensar en un conjunto de pares formados por dos elementos: el primero, el referente; el segundo, uno de los dibujos que lo representa. Ese dibujo se toma del universo de todos los dibujos posibles del referente.

Un dibujo remite a los objetos teóricos de la geometría en la medida en que el que lo lee decide hacerlo, la interpretación evidentemente depende de la teoría con la que el lector elige leer el dibujo, así como los conocimientos de dicho lector.

Según Laborde (1996), "la percepción interviene en la construcción de una interpretación siempre y cuando el lector no tenga sólidos conocimientos teóricos geométricos que le permitan ir más allá de la primera lectura perceptiva". Así se ha podido poner de manifiesto que los aspectos perceptivos del dibujo pueden entorpecer o por el contrario favorecer la lectura geométrica al atraer la atención sobre elementos del dibujo no pertinentes para esa lectura.

La geometría puede ser considerada como el resultado de una modelización del dibujo, sirviendo así de instrumento de producción y de control del dibujo, e incluso de predicción. Pero también, inversamente, el dibujo en geometría puede ser considerado como modelo del objeto geométrico, ofreciendo así un campo de experimentación gráfica.

El dibujo se presta a experimentos que dan cuenta de preguntas planteadas en la teoría, esas preguntas se traducen al dibujo, cuyas respuestas en el dibujo no da una respuesta en la teoría sino que proporciona supuestos, pistas para el trabajo teórico.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que adquirir determinados conocimientos geométricos a partir de un dibujo no es un asunto inmediato ni espontáneo y no ocurre sin intervención específica. En este sentido, el uso de software de geometría dinámica podría sugerir la idea errónea de que mostrar un dibujo y "moverlo" es suficiente para que el estudiante deduzca una determinada propiedad geométrica invariante por el movimiento (Laborde, 1998). Pero la simple sustitución de la regla y el compás tradicionales por comandos en un sistema computacional, por más que este introduzca algunas variantes, no es razón suficiente para esperar mejoras en el aprendizaje de la geometría. Así, es fundamental diseñar o seleccionar actividades para los estudiantes encaminados a relacionar información geométrica teórica con información observada en un dibujo que se mueve. (Recio, 1999)

La circunferencia intermedia.

¿Existe el concepto de circunferencia intermedia? ¿Cómo se define?

Decidimos profundizar lo que intuitivamente consideramos como solución a este problema: *Construir un triángulo y la circunferencia intermedia entre la inscripta y la que lo circunscribe.* Para ello, es bueno comenzar por algunos casos.

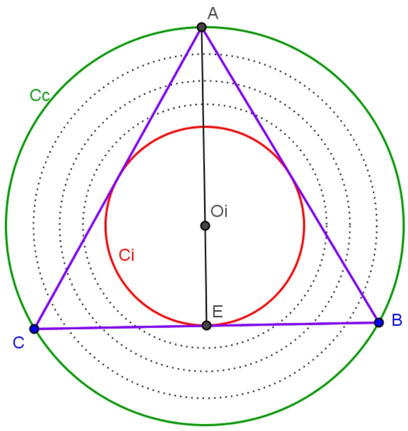

Figura 1

Si consideramos un triángulo equiángulo y construimos la circunferencia circunscripta y la circunferencia inscripta a dicho triángulo, podemos pensar en cuántas circunferencias podemos construir entre ellas con centro O.

Por ser h altura y mediana del triángulo ABC, el centro de la circunferencia inscripta Oi coincide con el baricentro. Por propiedad de las medianas, $|OiE| = \frac{1}{3}h = ri$ y $|OiA| = \frac{2}{3}h = R$. Cualquier circunferencia de centro O y radio mayor que $\frac{1}{3}h$ y menor que $\frac{2}{3}h$ está entre Ci y Cc. (Figura 1).

Tomemos ahora triángulos acutángulos. El circuncentro es siempre interior a todo triángulo acutángulo. El incentro es interior a todo triángulo. ¿Cuántas circunferencias podremos construir entre la circunferencia inscripta y la circunferencia circunscripta? ¿Cuál de todos los puntos del plano será el centro?

Con dos puntos O cualesquiera tenemos:

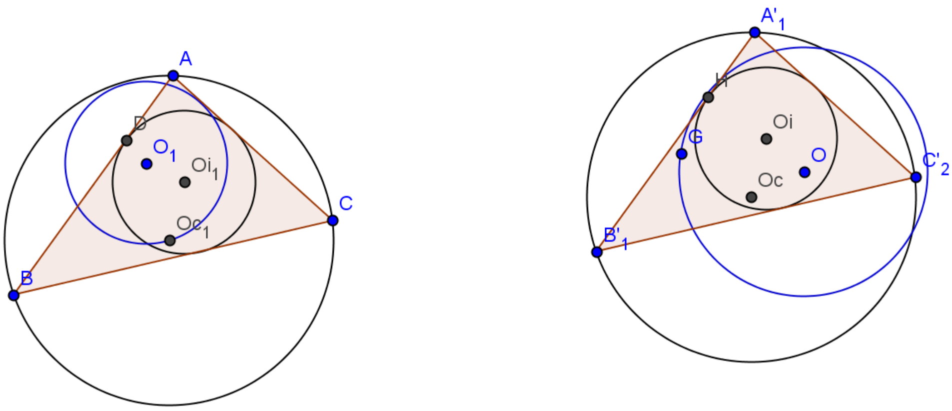

Figura 2

Observemos que, por inspección, utilizando GeoGebra, con los puntos elegidos no es posible, en nuestro ejemplo, encontrar circunferencias de centro O que estén entre las circunferencias inscripta y circunscripta.

Si definimos ese centro O como el punto medio entre el circuncentro y el incentro, notamos que encontramos infinitas circunferencias entre la inscripta y la circunscripta.

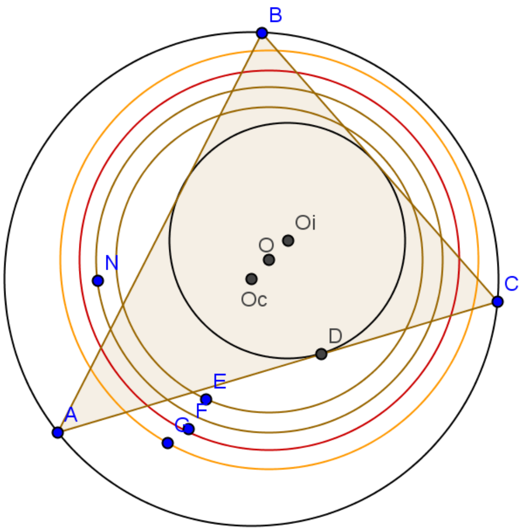

Figura 3

Siendo el radio variable, no tenemos determinada la circunferencia intermedia. (Figura 3)
Si el triángulo ABC es obtusángulo, sabemos que el circuncentro está fuera del triángulo y vemos, utilizando el software, que la circunferencia inscripta tiende a ser tangente interior a la circunscripta en el vértice del ángulo obtuso. Nunca serán tangentes ya que la circunferencia inscripta nunca pasará por el vértice del triángulo. (Figura 4).

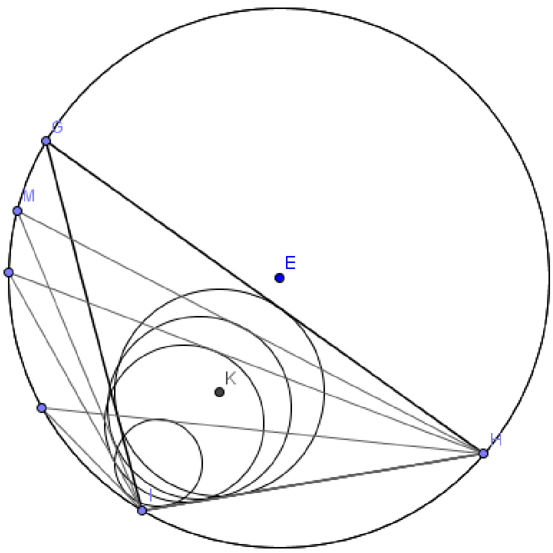

Figura 4

¿Será posible hallar la intermedia en este caso?
Nuevamente, las herramientas del software nos ayudan a visualizar una conjetura: parece que si es posible. Acercándonos al que parece el punto de tangencia vemos que tomando a la

intermedia con centro en el punto medio del circuncentro e incentro y radio, el promedio de los radios de las circunferencias inscriptas y circunscriptas, éstas nunca se cortan. (Figura 5 y 6)

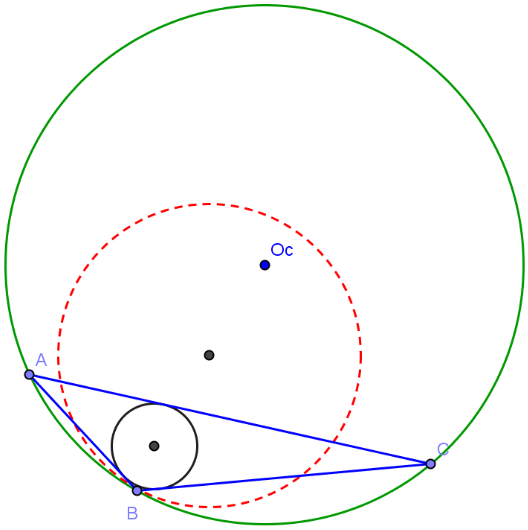

Figura 5

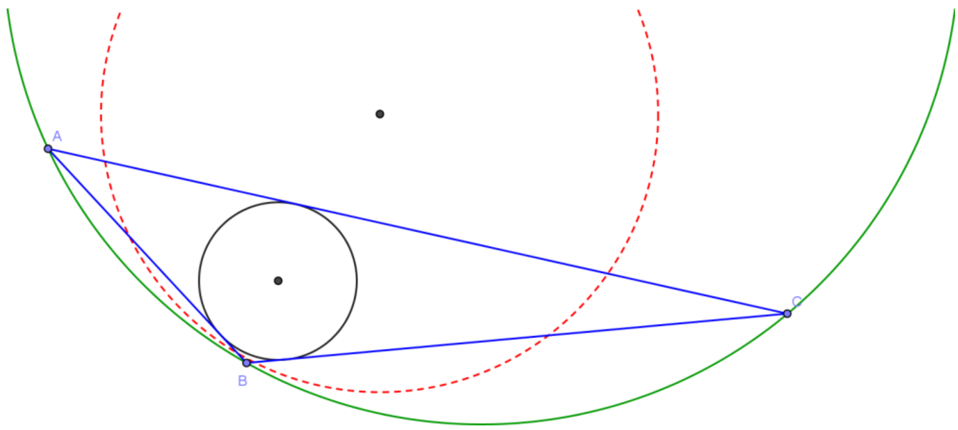

Figura 6

Con todo lo conjeturado, decidimos definir la circunferencia intermedia.
Definición de circunferencia intermedia:
Sea ABC un triángulo. Denominaremos con Cc a la circunferencia circunscripta de ABC con centro Oc y radio R y con Ci a la circunferencia inscripta a ABC con centro Oi y radio r. Definimos circunferencia intermedia *C* de ABC a la circunferencia de centro O, punto medio de $\overrightarrow{OcOi}$ y radio $\frac{R+r}{2}$.

Ahora es sencillo con lápiz, papel y un compás o GeoGebra encontrar el centro y el radio de la circunferencia intermedia, conociendo el centro y el radio de la circunferencia circunscripta y de la circunferencia inscripta. Nos resta investigar si la circunferencia así construida nunca interseca a la circunferencia circunscripta y a la circunferencia inscripta, es decir, si la circunferencia intermedia así definida, está siempre entre las otras dos.
¿Qué debemos probar? ¿Cómo explicitamos coloquialmente la propiedad?
Propiedad de las circunferencias intermedias:
La distancia del centro de la circunferencia intermedia a cualquier punto de la circunferencia inscripta es menor que el radio de la circunferencia intermedia.

La distancia del centro de la circunferencia intermedia a cualquier punto de la circunferencia circunscripta es mayor que el radio de la circunferencia intermedia.
Demostración:
Sea K un punto cualquiera de la circunferencia inscripta al triángulo ABC. Probaremos que $|\overline{OK}| < \frac{R+r}{2}$

$|\overline{OK}| \leq |\overline{k\,O\iota}| + |\overline{O\iota\,O}| = r\iota + \frac{|\overline{O\iota Oc}|}{2}$ < ri + $\frac{R-r}{2}$ = $\frac{r+R}{2}$. Luego $|\overline{OK}| < \frac{R+r}{2}$ q.q.p.

Observación: Como por definición de circunferencia inscripta y circunferencia circunscripta de un triángulo, Ci es interior a Cc y no tienen ningún punto común tenemos que la distancia entre los centros es menor que la diferencia de sus radios;
$0 < |\overline{O\iota Oc}| < R - r$

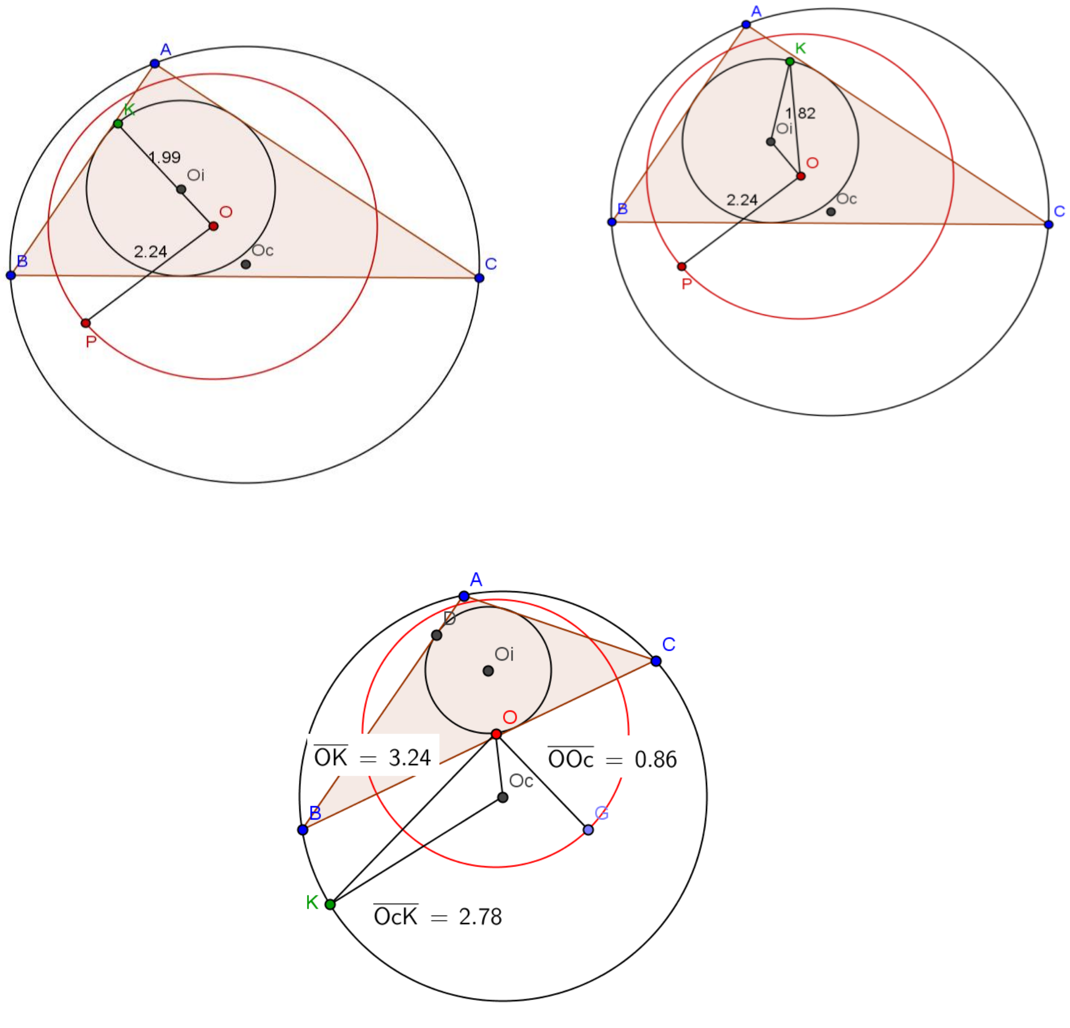

Figura 7

Sea K un punto cualquiera de la circunferencia circunscripta al triángulo ABC. Probaremos que $|\overline{OK}| > \frac{R+r}{2}$ (Figura 7)
Sabemos que $|\overline{OcK}| \leq |\overline{KO}| + |\overline{OOc}|$, luego
$|\overline{KO}| \geq |\overline{OcK}| - |\overline{OOc}| = R - \frac{|\overline{O\iota Oc}|}{2} > Rc + \frac{r-R}{2} = \frac{R+r}{2}$. Luego $|\overline{OK}| > \frac{R+r}{2}$ q.q.p

Observación: Como $|\overline{O\iota Oc}| < R - r$, $\frac{|\overline{O\iota Oc}|}{2} < \frac{R-r}{2}$ y $\frac{|\overline{O\iota Oc}|}{2} > \frac{r-R}{2}$.
Otra forma de demostrarlo:
Sea K un punto de Cc.

$$|KO| \geq |KOc| - |OOc| = R - \frac{|OiOc|}{2} = R - \frac{\sqrt{R^2 - 2Rr}}{2} >$$
$$R - \frac{\sqrt{R^2 - 2Rr + r^2}}{2} = R - \frac{R - r}{2} = \frac{R + r}{2}$$

Utilizamos en la demostración que la distancia al cuadrado entre el incentro y circuncentro de un triángulo es igual al cuadrado del radio de la circunferencia circunscripta menos el doble producto de los radios de las circunferencias inscripta y circunscripta y que la función raíz cuadrada es estrictamente creciente.
Sea M un punto de Ci.

$$|MO| \leq |MOi| + |OOi| = r + \frac{|OiOc|}{2} = r + \frac{\sqrt{R^2 - 2Rr}}{2} <$$
$$r + \frac{\sqrt{R^2 - 2Rr + r^2}}{2} = r + \frac{R - r}{2} = \frac{R + r}{2}$$

Utilizamos en la demostración que la distancia al cuadrado entre el incentro y circuncentro de un triángulo es igual al cuadrado del radio de la circunferencia circunscripta menos el doble producto de los radios de las circunferencias inscripta y circunscripta y que la función raíz cuadrada es estrictamente creciente.
Otra forma de enunciar la propiedad:
La distancia de cualquier punto de la circunferencia intermedia al centro de la inscripta al triángulo (incentro) es mayor que el radio de la inscripta.
La distancia de cualquier punto de la circunferencia intermedia al centro de la circunscripta al triángulo (circuncentro) es menor que el radio de la circunscripta.

¿Pasamos a las 3D? Para seguir pensando…

Si la visualización en el plano tiene sus complejidades, ni que hablar del espacio. Las representaciones del espacio en el plano necesitan de ciertas convenciones que no todos conocen a la hora de resolver problemas. Podemos reformular este problema en 3D de la siguiente forma: *¿Es posible hallar la superficie esférica intermedia entre la inscripta y la circunscripta a un tetraedro cualquiera? ¿Dónde estaría el centro? ¿Cuál sería el radio?*
También podríamos pensar como éste el problema inicial y que el problema de la circunferencia intermedia sea una simplificación de éste donde se conjetura y se visualiza la resolución en 2D. (Figura 8)

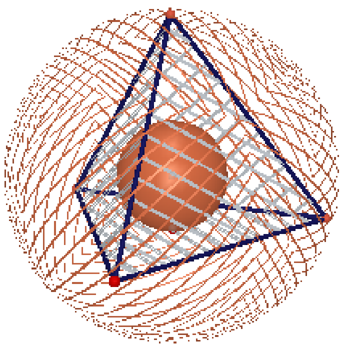

Figura 8

CONCLUSIONES

Es interesante trabajar problemas geométricos donde el lápiz y el papel no resulten suficientes para realizar conjeturas y buscar soluciones. Las representaciones gráficas cumplen un papel destacado en la interpretación de conceptos y propiedades geométricas y creemos que, en este sentido, es necesario fomentar el uso de software de geometría dinámica. Tarea no sencilla es la del docente inquieto que busca problemas o secuencias adecuadas a este propósito donde el uso de un software sea indispensable para resolver la situación planteada. Así como en otro tiempo el debate se centraba en permitir el uso o no de la calculadora en la clase de matemática, sabemos que todavía hoy nos cuesta incorporar el uso de las netbook en la tarea del aula. A veces, se incorpora su uso pero el desafío es no hacer lo mismo pero con otras herramientas. Por ejemplo, usar el software de geometría dinámica para realizar las mismas construcciones que se realizan con regla y compás.

Con este problema intentamos haber puesto de manifiesto que no basta con realizar un dibujo y “moverlo” para conjeturar, como sostiene Laborde, sino que es necesario poner en juego conocimientos geométricos, relacionar información geométrica teórica con información representada de forma dinámica. Como se señaló, adquirir determinados conocimientos geométricos a partir de un dibujo no es un asunto inmediato ni espontáneo y con este problema quisimos mostrar que a partir de las representaciones dinámicas del software se puede llegar a conjeturar o hallar pistas acerca de la solución del problema pero es necesario ir más allá de esa primera aproximación.

REFERENCIAS

- Barroso Campos, R. *Útiles simples para la resolución de problemas de triángulos.* http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/400Ped1utiles.htm
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. En *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162
- Laborde, C. (1996). Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría. En *Investigación y didáctica de las matemáticas*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid. 67-85
- Laborde, C. (1998). Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría. En Puig,L (Ed): *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática. Una empresa docente*. 33-48
- Puig Adam, P. (1986). *Curso de geometría métrica*. Madrid: Euler.
- Recio, T. (1999). Compass avoidance. En *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 53, 59-66.