

T 09**DIFERENTES SIGNIFICADOS, FUNCIONAMIENTOS Y RELACIONES DEL
“VOLUMEN” COMO OBJETO A ENSEÑAR**

**Etchegaray, Silvia Catalina, Etchegaray, Mabel Carolina, Ferrocchio, María Eugenia,
Bovio, Ana Carolina**

**Universidad Nacional de Río Cuarto, Escuela Normal Superior José Manuel Estrada,
Escuela Normal Superior Justo José de Urquiza**

setchegaray@exa.unrc.edu.ar

Palabras claves: prácticas interdisciplinarias, distintos significados, volumen

RESUMEN

Nuestro punto inicial es reconocer que, cuando hablamos de lo que deberían saber los maestros o profesores en Matemática, es importante reconocer aquellos objetos que se deben “aprender” para ser “enseñados”. Las operaciones básicas, la numeración, la geometría, la medida y algunos más, deberían tener en la formación inicial/continua el sentido que le otorga pensarlos como “objetos de enseñanza”. Por ello consideramos necesario el planteo de nuevas preguntas para re-visitar estos objetos: ¿Por qué son necesarios y se los debe enseñar? ¿Qué tipo de problemas resuelven? ¿Con cuáles otros conceptos, operaciones, propiedades, se los relaciona? ¿Qué tipo de argumentación valida su funcionamiento en diferentes situaciones? ¿Qué lenguaje representa y operativiza sus principales funciones y usos? ¿Qué contextos dejan al descubierto el / los significados pretendidos? ¿Qué dialécticas intra e interdisciplinarias permiten cambios y evolución de significados? Estos cuestionamientos nos enfrentan a una complejidad sistémica de los procesos de enseñanza y aprendizaje en los que se deben diferenciar significados, funcionamientos y relaciones que sólo el problema de su enseñanza pone en evidencia.

Esto es lo que proponemos para este taller, intentando que se pueda objetivar cómo en este caso el volumen, pasa a enriquecerse con la mirada de la enseñanza.

FUNDAMENTACIÓN

La propuesta de este taller es el resultado de un proyecto de investigación interinstitucional. Nuestro proyecto surge al compartir preocupaciones comunes entre distintas instituciones de nuestra región que plantean la necesidad de repensar aspectos curriculares y metodológicos de los espacios que están destinados a fortalecer la formación matemática de futuros docentes en el ámbito de la formación inicial. Nuestro punto de partida fue reconocer que no se trata de los mismos objetos (los que se deben “aprender” para luego “enseñar”) cuando hablamos de lo que deberían saber los futuros docentes. Las operaciones básicas, la numeración, la geometría, la medida y algunos más, deberían tener en la formación inicial el sentido que le otorga pensarlos como objetos de enseñanza. Por ello es que, en este marco de cuestionamiento y para estos espacios curriculares, consideramos necesario el planteo de nuevas preguntas para re-visitar estos objetos; tales como: ¿Por qué son necesarios y se deben enseñar en la formación inicial de maestros, objetos como el de “medida”, o el de “volumen”, o “superficie”? ¿Qué

tipo de problemas resuelven? ¿Con cuáles otros conceptos, operaciones, propiedades, definiciones, se les asocia? ¿Qué tipo de argumentación valida su funcionamiento en diferentes situaciones? ¿Qué lenguaje representa y operativiza sus principales funciones y usos? ¿Qué contextos dejan al descubierto el o los significados que se pretenden generar? ¿Qué dialécticas intra e inter disciplinares permiten cambios y evolución de significados de los objetos estudiados? (Etchegaray, 2010) Estos cuestionamientos, nos enfrentan a una complejidad sistémica de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en los que: detransparentar los aspectos, significados, funcionamientos, relaciones que sólo el problema de su enseñanza ponen en evidencia, se tornan necesario para superar la fragmentación y atomización a las que los contenidos están generalmente sometidos en las presentaciones curriculares, bibliográficas y/o trabajos áulicos.

Esto es lo que propusimos estudiar, analizar, indagar para intentar proponer alternativas en torno al aprendizaje de "la medida" como conocimiento a enseñar. Más específicamente, nuestro contexto de reflexión, desde el cual se produjeron reflexiones didáctico-matemáticas, se recortó en torno a una de las magnitudes "menos cuidadas" desde los lugares antes citados en cuanto al tipo de actividades que se proponen para su enseñanza: "el volumen". Este recorte del problema didáctico de la enseñanza y el aprendizaje del volumen, tiene un interés especial en el ámbito de la Didáctica de la Matemática dado su complejidad epistémica la cual es muchas veces descuidada en las transposiciones didácticas circulantes. En ese sentido al sumarle a los trabajos realizados un enfoque interdisciplinario profundizando las dimensiones ontológica y semiótica posibilitó avanzar en la detección -fundamentalmente- de potenciales conflictos semióticos y por ende en las explicaciones de problemas de aprendizaje.

El marco teórico que nos permitió abordar, desde este lugar, esta problemática es el Enfoque Onto-Semiótico sobre la Cognición matemática (EOS), cuyo principal referente e iniciador es el Dr. Juan Diaz Godino (Granada, España). En diversos trabajos, Godino y colaboradores (Batanero, Contreras, Font, Luque, Ordóñez, Wilhelmi) han elaborado un sistema de nociones teóricas y categorías sobre la naturaleza, origen y significado de los objetos matemáticos desde una perspectiva educativa, tratando de articular de manera coherente: la dimensión epistémica (significados institucionales o socioculturales), o sea lo que se ocupa del desarrollo de los saberes pensados en las diferentes instituciones; con la dimensión cognitiva (significados personales, psicológicos o individuales) que se ocupa de cómo el alumno conoce o más específicamente en este marco se trata de explicar ¿Por qué NO se conoce? Estas nociones y categorías nos ayudaron a operativizar y profundizar diversas acciones de investigación sobre problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

OBJETIVOS DEL TALLER

Convencidos de que un aspecto esencial de la formación docente es vivenciar procesos de producción matemática en un espacio de discusión y trabajo colectivo es que nos proponemos:

- Desnaturalizar, desde la dimensión epistémica y explicitando su relatividad contextual, la noción de volumen al pensarla como objeto a enseñar.
- Comprender la confusión del concepto de volumen con el de la capacidad como fuente de potenciales conflictos semióticos.
- Acercar los significados personales a los significados institucionales de un saber de gran complejidad relacional y emergente de diferentes contextos disciplinares.

PROPUESTA DEL TALLER

Como resultado del proyecto de investigación se presenta esta propuesta organizada bajo la modalidad de taller y planificada en diferentes momentos que se detallan a continuación.

Momento 1: Se trabaja en grupos de tres o cuatro integrantes. A cada grupo se le da un cubo de color rojo de 6,5 cm de arista y un prisma recto de color azul de 10 cm de alto y base rectangular de 6 cm de largo por 5 cm de ancho, regla, tapitas, vaso graduado, arroz, polenta y vasosⁱ. El objetivo de la primera situación es reconocer el significado personal de los alumnos sobre volumen. Se reparte una hoja para que individualmente trabajen la siguiente consigna:

Primera Situación:

- a) ¿Cuál es la caja que tiene mayor volumen?
- b) Explica aquí, detalladamente, como obtuviste la respuesta.

Momento 2: Una vez finalizada la primera situación se entrega la segunda consigna cuyo objetivo es poder detectar y analizar la técnica seleccionada para el cálculo del volumen recuperando significados personales.

Segunda Situación:

- a) Selecciona una caja y averigua el volumen.
- b) Explica aquí por qué la elegiste y describe el procedimiento utilizado.

Momento 3: Seguidamente se entrega la tercera situación y un afiche, donde se pide explícitamente que “hablen” sobre el volumen.

Tercer Situación:

¿Cómo explicarías a un compañero qué es el volumen?

Momento 4: Una vez finalizada las tres situaciones se organiza una puesta en común donde en principio se discuten sobre las dos primeras situaciones y los procedimientos, argumentos y relaciones utilizadas. Por último para la tercera situación, se organiza la puesta en común con el objetivo de plantear contraejemplos para cada caracterización planteada.

Pueden surgir las siguientes “explicaciones/definiciones/caracterizaciones”:

- “Es la cantidad de sustancia contenida en un recipiente”. En este caso se puede proponer como contraejemplo dos cuerpos con igual volumen pero con distinta capacidad.
- “Es la capacidad o espacio vacío que hay dentro de un cuerpo”. En este caso se puede proponer como contraejemplo un cuerpo compacto como por ejemplo un trozo de madera.
- Se hace referencia al volumen como un procedimiento que dice el espacio que hay dentro de un cuerpo. Aquí se puede mostrar un cuerpo irregular, como una jarra de yogurt.

i Esta actividad fue extraída de la Tesis de maestría cuya autora es la Prof.

- Se hace referencia al volumen como fórmula de cálculo (Largo x Ancho x Alto). En este caso se puede proponer una esfera (para la cual se cuenta con otra fórmula) y el cuerpo irregular usado anteriormente; el objetivo es mostrar que no todos los cuerpos tienen una fórmula explícita y conocida para su volumen.
- “Es el lugar o espacio que ocupa un cuerpo”. En este caso se puede mostrar un par de anteojos e interrogar cómo se calcularía el volumen de este objeto. Puede, ante esto, surgir la posibilidad de calcular su volumen con la cantidad de líquido desplazado al sumergirlos en un recipiente lleno, o sea una nueva técnica que significa el volumen desde otro lugar.

Con estas tres primeras situaciones se pretende ir construyendo el significado más holístico de volumen, lo que involucra el uso de distintas técnicas según la situación. Dado que toda definición tiene asociada una red de conceptos, procedimientos, argumentaciones, formas de expresarse diversas y adecuadas a cada situación; queda claro que es muy difícil lograr una formulación que atrape toda la práctica. Esto queda visible cuando se presenta el contraejemplo con los anteojos para la definición que pareciera ser la “más completa”. Surgen así nuevos interrogantes que enriquece indiscutiblemente esta construcción: ¿será posible atrapar en un “todo complejo” los diferentes significados que hacen y permiten usar el objeto volumen? Sobre él se trabajara en una segunda instancia en el Taller.

Síntesis del estudio epistémico sobre el objeto “volumen”

Dar respuesta a la cuestión sobre si es posible estructurar en un todo complejo y coherente distintas definiciones de la noción de volumen emergentes de diferentes sistemas de prácticas en contextos de uso determinados, nos llevó a analizar distintos materiales teóricos y libros de textos escolares, lo cual nos permitió distinguir las siguientes definiciones de la noción de volumen que responden a su carácter de noción interdisciplinaria, entre la Matemática y la Física:

Definición 1: el volumen es la cantidad de espacio ocupado por un cuerpo. (Volumen externo).

Definición 2: el volumen es el espacio vacío con posibilidad de ser llenado. (Volumen interno).

Partimos de que: cada definición de volumen introducida es un emergente de un sistema de prácticas matemáticas relativo a un campo de problemas determinado, que incluye objetos lingüísticos, nociones y técnicas operatorias específicas. Pero a su vez son los contextos de uso los que posibilitan la emergencia de significados diferentes que responden a una misma definición de volumen, en este sentido es que se han identificado a partir del estudio realizado los contextos físico, pre-aritmético, geométrico, analítico/funcional.

- **Contexto físico:** La definición 2 de volumen, entendido como el espacio vacío con posibilidad de ser llenado, es un emergente de un contexto físico relativo a un campo de problemas determinado, que incluye objetos lingüísticos, nociones y técnicas operatorias específicas. En este contexto se interpreta el volumen como una *magnitud física unidimensional* posible de medir, estimar, comparar, etc. Su cálculo consiste en el conteo de unidades de volumen, lo que implica el uso de estructuras aditivas. El tipo de problemas que favorecen el uso de esta definición son aquellos que involucran cuerpos con posibilidad de ser llenados y permiten el empleo de técnicas relativas al transvasado, llenado, comparación, medición directa, entre otros.

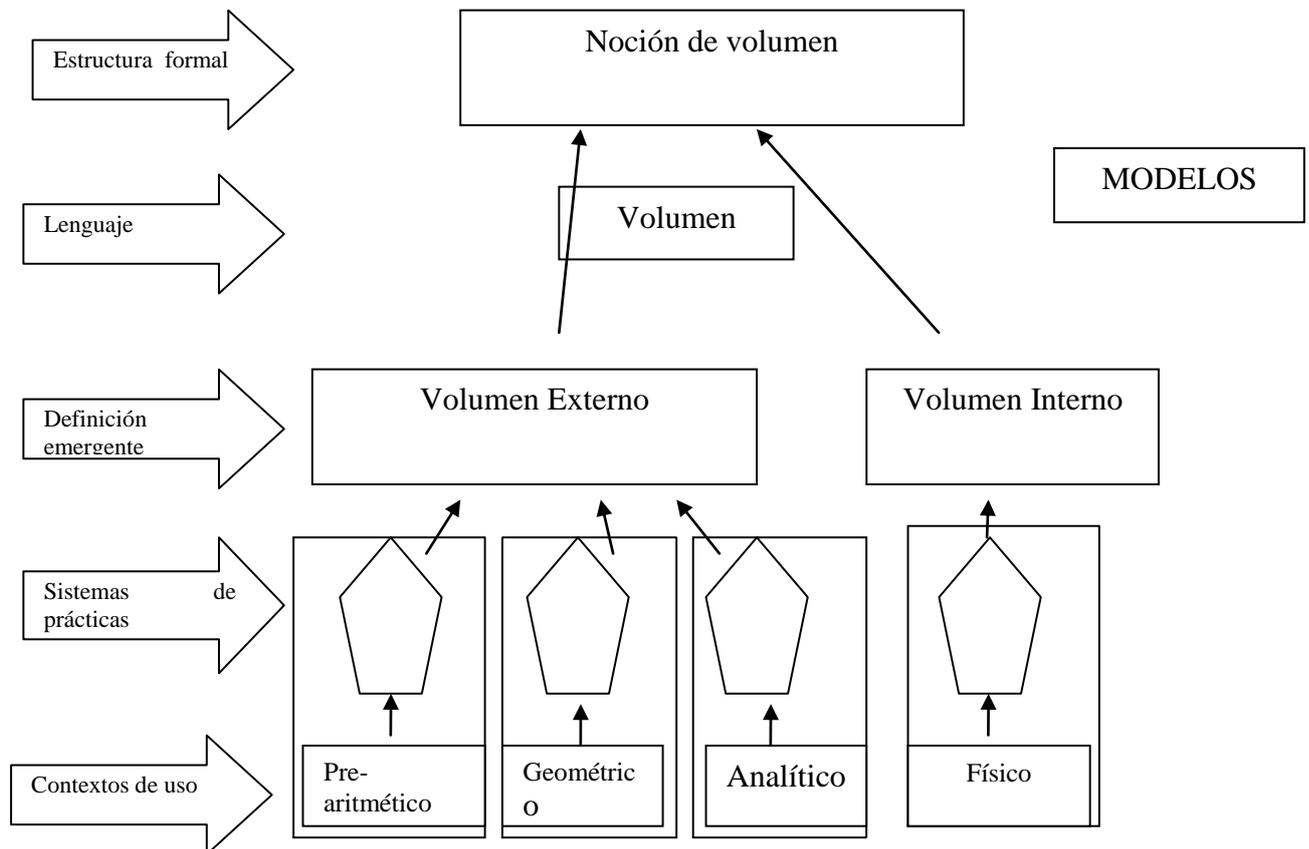
En este sentido se entiende el volumen asociado a la idea de capacidad y es frecuente que en la vida diaria se utilicen medidas de volumen (entendido como la definición 1) para medir capacidades.

- **Contexto matemático:** Dentro de este contexto de uso es posible identificar sub-contextos que permiten la emergencia de diferentes significados asociados a una misma definición: contexto pre-aritmético, geométrico y analítico.
- **Contexto Pre-Aritmético:** En este contexto se reduce al volumen a un procedimiento de cálculo, es decir se asocia dicha noción exclusivamente a un “modo de hacer” para obtener su medida. Por ejemplo, se calcula “largo x ancho x alto” o “Sup de la base x altura”. El volumen se plantea como una magnitud matemática tridimensional calculable como producto de tres longitudes o producto de una superficie por una longitud. Esto supone un análisis físico-geométrico del espacio y una aplicación de este análisis en lo numérico y lo dimensional. Este último concepto implica una concepción tridimensional del volumen, considerando al mismo dentro del tipo de problemas de “Producto de medidas” en el cual dos espacios de medidas se componen para dar lugar a un tercer espacio de medida (Estructuras Multiplicativas - Vergnaud y Ricco (1985)). De este modo, el volumen es un concepto multiplicativo de tipo producto en el que intervienen tres dimensiones (largo, ancho y alto). El tipo de problemas asociado a este contexto de uso, son aquellos que involucran el cálculo del volumen de cuerpos regulares (con fórmulas conocidas o de fácil obtención, o posibles de equidescomponer en cuerpos de ese tipo) y en los cuales no es posible obtener la capacidad del mismo, ya sea por razones de imposibilidad “real” de hacerlo o por las características físicas del cuerpo. Este contexto es considerado pre-aritmético -y no aritmético- porque se entiende la diferencia entre un trabajo referido a las técnicas de cálculo de un estudio sobre las propiedades de los números -distinción ya realizada por los griegos-.
- **Contexto geométrico:** En este contexto, más allá que también genera una reducción de significados asociando esencialmente el volumen a una técnica, se piensa en el cálculo del volumen de ciertos cuerpos a partir de un conteo eficiente de unidades de la misma naturaleza de aquello que se pretende medir y esto genera también algunas propiedades del volumen. En efecto, este tipo de procedimientos, retomando a Vergnaud (1983), se los denomina unidimensionales, ya que el cálculo radica en un conteo (de unidades de volumen). Se presta a la medición directa, la comparación y demanda el uso de estructuras aditivas. Este contexto trabaja o se sustenta fuertemente de las propiedades de tridimensionalidad de los cuerpos. Esta característica es la que lo separa y -a la vez- relaciona esta idea con el modelo multiplicativo asociado al contexto pre-aritmético. Los tipos de problemas que permiten el empleo de estas técnicas son aquellos que utilizan representaciones de un objeto tridimensional en el plano y donde se observan unidades de medida como pueden ser representaciones de cubos o problemas que impliquen el uso de material concreto como bicubos. Esta técnica tiene su esencia en el cálculo del área de diferentes figuras planas donde se utilizan transformaciones de romper y rehacer que convierten a la figura en un rectángulo equivalente. Este método, llamado de equidescomponibilidad, se puede aplicar en tres dimensiones para ciertos cuerpos, como los prismas, que se pueden transformar en paralelepípedos equivalentes mediante transformaciones de romper y rehacer. Esto indica que si bien el área y el volumen comparten propiedades comunes, el volumen no puede pensarse como una extensión del área (propiedad fundamental del volumen).
- **Contexto analítico/funcional:** En este contexto la interpretación del volumen está regulada por un procedimiento de cálculo, para el cual es necesario conocer herramientas de análisis funcional, lo que nos permite generar otras propiedades. En este sentido los

tipos de problemas que se plantean involucran el cálculo del volumen de sólidos de revolución, esto es sólidos obtenidos al rotar una región del plano alrededor de una recta ubicada en el mismo. El cálculo del volumen aparece como una aplicación de la integral definida, donde el volumen se asocia al valor de la integral de una función definida sobre una región en el plano (bidimensional) con valores reales (lo que vendría a ser la altura).

A diferencia de lo que sucede en el contexto pre-aritmético, donde para el cálculo del volumen de ciertos cuerpos se emplean fórmulas que requieren la medida de alguna magnitud, en este contexto debido a que los cuerpos considerados son sólidos de revolución las fórmulas de cálculo involucran funciones generatrices, razón por la cual no se debe medir nada sino que se debe encontrar y/o definir la función que le da origen al cuerpo.

A continuación se muestra una manera de esquematizar la diversidad de objetos asociados a la noción de volumen. Cada definición representa un objeto emergente de sistemas de prácticas en determinados contexto de uso que ponen en relación elementos diferentes (nociones, propiedades, procedimientos, etc). El modelo intenta estructurar de forma coherente los diferentes contextos de uso, las prácticas matemáticas relativas a los mismos y los objetos emergentes de tales prácticas; constituyendo una red o configuración epistémica local asociada a un contexto de uso específico.



Ahora bien, para determinar si es posible estructurar estas definiciones de forma coherente y significativa en los procesos de enseñanza es necesario determinar relaciones entre los diferentes contextos de uso. Un aspecto que nos permite entender las relaciones entre los contextos de uso físico y matemático es el **tipo de problemas, las relaciones** entre los diferentes elementos de significado y las características de **los objetos emergentes** de los respectivos sistemas de prácticas. Un ejemplo de esto lo constituyen los problemas que permiten trabajar con el “volumen desplazado” pues, en estos casos, se entiende el volumen

del objeto como el espacio que ocupa (objeto emergente) pero para obtenerlo (procedimiento) se utiliza el volumen del líquido desplazado, lo que involucra un contexto físico de medición. Cabe destacar entonces que hay una red de modelos asociados a la noción de volumen y por lo tanto es necesario que la persona pueda “involucrarse” en los diferentes modelos a partir de los problemas que se les planteen, reconozca las limitaciones propias de cada uno y pueda establecer nexos/continuidades/discontinuidades entre dichos modelos. Por lo tanto, que una persona comprenda “el volumen” significa que es capaz de diferenciar los diferentes modelos de volumen, que los puede relacionar y que puede afrontar las necesidades operativas y discursivas con relación a la noción de volumen en los diferentes contextos de uso al momento de tener que resolver distintos problemas. Con este trabajo hemos descriptado algunos elementos de significado y algunas de las relaciones aunque obviamente no todas, para de este modo poder “pensar” en una síntesis sintáctica del objeto, lo que en el EOS sería caracterizar el holo-significado de la noción de volumen. Este marco epistémico tiene como objetivo convertirse en marco de referencia institucional para ciertos análisis didácticos que permitan determinar con cierto grado de “idoneidad” epistémica la fortaleza didáctico-matemática de determinadas propuestas curriculares. Es en este sentido que como **tercera instancia de trabajo en el Taller** proponemos realizar colectivamente un primer análisis de propuestas editoriales que circulan en la actualidad en torno a la enseñanza del “volumen”.

REFERENCIAS

- Argentina, Instituto Nacional de Formación Docente (2009). *Encuesta para docentes de los Institutos de Formación Docente a cargo de Matemática, Enseñanza de Matemática y de Didáctica/Enseñanza de Matemática*. Buenos Aires: Sadovsky, P.
- Bovio, A. C., Etchegaray S. & Ortiz F. (2008). *El análisis del grado de idoneidad epistémica sobre el funcionamiento de la dialéctica matemática-física en situaciones específicas, planteadas en libros de textos del nivel secundario* (Análisis del grado de representatividad epistémica y cognitiva de procesos de enseñanza y aprendizaje en las matemáticas). Río Cuarto, Argentina: Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto.
- Contreras, A. (2005). Algunas aplicaciones de la Teoría de las Funciones Semióticas a la Didáctica del Análisis Infinitesimal. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, Vol. 25(2), 151-186.
- Etchegaray, S. (2010). Reflexiones y aportes para ayudar a re-pensar la Enseñanza de las Matemáticas. *Yupana*, N5.10, 11-23.
- Godino, J. D. (1994). Significado Institucional y Personal de los objetos matemáticos. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, Vol. 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D. (2002). Un Enfoque Ontológico y Semiótico de la cognición matemática. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, Vol. 22 (2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2003). *Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada, España: Universidad De Granada.
- Godino, J. D. (2004). *Teoría De Las Funciones Semióticas: Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Godino, J. D. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*. Vol. 26 (1), 39-88.

- Godino, J. D. (2006). Análisis Onto-Semiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 9 (Especial), 133-156.
- Godino, J. D. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM. The International Journal On Mathematics Education*, Vol. 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana De Educación Matemática*. Vol. 20, 13-31.
- Godino, J. D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Ponencia presentada en XIII CIAEM-IACME. Recife, Brasil.
- Godino, J. D., Wihelmi M. R. & Lacasta E. (2004). *Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igual en números reales*. Pamplona, España: Universidad Pública de Navarra.
- Maza, M. E. (2005). *El Problema Didáctico del Aprendizaje del Volumen*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.
- Saucedo, G. (2011). Hacia la construcción del concepto de volumen. En *La Geometría en el Triángulo de las Bermudas* (pp. 119-145). Santa Fe: Editorial de La Universidad Nacional del Litoral.