FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PAMPA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MONOGRAFÍA

COMPLEMENTOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

JANINA MICAELA ROLDAN

PROFESORES:

- SONIA ACINAS
- CRISTIAN SCAROLA

2021

Resumen

En este estudio se presentan los Sistemas de Ecuaciones Lineales Diferenciales de Primer Orden. Se los clasifica según sean homogéneos o no homogéneos y se fundamenta la existencia de las soluciones correspondientes a cada sistema. En el trabajo se hace especial hincapié en la forma de resolver los sistemas lineales con coeficientes constantes, motivo por el cual, se desarrollan los métodos convenientes para hallar las soluciones generales, tanto de los sistemas lineales homogéneos, como la de los no homogéneos. En este sentido, para el primer grupo se presenta el Método de los Autovalores y para el segundo el Método de Variación de Parámetros.

Índice

SECCIÓN 1

Introducción

Al intentar modelizar matemáticamente una situación de la realidad, en la mayoría de las veces, el modelo que se obtiene suele tener un carácter no lineal, lo cual conlleva, generalmente, un grado alto de dificultad. En estos casos, conviene considerar un problema más sencillo que sea, en algún sentido, una buena aproximación del anterior. De esta manera, a partir de las conclusiones alcanzadas al estudiar el problema más sencillo, se busca obtener algún tipo de resultado para el problema primitivo. Una de las formas más frecuentes de simplificar un problema es linealizarlo. En este sentido, si se pretende estudiar un problema no lineal, el primer paso obligado es analizar el problema lineal asociado de la manera más completa posible para poder establecer así qué ocurrirá en el caso no lineal.

En muchas aplicaciones se presentan situaciones en las que el fenómeno que se quiere estudiar está descrito por dos o más funciones desconocidas de tal manera que la variación de cada una de estas funciones depende también de las otras funciones. En este caso no será suficiente con una única ecuación, si no que, más bien se necesitará un conjunto de ecuaciones. Un conjunto de ecuaciones diferenciales que han de ser satisfechas simultáneamente es lo que se conoce como un sistema de ecuaciones diferenciales. Un problema bastante complejo se presenta cuando se debe resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior. En estos casos, lo conveniente es transformarlo en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, lo que se logra añadiendo más variables. Por este motivo, esta trabajo se centra en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales diferenciales de primer orden.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas ordinarias surgen en diferentes problemas que incluyen varias variables dependientes y_1, y_2, $\ldots$, y_n, donde cada una de ellas es una función de una única variable independiente x. En este trabajo estudiaremos los sistemas conformados por ecuaciones que se pueden expresar en forma normal y cuyo número de funciones incógnitas coincide con el número de ecuaciones.

SECCIÓN 2

Sistemas lineales de primer orden

Definición 2.1. El sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} y_1' & = & f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' & = & f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_3' & = & f_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{1}$$

donde $y_i' = \frac{dy_1}{dx}$, $i = 1 \ldots, n$, se denomina **sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden**.

Definición 2.2. Una **solución** del sistema (1) en un intervalo I es una función vectorial definida de $I \to \mathbb{R}^n$, de la forma $\boldsymbol{y} = (y_1 \ \ldots \ y_n)^t$, donde las $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, son funciones diferenciables en todo punto de I que satisfacen el sistema (1).

Es importante, tener presente que una solución de un sistema lineal es un vector cuyas componentes son funciones reales. Por ejemplo, la solución del sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

es $\boldsymbol{y(x)} = (sin(x) \ cos(x))^t$, es decir, que $y_1(x) = sin(x)$ e $y_2(x) = cos(x)$.

Si se presentan condiciones iniciales, tales como:

$$\begin{cases} y_1(x_0) & = & y_1^0 \\ y_2(x_0) & = & y_2^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n(x_0) & = & y_n^0 \end{cases} \tag{2}$$

para algún punto $x_0 \in I$. Las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ y las condiciones iniciales (2) conforman el Problema de Valor Inicial (P.V.I).

Los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden son muy útiles en el estudio de ecuaciones de diferenciales de orden superior, ya que, una ecuación diferencial de n-ésimo orden

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \tag{3}$$

puede considerarse un caso especial del sistema (1) y reducirse a un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden. En efecto, si $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, …, $y_n = y^{(n-1)}$, es claro que:

$$\begin{aligned} y_1' = y' \quad &\Rightarrow \quad y_1' = y_2 \\ y_2' = y'' \quad &\Rightarrow \quad y_2' = y_3 \\ y_{n-1}' = y^{(n-1)} \quad &\Rightarrow \quad y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = y^n \quad &\Rightarrow \quad y_n' = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema:

$$\begin{cases} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1}' & = & y_n \\ y_n' & = & f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \end{cases}$$

es equivalente a (3).

Ejemplo 2.1. Escribir la ecuación diferencial de segundo orden $y'' - 2y' + y = 0$ como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Solución 2.1. Sean $y_1 = y$, $y_2 = y'$, entonces, $y_1' = y_2$ y $y'' = y_2'$. Sustituyendo estos resultados en la ED, se obtiene:

$$y'' - 2y' + y = 0 \;\Rightarrow\; y_2' - 2y_2 + y_1 = 0$$

Por lo tanto, y_1 e y_2 satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & 2y_2 - y_1 \end{cases}$$

Si las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son lineales en las variables $y_1, \ldots, y_n$, el sistema (1) es un **sistema de ecuaciones lineales diferenciales de primer orden**. La forma general de estos sistemas es

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \tag{4}$$

donde para cada $i, j = 1, \ldots, n$, a_{ij} y b_j son funciones continuas definidas sobre un intervalo I. Al sistema (4) se lo denomina **sistema lineal de orden** n o simplemente **sistema lineal**. Para trabajar con estos sistemas es conveniente recurrir a la notación matricial, en efecto si denotamos por

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

y por

$$\boldsymbol{b(x)} = \begin{pmatrix} b_1(x) & b_2(x) & \ldots & b_n(x) \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

donde cada $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ es una función real de una variable y $\boldsymbol{b}(x)$ es una función vectorial de una variable. Entonces, el sistema (4) se puede escribir de manera matricial como

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{b}\,(x), \tag{5}$$

siendo

$$\boldsymbol{Y'}(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Definición 2.3. Se dice que el sistema (5) **Homogéneo** si

$$\boldsymbol{b(x)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^t.$$

En caso contrario el sistema (5) es **No Homogéneo**.

Si consideramos el Ejemplo (2.1), el sistema se puede escribir matricialmente como

$$\boldsymbol{Y'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y resulta ser homogéneo.

Ejemplo 2.2. Considere el sistema lineal homogéneo

$$\boldsymbol{Y'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{Y}$$

Compruebe que en el intervalo $(-\infty; \infty)$

$$\boldsymbol{y_1} = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix}^t \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{y_2} \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix}^t$$

son soluciones del sistema.

Solución 2.2. En primer lugar busquemos $\boldsymbol{y_1'}$ y $\boldsymbol{y_2'}$:

$$\boldsymbol{y_1'} = \begin{pmatrix} -2e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{y_2'} \begin{pmatrix} 18e^{6x} \\ 30e^{6x} \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{y_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2x} - 3e^{-2x} \\ 5e^{-2x} - 3e^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{pmatrix} = \boldsymbol{y_1'}$$

y

$$\boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{y_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6x} + 15e^{6x} \\ 15e^{6x} + 15e^{6x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6x} \\ 30e^{6x} \end{pmatrix} = \boldsymbol{y_2'}$$

SECCIÓN 3

Estructura de las soluciones de los sistemas lineales de primer orden

La existencia de la solución al sistema

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{b}\,(x), \tag{6}$$

así como, la unicidad están fundamentadas en el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *(Teorema de Existencia y Unicidad). Sean a_{ij} y b_i funciones continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Sea $x_0 \in I$, si se impone la condición inicial $\boldsymbol{Y}(x_0) = (y_1(x_0))\ y_2(x_0))\ \ldots\ y_n(x_0))^t = (y_1^0\ y_2^0\ \ldots\ y_n^0)^t$, entonces existe una única función vectorial $\boldsymbol{y} = (y_1\ y_2\ \ldots\ y_n)^t$ que es solución del sistema (6) y verifica las condiciones iniciales.*

Si el sistema es homogéneo, la función vectorial idénticamente nula siempre es una solución y se denomina **solución trivial**. El siguiente corolario es una consecuencia del teorema precedente.

Corolario 3.1. *Sean a_{ij} y b_i funciones continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Si $\boldsymbol{y} = (y_1\ y_2\ \ldots\ y_n)^t$ es una solución del sistema homogéneo*

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{Y},$$

en el intervalo I que, para algún $x_0 \in I$, satisface las condiciones iniciales $y_1(x_0) = y_1^0$, $y_2(x_0) = y_2^0$, $\ldots$, $y_n(x_0) = y_n^0$, entonces $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ en I.

3.1. Sistemas lineales homogéneos

El conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{Y}, \tag{7}$$

tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$, esto significa que, cualquier solución del mismo es una combinación lineal de soluciones linealmente independientes. El teorema que sigue lo enuncia.

Teorema 3.2. *(Principio de Superposición). Si $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \ldots, \boldsymbol{y_n}$ son soluciones del sistema lineal homogéneo (7) en un intervalo I, entonces, la combinación lineal*

$$\boldsymbol{y} = c_1 \cdot \boldsymbol{y_1} + c_2 \cdot \boldsymbol{y_2} + \ldots + c_n \cdot \boldsymbol{y_n}$$

donde $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, es también una solución del sistema (7) en el intervalo I.

Demostración. Consideremos

$$\boldsymbol{y} = c_1 \cdot \boldsymbol{y_1} + c_2 \cdot \boldsymbol{y_2} + \ldots + c_n \cdot \boldsymbol{y_n}$$

donde $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \ldots, \boldsymbol{y_n}$ son soluciones del sistema lineal homogéneo (7) en un intervalo I. Por lo tanto, cada $\boldsymbol{y_i}$, $i = 1, \ldots, n$ satisface el sistema (7), es decir que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y_1'} &= \boldsymbol{A(x) \cdot y_1} \\
\boldsymbol{y_2'} &= \boldsymbol{A(x) \cdot y_2} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{y_n'} &= \boldsymbol{A(x) \cdot y_n}
\end{aligned}$$

Derivando $\boldsymbol{y}$ y reemplazando por los resultados anteriores, se tiene

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= c_1 \cdot \boldsymbol{y_1} + c_2 \cdot \boldsymbol{y_2} + \ldots + c_n \cdot \boldsymbol{y_n} \\
\boldsymbol{y'} &= c_1 \cdot \boldsymbol{A(x) \cdot y_1} + c_2 \cdot \boldsymbol{A(x) \cdot y_2} + \ldots + c_n \cdot \boldsymbol{A(x) \cdot y_n} \\
\boldsymbol{y'} &= \boldsymbol{A}(x) \cdot (c_1 \cdot \boldsymbol{y_1} + c_2 \cdot \boldsymbol{y_2} + \ldots + c_n \cdot \boldsymbol{y_n}) \\
\boldsymbol{y'} &= \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

Luego, $\boldsymbol{y}$ satisface el sistema (7), por lo tanto, $\boldsymbol{y}$ es una solución del sistema (7) en el intervalo I. ■

Definición 3.1. Un conjunto de funciones vectoriales $\{\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \ldots, \boldsymbol{y_n}\}$ se dice que es **linealmente dependiente** en un intervalo I si existen constantes reales, $c_1, \ldots, c_n$, no todas nulas, tales que

$$c_1 \cdot \boldsymbol{y_1}(x) + c_2 \cdot \boldsymbol{y_2}(x) + \ldots + c_n \cdot \boldsymbol{y_n}(x) = 0$$

para todo $x \in I$. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente se dice que es **linealmente independiente**.

Definición 3.2. Dado un conjuntos de funciones vectoriales $\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, donde

$$\boldsymbol{y_i} = \Big(y_{1i}(x), \quad \ldots, \quad y_{ni}(x)\Big)^t; \; i = 1, \ldots, n$$

se define el **Wronskiano** de $\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}$ para $x \in I$, como

$$\boldsymbol{W}[\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}](x) = det \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ y_{31}(x) & y_{32}(x) & \ldots & y_{3n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.3. *Si las funciones vectoriales* $\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}$ *son soluciones del sistema lineal homogéneo de orden n (7) en un intervalo* I*, entonces el conjunto* $\{\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}\}$ *es linealmente independiente si, y sólo si,*$\boldsymbol{W}[\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}](x) \neq 0$, $\forall\, x \in I$.

Demostración. Sean las funciones vectoriales $\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, donde

$$\boldsymbol{y_i} = \Big(y_{1i}(x), \quad \ldots, \quad y_{ni}(x)\Big)^t; \; i = 1, \ldots, n.$$

Si las funciones $\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}$ son todas idénticamente nulas, el resultado es trivial, entonces supongamos que al menos una de las funciones es no nula.

$\Rightarrow$) Supongamos que que existe un punto $x_0 \in I$ donde el $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}](x_0) = 0$. Entonces, una columna de la matriz

$$\begin{pmatrix} y_{11}(x_0) & y_{12}(x_0) & \dots & y_{1n}(x_0) \\ y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0) & \dots & y_{2n}(x_0) \\ y_{31}(x_0) & y_{32}(x_0) & \dots & y_{3n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_{n1}(x_0) & y_{n2}(x_0) & \dots & y_{nn}(x_0) \end{pmatrix}.$$

es una combinación lineal de las otras. Supongamos que la primera columna es combinación lineal de las otras, esto significa que existen constantes reales $c_2, c_3, \dots, c_n$ no todas nulas, tales que

$$\boldsymbol{y_1}(x_0) = c_2\boldsymbol{y_2}(x_0) + c_3\boldsymbol{y_3}(x_0) + \dots + c_n\boldsymbol{y_n}(x_0).$$

Sea $\boldsymbol{y}(x) = -\boldsymbol{y_1}(x) + c_2\boldsymbol{y_2}(x) + c_3\boldsymbol{y_3}(x) + \dots + c_n\boldsymbol{y_n}(x)$ que es una solución del sistema (7) por el Principio de Superposición. Además, la función $\boldsymbol{y}(x)$ verifica que $\boldsymbol{y}(x_0) = 0$, lo que implica, por el Corolario 3.1 que $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, lo que contradice la suposición de que al menos una de las funciones es no nula. Por lo tanto, $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_n}](x) \neq 0$, $\forall\, x \in\, I$.

$\Leftarrow$) Sea $x \in I$ y supongamos que el conjunto $\{\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_n}\}$ es linealmente dependiente, entonces, existen constantes reales $c_1, \dots, c_n$, no todas nulas, tales que

$$c_1 \cdot \boldsymbol{y_1}(x) + c_2 \cdot \boldsymbol{y_2}(x) + \dots + c_n \cdot \boldsymbol{y_n}(x) = \boldsymbol{0}.$$

Supongamos que $\boldsymbol{y_1}(x) \neq \boldsymbol{0}$ y $c_1 \neq 0$, entonces despejando $\boldsymbol{y_1}(x)$ de la ecuación anterior se tiene que

$$\boldsymbol{y_1}(x) = d_2\boldsymbol{y_2}(x) + d_3\boldsymbol{y_3}(x) + \dots + d_n\boldsymbol{y_n}(x)$$

donde $d_j = -\frac{c_j}{c_1}$, $j = 2, \dots, n$. En consecuencia, dado que $\forall x \in I$ resulta que $\boldsymbol{y_1}(x)$ es combinación lineal de las demás funciones se tiene que

$$det \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{pmatrix} = 0\,;\ \forall x \in I.$$

Entonces, $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_n}](x) = 0$, $\forall\, x \in\, I$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, el conjunto $\{\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_n}\}$ es linealmente independiente. ■

El Wronskiano resulta ser muy útil para determinar si n soluciones de un sistema homogéneo son o no linealmente independientes, tal como pone de manifiesto el siguiente resultado.

Proposición 3.1. Sean $\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soluciones del sistema homogéneo $\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{Y}$ en un intervalo I, entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}$ son linealmente independientes.
2. $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}](x) \neq 0$, $\forall x \in I$.
3. $\exists\, x_0 \in I$ tal que $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}](x_0) \neq 0$.

Ejemplo 3.1. Verifique que en el intervalo $(-\infty; \infty)$ las soluciones del Ejemplo 2.2 son linealmente independientes.

Solución 3.1. Recordando que las soluciones son

$$\boldsymbol{y_1} = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{y_2} \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix}$$

y calculando su **Wronskiano** se tiene que

$$\boldsymbol{W}[\boldsymbol{y_1, y_2}] = det \begin{pmatrix} e^{-2x} & 3e^{6x} \\ -e^{-2x} & 5e^{6x} \end{pmatrix} = 8e^{4x}$$

Como $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{y_1, y_2}] \neq 0$ para todo x en $(-\infty; \infty)$, por la Proposición (3.1) se concluye que $\boldsymbol{y_1, y_2}$ son linealmente independientes.

Definición 3.3. Se denomina **sistema fundamental de soluciones** del sistema lineal homogéneo de orden n, $\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{Y}$, en un intervalo I a cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes en I.

Teorema 3.4. *Siempre existe un sistema fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo (7) en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in I$, por el Teorema de existencia y unicidad (3.2) existen soluciones del sistema, $\boldsymbol{y_1, \ldots, y_n}$, que verifican las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y_1}(x_0) &= (1\ 0\ 0\ \ldots\ 0)^t \\
\boldsymbol{y_2}(x_0) &= (0\ 1\ 0\ \ldots\ 0)^t \\
&\vdots \\
\boldsymbol{y_n}(x_0) &= (0\ 0\ 0\ \ldots\ 1)^t
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\boldsymbol{W}[\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}](x_0) = det \begin{pmatrix} y_{11}(x_0) & y_{12}(x_0) & \ldots & y_{1n}(x_0) \\ y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0) & \ldots & y_{2n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_{n1}(x_0) & y_{n2}(x_0) & \ldots & y_{nn}(x_0) \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Luego, $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}](x_0) \neq 0$, por lo tanto, $\boldsymbol{y_1, \ldots, y_n}$ son linealmente independientes y, por ende, un sistema fundamental de soluciones del sistema (7). ■

Teorema 3.5. *Si* $\{\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}\}$ *es un sistema fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo de orden* n *(7), en un intervalo* I*, entonces la* ***solución general*** *del sistema en dicho intervalo es*

$$\boldsymbol{y_{gh}} = c_1 \cdot \boldsymbol{y_1} + c_2 \cdot \boldsymbol{y_2} + \ldots + c_n \cdot \boldsymbol{y_n}, \tag{8}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2. Determinar la solución general del sistema

$$\boldsymbol{Y'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{Y}. \tag{9}$$

Solución 3.2. En el Ejemplo 3.1 probamos que

$$\boldsymbol{y_1} = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{y_2} \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix}$$

son soluciones linealmente independientes del sistema lineal homogéneo (9) en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Por lo tanto, $\{\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}\}$ forman un sistema fundamental de soluciones en ese intervalo. En consecuencia, la solución general del sistema (9) en $(-\infty, \infty)$ es

$$\boldsymbol{y_{gh}} = c_1 \cdot \boldsymbol{y_1} + c_2 \cdot \boldsymbol{y_2} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

3.2. Sistemas lineales no homogéneos

Teorema 3.6. *Si* $\boldsymbol{y_p}$ *es una solución particular del sistema lineal no homogéneo*

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{b}(x) \tag{11}$$

en un intervalo I *e* $\boldsymbol{y_{gh}}$ *es una solución del sistema lineal homogéneo asociado a (11),*

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{Y}$$

entonces, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_{gh}} + \boldsymbol{y_p}$ *es también una solución de (11) en* I *y todas las soluciones de (11) en dicho intervalo son de esa forma.*

Corolario 3.2. *Si* $\boldsymbol{y_p}$ *es una solución particular del sistema lineal no homogéneo (11) en un intervalo* I *e* $\{\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \ldots, \boldsymbol{y_n}\}$ *es un sistema fundamental de soluciones, en el mismo intervalo, del sistema lineal homogéneo asociado a (11), entonces, la solución general del sistema (11) en* I *es*

$$\boldsymbol{y_{gnh}} = c_1 \cdot \boldsymbol{y_1} + c_2 \cdot \boldsymbol{y_2} + \ldots + c_n \cdot \boldsymbol{y_n} + \boldsymbol{y_p}, \tag{12}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.3. Considere el sistema lineal no homogéneo

$$\boldsymbol{Y'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{Y} + \begin{pmatrix} 12x - 11 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Verifique que una solución particular al mismo en $(-\infty; \infty)$ es

$$\boldsymbol{y_p} = \begin{pmatrix} 3x - 4 \\ -5x + 6 \end{pmatrix}$$

y encuentre la solución general del sistema no homogéneo.

Solución 3.3. En primer lugar, calculamos la derivada de $\boldsymbol{y_p}$, en efecto

$$\boldsymbol{y_p'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{y_p} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x - 4 \\ -5x + 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12x - 11 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3x - 4 - 15x + 18 \\ 15x - 20 - 15x + 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12x - 11 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -12x + 14 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12x - 11 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{y_p'}
\end{aligned}$$

Probamos en el Ejemplo 3.2 que la solución general del sistema lineal homogéneo asociado a (13) es

$$\boldsymbol{y_{gh}} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix},$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias. Por lo tanto, la solución general sistema lineal no homogéneo es

$$\boldsymbol{y_{gnh}} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x - 4 \\ -5x + 6 \end{pmatrix}.$$

SECCIÓN 4

Resolución de sistemas lineales de primer orden homogéneos con coeficientes constantes: Método de los autovalores

Definición 4.1. Se denomina **sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes** al sistema lineal homogéneo de primer orden

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{Y}$$

cuya matriz $\boldsymbol{A(x)} = \boldsymbol{A}$ es constante. A saber, estos sistemas son de la forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_{11} \quad a_{12}y_{12} \quad \dots \quad a_{1n}y_{1n} \\ y_2' = a_{21}y_{21} \quad a_{22}y_{22} \quad \dots \quad a_{2n}y_{2n} \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_{n1} \quad a_{n2}y_{n2} \quad \dots \quad a_{nn}y_{nn} \end{cases}$$

Es claro, que el sistema del Ejemplo (2.2) es un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes, ya que,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

En esta sección vamos a estudiar un método de resolución de sistemas lineales con coeficientes constantes denominado **Método de los autovalores**.

Se Procede de forma análoga al caso de ecuaciones lineales con coeficientes constantes de segundo orden. Se busca soluciones del sistema

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Y} \tag{14}$$

de la forma $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{v}e^{\lambda x}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{v} = (v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n)^t$ es un vector columna de $\mathbb{R}^n$. Sustituyendo esta solución en (14) se tiene que

$$\lambda \boldsymbol{v}e^{\lambda x} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}e^{\lambda x}$$

y dividiendo ambos miembros por $e^{\lambda x}$ se obtiene que

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

de donde resulta que

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad de orden n. La última igualdad equivale al sistema

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + \ldots + a_{1n}v_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)v_n = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Por lo tanto, para determinar una solución $\boldsymbol{y}$ no trivial de (14), se debe obtener una solución no trivial del sistema (15), es decir, que se debe calcular un vector $\boldsymbol{v}$ no trivial que cumpla con (15). La condición que se debe verificar para que (15) tenga soluciones no triviales, es

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0. \tag{16}$$

La Ecuación (16) se llama **ecuación característica** de la matriz $\boldsymbol{A}$ y $p(\lambda) = det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$ es un polinomio de grado n que se denomina **polinomio característico** de la matriz $\boldsymbol{A}$. Las raíces del polinomio característico son los valores propios de $\boldsymbol{A}$, por lo tanto, existen exactamente n autovalores, contados de acuerdo con su multiplicidad.

En resumen, $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{v}e^{\lambda x}$ será solución del sistema (14) de ecuaciones diferenciales si, y sólo si λ es un valor propio de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{v}$ es un vector propio correspondiente a λ.

Una propiedad importante de los autovectores que será muy útil en lo sigue se presenta a continuación.

Propiedad 4.1. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autovalores distintos de una matriz cuadrada de orden n y para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ sea $\boldsymbol{v_i}$ un autovector correspondiente al autovalor λ_i. Entonces los vectores $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ son linealmente independientes.

Los valores propios de una matriz $\boldsymbol{A}$ cuadrada de orden n, pueden ser números reales o números complejos, iguales o distintos y además, tener diferente orden de multiplicidad. En lo que sigue se analizan tres casos particulares.

4.1. Valores propios reales y distintos

Teorema 4.1. *Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valores propios reales y distintos de la matriz $\boldsymbol{A}$ de coeficientes del sistema homogéneo (14), y sean $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ los vectores propios correspondientes. Entonces, la **solución general** del sistema (14) en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es*

$$\boldsymbol{y_{gh}} = c_1\, \boldsymbol{v_1}\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, \boldsymbol{v_2}\, e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n\, \boldsymbol{v_n}\, e^{\lambda_n x} \tag{17}$$

Ejemplo 4.1. Encuentre la solución general del sistema lineal homogéneo

$$\boldsymbol{y'} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Solución 4.1. Buscamos los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$ y luego sus vectores propios asociados.

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-5) = 0$$

por lo tanto, los valores propios son $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$ y $\lambda_3 = 5$.

Para buscar los vectores propios asociados a cada valor propio, se debe resolver el sistema $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

- Para $\lambda_1 = -3$ el sistema a resolver es $(\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{I}|\boldsymbol{0})$, en consecuencia

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - \frac{1}{9}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = \frac{1}{9}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de donde $v_2 = 0$ y $v_1 = v_3$. Tomando $v_1 = 1$, el vector propio y su vector solución correspondiente es

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad \boldsymbol{y_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3x}.$$

- Para $\lambda_1 = -4$ el sistema a resolver es $(\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{I}|\boldsymbol{0})$, el vector propio y su vector solución correspondiente es

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad \boldsymbol{y_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-4x}$$

- Para $\lambda_1 = 5$ el sistema a resolver es $(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I}|\boldsymbol{0})$, el vector propio y su vector solución correspondiente es

$$\boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad \boldsymbol{y_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{5x}$$

La solución general de (18) es una combinación lineal de los vectores solución, por lo tanto,

$$\boldsymbol{y_{gh}} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3x} + c_2 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-4x} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{5x}.$$

4.2. Valores propios reales y repetidos

Definición 4.2. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada de orden n y m un número entero positivo. Si $(\lambda - \lambda_i)^m$ es un factor de la ecuación característica asociada a l amatriz $\boldsymbol{A}$ y $(\lambda - \lambda_i)^{m+1}$ no lo es, entonces λ_i es un **valor propio de multiplicidad** m de la matriz $\boldsymbol{A}$.

Cuando se trabaja con una matriz $\boldsymbol{A}$ que tiene valores propios repetidos, se pueden presentar las diferentes situaciones, tal como resume el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada de orden n.*

1°) Si es posible encontrar m vectores propios linealmente independientes $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_m}$ correspondientes a un valor propio λ_i de multiplicidad m, con $m \leq n$, entonces la solución general del sistema contiene la combinación lineal

$$c_1\, \boldsymbol{v_1}\, e^{\lambda_i x} + c_2\, \boldsymbol{v_2}\, e^{\lambda_i x} + \ldots + c_m\, \boldsymbol{v_m}\, e^{\lambda_i x}.$$

2°) Si hay un único vector propio que corresponde al autovalor λ_i de multiplicidad m, entonces siempre se pueden encontrar m soluciones linealmente independientes de la forma

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y_1} &= \boldsymbol{v_i} e^{\lambda_i x} \\
\boldsymbol{y_2} &= \boldsymbol{v_i}\, x\, e^{\lambda_i x} + \boldsymbol{u_1} e^{\lambda_i x} \\
\boldsymbol{y_3} &= \boldsymbol{v_i}\, \frac{x^2}{2!}\, e^{\lambda_i x} + \boldsymbol{u_1}\, x\, e^{\lambda_i x} + \boldsymbol{u_2} e^{\lambda_i x} \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{y_m} &= \boldsymbol{v_i}\, \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\, e^{\lambda_i x} + \boldsymbol{u_1}\, \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\, e^{\lambda_i x} + \ldots + \boldsymbol{u_{m-1}} e^{\lambda_i x}
\end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{v_i}$ es el vector propio asociado al valor propio λ_i y $\boldsymbol{u_i}$ son vectores columna con n componentes.

Observación 4.1. Si la matriz $\boldsymbol{A}$ del sistema lineal de orden n, $\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{AY}$, es simétrica, entonces siempre es posible encontrar n vectores propios linealmente independientes.

Corolario 4.1. *Bajo las condiciones del 2° caso del Teorema 4.2, consideremos que un autovalor λ_i cuyo único autovector asociado es $\boldsymbol{v_i}$, entonces,*

- *Si λ_i es de multiplicidad 2, para encontrar $\boldsymbol{u_1}$ se debe resolver el sistema*

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{v_i}.$$

- *Si λ_i es de multiplicidad 3, para encontrar $\boldsymbol{u_1}$ y $\boldsymbol{u_2}$ se deben resolver los sistemas*

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{v_i} \qquad y \qquad (\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{u_1}.$$

Demostración. Como $\boldsymbol{v_i}$ es único autovector asociado a λ_i, entonces se verifica

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$$

- Si $m = 2$, reemplazando $\boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{v_i}\, x\, e^{\lambda_i x} + \boldsymbol{u_1} e^{\lambda_i x}$ en el sistema (20), resulta

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y_2'} &= \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{y_2} \\
\boldsymbol{0} &= \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_2'} \\
\boldsymbol{0} &= \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{v_i}\, x\, e^{\lambda_i x} + \boldsymbol{u_1} e^{\lambda_i x}) - [\boldsymbol{v_i}\, e^{\lambda_i x} + \lambda_i \boldsymbol{v_i}\, x\, e^{\lambda_i x} + \lambda_i \boldsymbol{u_1} e^{\lambda_i x}] \\
\boldsymbol{0} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{v_i}\, x\, e^{\lambda_i x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u_1} e^{\lambda_i x} - \boldsymbol{v_i}\, e^{\lambda_i x} - \lambda_i \boldsymbol{v_i}\, x\, e^{\lambda_i x} - \lambda_i \boldsymbol{u_1} e^{\lambda_i x} \\
\boldsymbol{0} &= x\, e^{\lambda_i x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v_i} - \lambda_i \boldsymbol{v_i}) + e^{\lambda_i x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u_1} - \lambda_i \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{v_i}) \\
\boldsymbol{0} &= x\, e^{\lambda_i x}(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{v_i} + e^{\lambda_i x}[(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{v_i}]
\end{aligned}$$

  Como $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$ entonces $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$, de donde

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{v_i}$$

- Si $m = 3$, reemplazando $\boldsymbol{y_3} = \boldsymbol{v_i}\, \frac{x^2}{2!}\, e^{\lambda_i x} + \boldsymbol{u_1}\, x\, e^{\lambda_i x} + \boldsymbol{u_2} e^{\lambda_i x}$ en el sistema (20), resulta que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y_3'} &= \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{y_3} \\
\boldsymbol{0} &= \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{y_3} - \boldsymbol{y_2'} \\
\boldsymbol{0} &= \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{v_i}\, \frac{x^2}{2!}\, e^{\lambda_i x} + \boldsymbol{u_1}\, x\, e^{\lambda_i x} + \boldsymbol{u_2} e^{\lambda_i x}) \\
&\quad - [\boldsymbol{v_i}\, x\, e^{\lambda_i x} + \frac{x^2}{2!} \lambda_i \boldsymbol{v_i}\, e^{\lambda_i x} + \boldsymbol{u_1} e^{\lambda_i x} + \lambda_i \boldsymbol{u_1}\, x\, e^{\lambda_i x} + \lambda_i \boldsymbol{u_2} e^{\lambda_i x}] \\
\boldsymbol{0} &= \frac{x^2}{2!} e^{\lambda_i x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v_i} - \lambda_i \boldsymbol{v_i}) + x\, e^{\lambda_i x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u_1} - \lambda_i \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{v_i}) + e^{\lambda_i x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u_2} - \lambda_i \boldsymbol{u_2} - \boldsymbol{u_1}) \\
\boldsymbol{0} &= \frac{x^2}{2!} e^{\lambda_i x}(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{v_i} + x\, e^{\lambda_i x}[(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{v_i}] + e^{\lambda_i x}[(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{u_2} - \boldsymbol{u_1}]
\end{aligned}$$

  Como $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$, entonces, $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$ y $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$, de donde

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{v_i} \qquad y \qquad (\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{u_1}.$$

■

1° caso:

Ejemplo 4.2. Encuentre la solución del sistema lineal homogéneo

$$\boldsymbol{Y'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Solución 4.2. Como la matriz $\boldsymbol{A}$ es simétrica, van a existir 3 vectores propios linealmente independientes.

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & -4 \\ 4 & 1-\lambda & 4 \\ -4 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 45\lambda - 175 = 0$$

$$-(\lambda + 7)(\lambda - 5)^2 = 0$$

En consecuencia, los autovalores de la matriz $\boldsymbol{A}$ son $\lambda_1 = 7$ con multiplicidad 1 y $\lambda_1 = 5$ con multiplicidad 2.

El vector propio asociado a λ_1 es $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y dos vectores propios linealmente independientes asociados a λ_2 son

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución general del sistema es

$$\boldsymbol{y_{gh}} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7x} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{5x}.$$

2° caso:

Ejemplo 4.3. Encuentre la solución del sistema lineal homogéneo

$$\boldsymbol{Y'} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Solución 4.3.

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$$(\lambda - 4)^2 = 0$$

Entonces, $\lambda_1 = 4$ es el único autovalor de la matriz $\boldsymbol{A}$ cuya multiplicidad es 2. Debemos buscar dos vectores propios asociados a λ_1 linealmente independientes, para ello resolvemos el sistema $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{0}$ donde $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix}$:

$$(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}|\boldsymbol{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2-4 & 4 & 0 \\ -1 & 6-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = -\frac{1}{2}F_1]{F_2 = F_2 - \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de donde $v_{1y} \in \mathbb{R}$ y $v_{1x} = 2v_{1y}$. Tomando, $v_{1y} = 1$ se tiene que $v_{1x} = 2$, por lo tanto, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y una solución del sistema es

$$\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{v_1} e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Es claro que $\boldsymbol{v_1}$ es el único vector propio asociado a λ_1, dado que, no es posible encontrar otro vector $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_{2y} \\ v_{2y} \end{pmatrix}$ que verifique $\boldsymbol{v_2} \neq c \cdot \boldsymbol{v_1}$. Entonces, debemos buscar otra solución del sistema $\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{AY}$ de la forma

$$\boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{v_1}\, x\, e^{\lambda_1 x} + \boldsymbol{u} e^{\lambda_1 x} \Rightarrow \boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{v_1}\, x\, e^{4x} + \boldsymbol{u} e^{4x}.$$

Dado que $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{0}$ por ser $\boldsymbol{v_1}$ vector propio asociado a λ_1, entonces debemos encontrar $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y)$ que verique la condición

$$(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_1}.$$

Por lo tanto, se tiene

$$(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}|\boldsymbol{v_1}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2-4 & 3 & 2 \\ -1 & 6-4 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{F_2 = F_2 - \frac{1}{2}F_1 \\ F_1 = -\frac{1}{2}F_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de donde $u_x = -1 + 2u_y$ con $u_y \in \mathbb{R}$. Tomando, $u_y = 1$ se tiene que $u_x = 1$, por lo tanto $\boldsymbol{u} = (1, 1)$, en consecuencia, la segunda solución buscada es

$$\boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{v_1}\, x\, e^{\lambda_1 x} + \boldsymbol{u} e^{\lambda_1 x} \Rightarrow \boldsymbol{y_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x\, e^{4x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Luego, la solución general del sistema (20) es

$$\boldsymbol{y_{gh}} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + c_2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x\, e^{4x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} \right].$$

4.3. Valores propios complejos

Teorema 4.3. *Sea sistema lineal homogéneo con coeficientes ocnstantes de orden n*

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{AY}$$

y sean $\lambda_1 = \alpha + i \cdot \beta$, con α, β reales, un valor propio complejo de la matriz $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{v_1}$ el vector propio correspondiente a λ_1. Entonces, las siguientes son soluciones del sistema lineal homogéneo

$$\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{v_1}\, e^{\lambda_1 x} \qquad e \qquad \boldsymbol{y_2} = \overline{\boldsymbol{v_1}}\, e^{\overline{\lambda_1} x}$$

donde $\overline{\lambda_1}$ y $\overline{\boldsymbol{v_1}}$ son los conjugados de λ_1 y $\boldsymbol{v_1}$ respectivamente.

Teorema 4.4. *Sea sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes de orden n*

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{AY}$$

y sean $\lambda_1 = \alpha + i \cdot \beta$, con α, β reales, un valor propio complejo de la matriz $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{v_1}$ el vector propio correspondiente a λ_1. Entonces, las siguientes son soluciones reales linealmente independientes del sistema lineal en cuestión en el intervalos $(-\infty; \infty)$,

$$\boldsymbol{y_1} = [Re(\boldsymbol{v_1}) cos(\beta\, x) - Im(\boldsymbol{v_1}) sin(\beta x)]\, e^{\alpha x}$$
$$\boldsymbol{y_2} = [Im(\boldsymbol{v_1}) cos(\beta\, x) + Re(\boldsymbol{v_1}) sin(\beta x)]\, e^{\alpha x}$$

Ejemplo 4.4. Resuelva el P.V.I:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y'} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{Y(0)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución 4.4.

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$
$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 + 9 = 0$$

Entonces, los autovalores de la matriz $\boldsymbol{A}$ son $\lambda_1 = 3i$ y $\overline{\lambda_1} = -3i$.

El vector propio asociado a λ_1 es

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 4+3i \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} i$$

de donde,

$$Re(\boldsymbol{v_1}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad y \qquad Im(\boldsymbol{v_1}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Debido a $\alpha = 0$ y $\beta = 3$, las soluciones reales linealmente independientes del sistema son

$$\boldsymbol{y_1} = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} cos(3x) - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} sin(3x) \right] e^0 = \begin{pmatrix} 4cos(3x) - 3sin(3x) \\ 5cos(3x) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y_2} = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} cos(3x) + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} sin(3x) \right] e^0 = \begin{pmatrix} 3cos(3x) + 4sin(3x) \\ 5sin(3x) \end{pmatrix}$$

Entonces, la solución general es

$$\boldsymbol{y_{gh}} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 4cos(3x) - 3sin(3x) \\ 5cos(3x) \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 3cos(3x) + 4sin(3x) \\ 5sin(3x) \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$\boldsymbol{y_{gh}} = \begin{pmatrix} (4c_1 + 3c_2)cos(3x) + (4c_2 - 3c_1)sin(3x) \\ 5c_1\, cos(3x) + 5c_2\, sin(3x) \end{pmatrix}$$

En la Figura 1 se observa un diagrama de fase donde están representadas algunas gráficas de las curvas o trayectorias definidas paramétricamente por la solución general del sistema. Para la representación paramétrica se considera la variable independiente t y se representa

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} (4c_1 + 3c_2)cos(3t) + (4c_2 - 3c_1)sin(3t) \\ 5c_1\, cos(3t) + 5c_2\, sin(3t) \end{pmatrix}$$

para diferentes valores de c_1 y c_2.

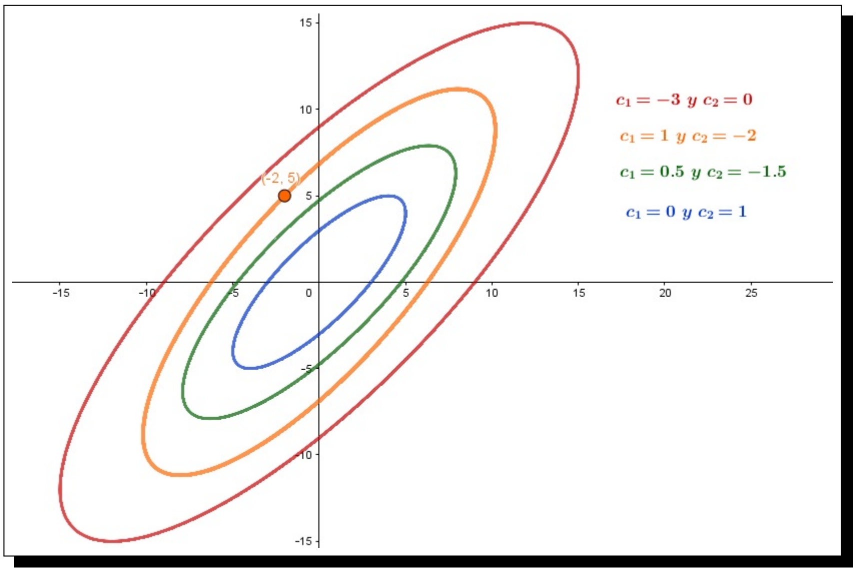

Figura 1: Diagrama de fase del sistema presentado en el Ejemplo 4.4

La condición inicial es que $\boldsymbol{Y(0)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ entonces,

$$\begin{cases} -2 &= 4c_1 + 3c_2 \\ 5 &= 5c_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} c_2 &=& -2 \\ c_1 &=& 1 \end{array}$$

Luego, la solución del P.V.I es

$$\boldsymbol{y_p} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4cos(3x) - 3sin(3x) \\ 5cos(3x) \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3cos(3x) + 4sin(3x) \\ 5sin(3x) \end{pmatrix}$$

que equivale a

$$\boldsymbol{y_p} = \begin{pmatrix} -2cos(3x) - 10sin(3x) \\ 5cos(3x) - 10sin(3x) \end{pmatrix}$$

Puede observarse en la Figura (1) la trayectoria específica definida paramétricamente por la solución particular $x(t) = -2cos(3t) - 10sin(3t)$ e $y(t) = 5cos(3t) - 10sin(3t)$ en color naranja. Además, es fácil notar que esta curva pasa por el punto $(-2; 5)$.

SECCIÓN 5

Resolución de sistemas lineales de primer orden no homogéneos: Método de variación de parámetros

Si $\{\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \ldots, \boldsymbol{y_n}\}$ es un sistema fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo $\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{AY}$ en el intervalo I, entonces su solución general en el intervalo es la combinación lineal

$$\boldsymbol{y_{gh}} = c_1 \cdot \boldsymbol{y_1} + c_2 \cdot \boldsymbol{y_2} + \ldots + c_n \cdot \boldsymbol{y_n}, \tag{21}$$

que puede ser representada matricialmente por:

$$\boldsymbol{y_{gh}} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \cdot \begin{pmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 y_{11} + c_2 y_{12} + \ldots + y_{1n} \\ c_2 y_{21} + c_2 y_{22} + \ldots + y_{2n} \\ \vdots \\ c_n y_{n1} + c_2 y_{n2} + \ldots + y_{nn} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema lineal homogéneo puede escribirse como

$$\boldsymbol{y_{gh}} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}$$

donde $\boldsymbol{c}$ es un vector columna de n constantes arbitrarias $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y $\boldsymbol{\Phi}(x)$ es una matriz cuadrada de orden n de la forma:

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \vdots & & & \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Definición 5.1. La matriz $\boldsymbol{\Phi}(x)$ se denomina **matriz fundamental del sistema $\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{AY}$** en el intervalo I.

Propiedad 5.1. La matriz fundamental $\boldsymbol{\Phi}(x)$tiene las siguientes propiedades:

- $\boldsymbol{\Phi}(x)$ es no singular, es decir que su determinante es no nulo.

- Si $\boldsymbol{\Phi}(x)$ es una matriz fundamental del sistema $\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{AY}$, entonces,

$$\boldsymbol{\Phi'}(x) = \boldsymbol{A\Phi}(x).$$

Teorema 5.1. *(Método de Variación de los parámetros). La solución general del sistema lineal no homogéneo*

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{AY} + \boldsymbol{b}(x) \tag{22}$$

en el intervalo I es

$$\boldsymbol{y_{gnh}} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}(x)\int \boldsymbol{\Phi^{-1}}(x)\boldsymbol{b}(x)dt. \tag{23}$$

donde $\boldsymbol{\Phi}(x)$ es la matriz fundamental del sistema homogéneo asociado a (22) en el intervalo I, $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)$ es la matriz inversa de $\boldsymbol{\Phi}(x)$ y $\boldsymbol{c}$ es un vector columna de n constantes arbitrarias $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Demostración. Por el Corolario (3.2) sabemos que la solución general del sistema lineal no homogéneo (22) en el intervalo I es de la forma

$$\boldsymbol{y_{gnh}} = \boldsymbol{y_{gh}} + \boldsymbol{y_p}, \tag{24}$$

donde $\boldsymbol{y_p}$ es una solución particular de (22).

Como la solución general del sistema homogéneo $\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{AY}$ asociado a (22) es igual a

$$\boldsymbol{y_{gh}} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c} \tag{25}$$

donde $\boldsymbol{c}$ es un vector columna conformado por n constantes arbitrarias $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y $\boldsymbol{\Phi}(x)$ es la matriz fundamental del sistema lineal homogéneo, sólo resta buscar $\boldsymbol{y_p}$.

Dado que la solución general del sistema homogéneo es $\boldsymbol{y_{gh}} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}$, es natural buscar una solución particular de (22) reemplazando en (25) el vector $\boldsymbol{c}$ por una función vectorial $\boldsymbol{u}(x)$ de la forma

$$\boldsymbol{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n x \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la función particular que se busca está representada por la expresión

$$\boldsymbol{y_p} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{u}(x),$$

y cuya primera derivada es

$$\boldsymbol{y_p'} = \boldsymbol{\Phi'}(x)\boldsymbol{u}(x) + \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{u'}(x)$$

Reemplazanodo $\boldsymbol{y_p}$ e $\boldsymbol{y_p'}$ en el sistema (22) si tiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y_p'} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{y_p} + \boldsymbol{b(x)} \\ \boldsymbol{\Phi'}(x)\boldsymbol{u}(x) + \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{u'}(x) &= \boldsymbol{A\Phi}(x)\boldsymbol{u}(x) + \boldsymbol{b}(x) \\ \boldsymbol{A\Phi}(x)\boldsymbol{u}(x) + \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{u'}(x) &= \boldsymbol{A\Phi}(x)\boldsymbol{u}(x) + \boldsymbol{b}(x) \\ \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{u'}(x) &= \boldsymbol{b}(x) \end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros de la última igualdad por $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)$ se obtiene:

$$\boldsymbol{u'}(x) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{b}(x) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u}(x) = \int \boldsymbol{\Phi^{-1}}(x)\boldsymbol{b}(x)dx.$$

Dado que $\boldsymbol{y_p} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{u}(x)$, entonces,

$$\boldsymbol{y_p} = \boldsymbol{\Phi}(x)\int \boldsymbol{\Phi^{-1}}(x)\boldsymbol{b}(x)dx.$$

Por último, reemplazando la solución general (Ecuación 25) y la solución particular anterior en (24), se obtiene que la solución general del sistema lineal no homogéneo (22) es

$$\boldsymbol{y_{gnh}} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}(x)\int \boldsymbol{\Phi^{-1}}(x)\boldsymbol{b}(x)dx.$$

■

Ejemplo 5.1. Encuentre la solución general del sistema

$$\boldsymbol{y'} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{6x} \\ 3e^{4x} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Solución 5.1. En el Ejemplo 4.3 obtuvimos que la ecuación general del sistema homogéneo asociado es

$$\boldsymbol{y_{gh}} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + c_2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x\, e^{4x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}\right] = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2e^{4x} \\ e^{4x} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 2xe^{4x} + e^{4x} \\ xe^{4x} + e^{4x}. \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz fundamental asociada al sistema lineal homogéneo y su inversa son

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} 2e^{4x} & 2xe^{4x} + e^{4x} \\ e^{4x} & xe^{4x} + e^{4x} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Phi}^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{x+1}{e^{4x}} & -\frac{2x+1}{e^{4x}} \\ -\frac{1}{e^{4x}} & \frac{2}{e^{4x}} \end{pmatrix}$$

Luego, se tiene que la solución particular del sistema es

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y_p} &= \mathbf{\Phi}(x) \int \mathbf{\Phi^{-1}}(x)\boldsymbol{b}(x)dx \\
&= \begin{pmatrix} 2e^{4x} & 2xe^{4x} + e^{4x} \\ e^{4x} & xe^{4x} + e^{4x} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{x+1}{e^{4x}} & -\frac{2x+1}{e^{4x}} \\ -\frac{1}{e^{4x}} & \frac{2}{e^{4x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6x} \\ 3e^{4x} \end{pmatrix} dx \\
&= \begin{pmatrix} 2e^{4x} & 2xe^{4x} + e^{4x} \\ e^{4x} & xe^{4x} + e^{4x} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} e^{2x}(x+1) - 6x - 3 \\ -e^{2x} + 6 \end{pmatrix} dx \\
&= \begin{pmatrix} 2e^{4x} & 2xe^{4x} + e^{4x} \\ e^{4x} & xe^{4x} + e^{4x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - 3x^2 - 3x \\ -\frac{1}{2}e^{2x} + 6x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6x^2e^{4x} \\ 3x^2e^{4x} + 3xe^{4x} - \frac{e^{6x}}{4} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema (26) es

$$\boldsymbol{y_{gnh}} = \begin{pmatrix} 2e^{4x} & 2xe^{4x} + e^{4x} \\ e^{4x} & xe^{4x} + e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6x^2e^{4x} \\ 3x^2e^{4x} + 3xe^{4x} - \frac{e^{6x}}{4} \end{pmatrix}.$$

SECCIÓN 6

Conclusiones

En este estudio se comienza con la definición los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales y el caso particular cuando las ecuaciones que conforman el sistema son lineales, lo que da lugar a los Sistemas Lineales de primer orden. Además, se clasifica a estos sistemas lineales en homogéneos y no homogéneos.

Se presenta la estructura que tienen las soluciones de los sistemas lineales, fudamentada mediante diferentes Teoremas, Corolarios y Proposiciones útiles para desarrollar los métodos convenientes para resolver los sistemas lineales de primer orden cuya matriz asociada está formada por constantes. En este aspecto, se presentan dos métodos de resolución según el sistema sea homogéneo o no homogeneo, para el primer caso se desarrolla el Método de los Autovalores y para el segundo, el Método de Variación de los Parámetros. En relación al Método de los Autovalores se consideran tres situaciones que pueden darse en función de los valores propios de la matriz de coeficientes correspondiente al sistema lineal homogéneo: valores propios reales y distintos; valores propios reales y repetidos; y valores propios complejos.

Referencias

[1] Boyce, W.(1998). *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Fron- tera.* Editorial Limusa - Grupo Noriega Editores, México.

[2] Simmons, F.F. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas. Segunda Edición.* McGraw-Hill, Madrid.

[3] Peña Casonas, J. (2004). *Apuntes de ecuaciones diferenciables.* Link

[4] Zill, D. (2009). *ECUACIONES DIFERENCIALES con aplicaciones de modelado.* Cengage Learning, México. [9° edición].