ESPACIOS MÉTRICOS

Topología

Profesorado en Matemática (Plan 1998)

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam

Equipo docente:

María Eva Ascheri, Profesor Adjunto, Exclusivo, Interino.

Marisa Reid, Profesor Adjunto, Exclusivo, Interino.

Laura Wagner, Jefe de Trabajos Prácticos, Simple, Interino.

Tabla de contenido

TRABAJO PRÁCTICO N° 1: ESPACIOS MÉTRICOS

En este Trabajo Práctico se ofrece una amplia colección de ejercicios, en la que los más complicados están marcados con el símbolo *.

Se espera que los estudiantes comprendan el concepto de distancia y la estructura de espacio métrico; y que resuelvan los ejercicios propuestos utilizando los conceptos desarrollados en las clases teóricas.

Se abordarán actividades como la utilización de los conceptos básicos asociados a la noción de espacio métrico; interpretación de definiciones; reconocimiento, utilización y demostración de las propiedades sencillas de la topología métrica con el propósito de estimular el pensamiento crítico y reflexivo.

Ejercicios propuestos

1. Para $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, definimos

$$d_0\,(x\,,y) = min\{\,|x_1 - y_1|\,,|x_2 - y_2|\}\,.$$

¿Es d_0 una métrica en $\mathbb{R}^2$?

2. Sea $f : E \to E$ una función inyectiva. Demuestre que $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia sobre E.

3. En cada uno de los siguientes ejercicios (E, d) no es un espacio métrico. ¿Por qué?

(a) $E = \mathbb{R}$, $d(x,y) = (x-y)^2$

(b) $E = \mathbb{R}^2$, $d(x;y) = d\big((x_1,x_2),\ (y_1,y_2)\big) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$

(c) $E = \mathbb{R}^2$, $d(x;y) = d\big((x_1,x_2),\ (y_1,y_2)\big) = min\ \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

(d) $E = \{\text{ todas las funciones } f :\ [0,1] \longrightarrow [-4;4]\}$, $d(f,g) = |f(1/2) - g(1/2)|$

4. Si (E,d) es un espacio métrico y consideramos x, y, x' e y' elementos cualesquiera de E, pruebe que:

$$|d(x,y)-d(x',y')| \leq d(x,x')+d(y,y')$$

5. Sea (E,d) un espacio métrico. Sobre él se definen d_1' y d_2' del siguiente modo:

$$d_1'(x,y)=\min\{1, d(x,y)\}$$

$$d_2'(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

Demuestre que d_1' y d_2' son métricas sobre E.

6. Consideremos el espacio $E=C_{\mathbb{R}}[0,1]=\{f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}, f \text{ continua}\}$. Demuestre que si definimos:

$$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx \quad \text{para todo } f,g\in E$$

y

$$d_A(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)-g(x)|\} \quad \text{para todo } f,g\in E$$

entonces d y d_A son métricas. Luego (E,d) y (E,d_A) son espacios métricos.

7. Sean $\vec{x}$, $\vec{y}$ puntos de $\mathbb{R}^n$ y sea

$$d_2(\vec{x},\vec{y})=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$

Pruebe que $(\mathbb{R}^n,d_2)$ es un espacio métrico. (d_2 es llamada la métrica euclídea de $\mathbb{R}^n$).

***8.** Sea $p>1$; $(\mathbb{R}^n,d_p)$ donde $d_p(\vec{x},\vec{y})=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^p]^{1/p}$. Demuestre que $(\mathbb{R}^n,d_p)$ es un espacio métrico.

***9.** Sea $S(\mathbb{R})=\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}: x_n\in\mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty\}$. Si $x=(x_n)$, $y=(y_n)$ definimos:

$$d(x,y)=[\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2]^{1/2}$$

Pruebe que $(S(\mathbb{R}), d)$ es un espacio métrico. $S(\mathbb{R})$ se llama *Espacio de Hilbert* y se lo suele notar por l_2.

10. Definición. $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice una *pseudométrica* si verifica:

1) $d(x,x) = 0$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Si d es una pseudométrica sobre E y $x, y \in E$, definimos una relación binaria sobre E por

$$x \approx_d y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$$

Se pide:

(a) Pruebe " $\approx_d$ " es una relación de equivalencia sobre E.

(b) Dados $x, y, z, w \in E$ tales que $x \approx_d y$ y $z \approx_d w$, demuestre que $d(x,y) = d(z,w)$

(c) Sean $\overline{x}, \overline{y} \in (E/\approx_d)$ ($\overline{x} =$ clase de $x = \{z \in E: z \approx_d x\}$). Dados $a \in \overline{x}$ y $b \in \overline{y}$ definimos $\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = d(a,b)$. Pruebe que $\overline{d}$ es una métrica en $(E/\approx_d)$, que se llama *asociada a d.*

(d) Sea $e(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1|$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$; $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Pruebe que e es una pseudométrica. ¿ $(\mathbb{R}^2, e)$ es un espacio métrico? Justifique la respuesta.

11. Una rotación de punto $\boldsymbol{x}$ alrededor del origen en sentido contrario a las agujas por un ángulo θ denotado por:

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

es una isometría sobre $(\mathbb{R}^2,\ d_2)$.

12. Demuestre que toda isometría $f: (\mathbb{R}, |\ \ |) \rightarrow (\mathbb{R}, |\ \ |)$ cumple que

$$f(x) = a + x \text{ ó } f(x) = a - x.$$

13. Sea (E, d) un E.M. y sean $x, y \in E$, $A \subseteq E, A \neq \emptyset$, pruebe que:

$$\left| d(x,A) - d(y,A) \right| \leq d(x,y)$$

14. Sean (E,d) un espacio métrico, *a* y *b* elementos de E, *r* y *s* números reales positivos. Si $x \in B(a,r) \cap B(b,s)$. Demuestre que existe una bola abierta $\delta > 0$ tal que

$$B(x,\delta) \subseteq B(a,r) \cap B(b,s).$$

15. Dado el subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} = \{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$$

Calcule $d_1\big((2{,}0),A\big)$ y $d_\infty\,((2{,}0),A)$.

16. Dados el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \text{ y } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\}.$$

Calcule $d(A,B)$.

17. Consideremos $E = \mathrm{C}_{\mathbb{R}}[0,2\pi] = \{f\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$ con la métrica:

$$\mathrm{d_A}(f,g) = \sup_{x\in[0,2\pi]}\{|f(x) - g(x)|\} \quad \text{para todo } f,g \in E$$

y el conjunto

$$A = \{sen\,x + k : 0 \leq k \leq 1\}$$

(a) ¿Cuál es la distancia de la función $f(x) = x^2 + 2$ al conjunto A?

(b) Si

$$B = \{cos\,x + k : 2 \leq k \leq 3\}$$

¿cuánto vale $d(A,B)$?

18. Sea (E,d) un E.M, $A,B \subseteq E$, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$, entonces:

(a) $A \subseteq B \rightarrow \delta\,(A) \leq \delta\,(B)$

(b) $\delta\,(A \cup B) \leq \delta\,(A) + \delta\,(B) + d(A,B)$.

¿Qué ocurre si $A \cap B \neq \emptyset$?

(c) $\delta\,(A) = 0 \leftrightarrow A = \{a\}$

19. Sea (E,d) un E.M, pruebe que $B(x_0,r)$; $B_c(x_0,r)$; $B_{or}(x_0,r)$; son conjuntos acotados.

20. Sea $E = \mathbb{R}$, para $x,y \in \mathbb{R}$ se define $d\,(x\,,y)= \ |x| + |x-y| + |y|$. Demuestre que d es una métrica sobre $\mathbb{R}$.

Además demuestre que la bola abierta centrada en 0 de radio ε con la métrica d es igual al intervalo $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ (bola centrada en 0 con la métrica usual). Analice cómo son las bolas abiertas centradas en cualquier elemento no nulo $y \in \mathbb{R}$, con la métrica d.

21. Sea el E.M. $(\mathbb{R},\ d_T)$ y sean A, B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$.

(a) Determine $d_T(A,B)$.

(b) Sean $A = [0,1)$ y $B = (1,4]$ subconjuntos de $\mathbb{R}$. Calcule la distancia de A a B usando:

i) la métrica usual,

ii) la métrica discreta.

(c) Sea (E,d) un E.M. y sean A, B subconjuntos no vacíos de E.

Demuestre que si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $d(A,B) = 0$.

***21.** En el E.M. (R^n, d_p), $p > 1$, pruebe que todo hipercubo H es acotado.

22. Sean A y B conjuntos acotados en un E.M. (E,d). Demuestre que $A \cup B$ es un conjunto acotado.

Deduzca que una unión finita de conjuntos acotados en E es un conjunto acotado.

23. Sea $(\mathbb{R};\ |\ \ |)$ y sea $A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Pruebe que A es totalmente acotado.

24. Es la unión de dos conjuntos totalmente acotados, ¿un conjunto totalmente acotado?

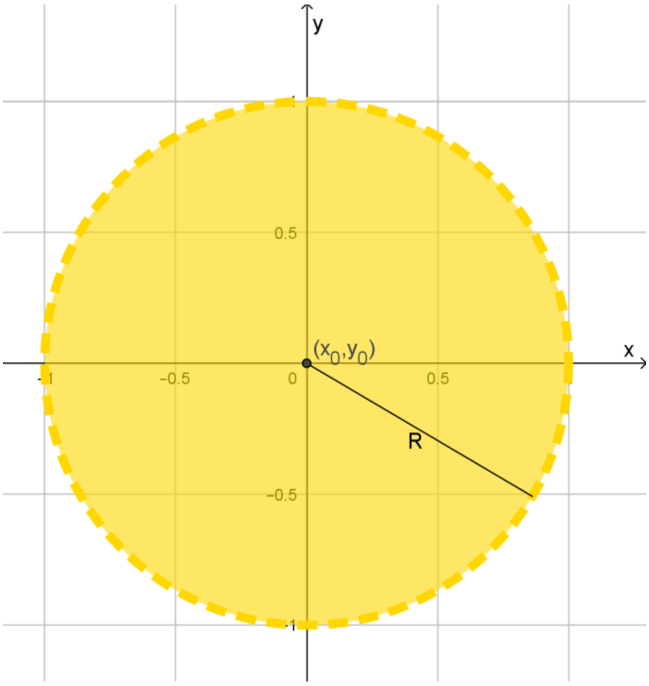
25. Sea (E, d) un espacio métrico y sean A y B subconjuntos no vacíos de E tales que $A \subseteq B \subseteq E$. Si B es totalmente acotado. Demuestre que A es totalmente acotado.

26. Pruebe que en un espacio métrico discreto, un conjunto es totalmente acotado si y sólo si es finito.

27. Con $\mathbf{0}$ denotamos el origen en $\mathbb{R}^n$, así $\mathbf{0} = (0;\ 0)$ en $\mathbb{R}^2$, y $\mathbf{0} = (0;\ 0;\ 0)$ en $\mathbb{R}^3$.

Represente gráficamente las bolas $B(\mathbf{0};\ 1)$ y $B_C(\mathbf{0};\ 1)$ para cada uno de los siguientes espacios métricos (E, d):

(a) $E = \mathbb{R}^2, d\,(\vec{x}, \vec{y}) = d_2(\vec{x}, \vec{y})$



(b) $E = \mathbb{R}^2,\ d\,(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{3}\, d_T(\vec{x}, \vec{y}) + d_1(\vec{x}, \vec{y})$

(c) $E = \mathbb{R}^2,\ d(\vec{x}, \vec{y}) = d\big((x_1, x_2),\ (y_1, y_2)\big) = \sqrt[3]{|x_1 - y_1|^3 + |x_2 - y_2|^3}$

(d) $E = \mathbb{R}^3,\ d\,(\vec{x}, \vec{y}) = d_2(\vec{x}, \vec{y})$, *(la métrica euclídea en $\mathbb{R}^3$)*

28. Definición. Sea (E, d) un espacio métrico, sea $A \subseteq E$ y sea $x \in E$. Se dice que un punto $a \in A$ es *"el punto más cercano de A a x"* si $d\,(x, a) = d\,(x;\ A)$.

(a) Demuestre que si $x \in A$ entonces, x es el punto más cercano de A a x, y no existen otros puntos más cercanos a A que x.

(b) Demuestre que si tomamos $(E, d) = (\mathbb{R}; |\quad|)$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ contiene ninguno, uno o dos puntos más cercanos a x. Dé ejemplos para mostrar que cada una de estas posibilidades pueden ocurrir.

29. Sea (E, d) un E.M., $r \in R, r > 0, x_0 \in E$. Pruebe que:

(a) $B(x_0, r) \subseteq B_C(x_0, r)$.

(b) $B_{or}(x_0, r) \subseteq B_C(x_0, r)$.

(c) $B_{or}(x_0, r) = B_C(x_0, r) - B(x_0, r)$.

(d) $B(x_0, r) \cap B_{or}(x_0, r) = \varnothing$

30. Sea $f:(E, d) \to (E', d')$ una isometría. Demuestre:

(a) f^{-1} es una isometría.

(b) d es discreta $\leftrightarrow d'$ es discreta.

(c) **i)** $f(B(x_0, r)) = B(f(x_0), r)$.

ii) $f(B_C(x_0, r)) = B_C(f(x_0), r)$.

iii) $f(B_{or}(x_0, r)) = B_{or}(f(x_0), r)$.

(d) A es acotado en $E \leftrightarrow f(A)$ es acotado en E'.

31. Pruebe que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ es una isometría de $(\mathbb{R}^2, d_1)$ en $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

Sugerencia: Usar que si a y b son números reales, entonces se verifica:

$$\left|\frac{1}{2}(a+b)\right| + \left|\frac{1}{2}(a-b)\right| = \max\{|a|, |b|\}$$

32. Dado un espacio métrico (X, d) y dos puntos $x, z \in X$ se define el conjunto igualdad de la desigualdad triangular $E_d(X, d)$ del siguiente modo:

$$E_d(x, z) = \{y \in X : d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)\}$$

Pruebe que si $f : (X, d) \longrightarrow (X, d')$ es una isometría, entonces

$$E_{d'}(f(x), f(z)) = E_d(x, z)$$

Referencias bibliográficas

- Apostol, T. (1979). Análisis Matemático. Barcelona: Ed. Reverté, S. A.
- Ascheri, M. E. y Reid, M. (2008). Nociones Previas a la Topología Métrica. Santa Rosa (La Pampa): EdUNLPam.
- Ascheri, M. E. y Reid, M. (2016). Espacios Métricos. Santa Rosa (La Pampa): EdUNLPam.
- Kolmogorov, A. y Fomin, S. (1975). Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Moscú: Ed. Mir.
- Kuratowski, K. (1973). Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Topología. Barcelona, España: Ed. Vicens – Vives.
- Lima, E. L. (1977). Espaços Métricos. Río de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA.
- Lima, E. L. (1982). Curso de Análise. Volumen 1. Río de Janeiro: Projecto Euclides, IMPA.
- Lipschutz, S. (1970). Topología General. México: Ed. Mc Graw – Hill.
- Michavila, F. (1981). Espacios métricos. Espacios vectoriales normados. Madrid, España: Editorial AC.