

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
- UNLPAM -
PROFESORADO EN MATEMÁTICA 2013
- PRÁCTICA EDUCATIVA III -
WALTER MORERO

SIGNIFICATIVIDAD: UN CRITERIO PARA LAS BUENAS
PRÁCTICAS





PLANIFICACIÓN DEL PRIMER CUATRIMESTRE: DESCENSOS DEL FÚTBOL ARGENTINO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTOS DE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL



Planificación del Primer Cuatrimestre

Descensos del Fútbol Argentino para la Construcción de Conocimientos de Medidas de Tendencia Central

Fundamentación de la propuesta

Unos de los motivos por los cuales elegí este curso fue porque me coincidían los horarios y porque desconocía totalmente el colegio por lo cual es bueno tener otra perspectiva y experiencia de conocer un nuevo establecimiento, ya que no todos los establecimientos son iguales. Hay una gran brecha entre los colegios 'céntricos' y colegios denominados 'de la periferia' que por lo general son los colegios que se encuentran alejados del centro y más que nada en los barrios. Por mi parte no me atrevo a decir que todos los colegios denominados periferias son difíciles de trabajar, ya sea por problemas familiares de los chicos, problemas económicos, etc; si bien son variables que influyen de algún cierto modo en el aprendizaje esto no implica que por tal motivos no se pueda trabajar en el aula o que son cursos 'bravos', o es imposible trabajar, no hacen nada, como lo denominan algunos colegas. Estas frases se dicen con mucha frecuencia pero nadie te dice si experimentó alguna estrategia o propuesta distinta que motive a los alumnos y que tenga como fin la enseñanza de conocimientos de una forma significativa para apuntar a la autonomía de los alumnos. Estos profesores, si se los puede llamar así, ya que la mayoría no son profesores sino abogados, ingenieros químicos, maestras, que su título los habilita a dar la disciplina usan el antiguo método estructurado y mecanizado de dar la matemática, provocando el desinterés por parte del alumnos como consecuencia la pérdida del sujeto y el conocimiento provocando el fracaso escolar y dándole crédito a al famoso dicho 'la matemática es aburrida y difícil'. Por lo explicitado anteriormente el problema no es del los chicos o cursos, o establecimiento, sino que deviene de las propuestas y predisposición del profesor, sino hacemos algo para cambiar todo seguirá igual, y por consiguiente la brecha de desigualdad social será aún mayor generando mayores problemas sociales. Por este motivo decidí elegir este colegio para planificar propuestas interesantes para la implementación de conocimientos apuntando a que los alumnos aprendan, construyan el conocimiento de una forma significativa y fortaleciendo así su autonomía.

PLANIFICACIÓN ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

TEMA:

- ✓ Medidas de tendencia central: media, moda y mediana.

Objetivos generales:

- ✓ Reconocer y analizar las distintas medidas de tendencia central.
- ✓ Analizar y a partir de una muestra cual será la mediada de tendencia central más representativa.

Objetivos específicos:

- ✓ Obtener la expresión de la media a partir de diferentes situaciones problemáticas.
- ✓ Calcular media mediana y moda a partir de distintas muestras.

Conocimientos previos:

- ✓ Números reales y sus operaciones.
- ✓ Población y muestra.
- ✓ Tipos de variables.
- ✓ Datos estadísticos: recolección, clasificación, análisis e interpretación.

- ✓ Gráficos estadísticos: barras, circular e histograma. Construcción de gráficos estadísticos apropiados a distintas situaciones. Interpretación de gráficos estadísticos.

Secuencia y Resoluciones

Situación 1:

- 1) **Un objeto pequeño se pesa con un mismo instrumento por 13 estudiantes de una clase, obteniéndose los siguientes valores en gramos: 6.25, 6.23, 6.19, 6.25, 6.30, 6.18, 6.24, 6.26, 6.27, 6.26, 6.21, 6.27, 6.22 ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?**
- 2) **Unas chicas llevan a clase caramelos. Josefina lleva 12, María 9, Sandra 11, Carmen 3 y Julieta no lleva ninguno. ¿Cómo se les ocurriría a ustedes que pueden hacer las chicas para repartir los caramelos de forma equitativa?**

Posibles resoluciones de los alumnos e intervención docente:

Estos dos problemas los utilizaría para empezar a discutir la noción de media aritmética o promedio. Lo primero que se les ocurrirá a los alumnos es por ejemplo, ¿a qué valor se aproximan los distintos pesos?, la respuesta sería que el valor que representa mejor el peso del objeto es 6.25 ya que la mayoría de los valores están se aproximan mas a él. Otros calcularían el promedio entre el valor máximo y el valor mínimo es decir, $(6.30+6.18)÷2=6.22$. Otra forma de resolución es que sumen todos los valores y dividan por la cantidad total de datos, es decir,

$$(6.25+6.23+6.19+6.25+6.30+6.18+6.24+6.26+6.27+6.26+6.21+6.27+6.22)÷13= 81.13÷13= 6.2407.$$

Otros optarán por tomar 6.26 ya que es el valor que aparece más veces.

En el segundo problema puede aparecer resoluciones como: Josefina reparte los doce caramelos entre las 5 amigas, o sea que a cada una le toca 2 caramelos y le sobran dos, María les da 1 caramelo más a cada una de sus amigas y le sobran cuatro, Sandra les da 2 caramelos mas a cada una, y le sobra un caramelo, Carmen como no llega a convidarle un caramelo a cada una de sus amigas decide que sus tres caramelos quedarán para repartir entre los caramelos que fueron sobrando a cada una de las amigas y por último Julieta no reparte ningún caramelo; luego hacen el recuento de todos los caramelos que le fueron sobrando a cada una, es decir, la suma total de los caramelos sobrantes que es igual a $2+4+5+3=10$, luego para finalizar a cada una le toca 2 caramelos mas por lo que a cada amiga le corresponden 6 caramelos.

Otra forma es que sumen la cantidad total de caramelos y la dividan por 5 que es el total de chicas.

Este problema parece sencillo y está relacionado también a la idea de división, lo que pretendo como institucionalización es introducir una definición teórica de promedio, o más bien una propiedad característica que es la siguiente:

El promedio o también llamada media aritmética es la cantidad equitativa a repartir cuando tenemos diferentes cantidades.

Situación 2:

Una de los acontecimientos más importantes que se dio en el deporte en el año 2011 fue sin dudas, el descenso de River Plate a la Segunda División del futbol Argentino, ahora se habla

que el club Independiente esta complicado con irse al descenso. Nunca se le había dado importancia al descenso hasta que se vieron involucrados estos clubes que son denominados grandes, por lo que su historia representa.

Cada vez que se acerca el final de un torneo de fútbol de la AFA, los hinchas más fanáticos suelen estar tan pendientes del resultado de su equipo como del de los demás. Sucede que, a diferencia de otras ligas del mundo, en nuestro país existe lo que se llama “Promedios del descenso” y que afecta directamente a todos los equipos de cada una de las categorías profesionales: Primera A, Nacional B, Primera B, C, D y Argentino A y B.

La importancia de tener un buen promedio es simple de entender. Al final de cada temporada compuesta por el Torneo Clausura que se juega de Marzo a Julio y el Torneo Apertura de Agosto a Diciembre, más allá de haber campeones y subcampeones, hay equipos que ascienden a otra categoría y equipos que descienden.

Los campeones son los que más puntos suman mientras que los que descienden no son necesariamente los que menos puntos sumaron en el año deportivo sino los que peor promedio obtuvieron. Tener el peor promedio y tener la menos cantidad de puntos suena parecido, pero no lo es. ¿Por qué?, porque el promedio no se calcula en función al último año sino a los último tres jugados en la misma categoría. Por lo tanto, para los únicos equipos que ser últimos y tener el peor promedio es lo mismo, es para los que recién ascendieron o descendieron de categoría.

Para tener en cuenta en el promedio:

El promedio máximo es 3 – siendo el caso de un equipo que ganó todos los partidos (recuerden que el triunfo suma 3 puntos, el empate 1 y la derrota no suma) y el mínimo es cero en caso de un equipo que perdió todos los encuentros que disputó.

Ahora bien, teniendo en cuenta que en cada torneo de Primera A participan 20 equipos y se cruzan entre todos, en total se disputan 19 partidos y en el año deportivo que va de Junio a Junio hay 2 torneos, cada equipo disputa en un año 38 partidos.

Al finalizar el año deportivo, los tres equipos de Primera A que hayan terminado últimos en la tabla general de los promedios (18º, 19º y 20º) descienden y los tres equipos del Nacional B que hayan obtenido mayor cantidad de puntos (no de promedio) a lo largo de toda la temporada, ascienden. Pero también existe la promoción.

La siguiente tabla muestra la situación actual de los equipos que participan en Primera A:

#	Equipo	10/11	11/12	12/13	PTs	PJ	PROM
1	Velez	82	64	55	201	110	1.827
2	River Plate	0	0	58	58	34	1.705
3	Lanus	63	55	62	180	110	1.636
4	Arsenal	57	62	57	176	110	1.600
5	Boca Juniors	53	76	46	175	110	1.590
6	Belgrano	0	55	56	111	72	1.541
7	Estudiantes	69	50	43	162	110	1.472
8	Newells	42	48	68	158	110	1.436
9	Racing Club	52	50	53	155	110	1.409
10	Colon	47	60	44	151	110	1.372
11	Godoy Cruz	63	38	44	145	110	1.318
12	San Lorenzo	47	44	52	143	110	1.300

#	Equipo	10/11	11/12	12/13	PTs	PJ	PROM
13	Tigre	50	63	30	143	110	1.300
14	All Boys	51	54	37	142	110	1.290
15	Atl Rafaela	0	50	41	91	72	1.263
16	Argentinos	54	49	27	130	110	1.181
17	Quilmes	0	0	40	40	34	1.176
18	Independiente	43	47	37	127	110	1.154
19	San Martin (SJ)	0	48	34	82	72	1.138
20	Union	0	50	20	70	72	0.972

1) Leer e interpretar la tabla, para luego hacer una puesta en común sobre los ítems siguientes:

a) *Se estima que Argentinos, Quilmes y Independiente suman 6 puntos en los cuatro partidos que quedan del campeonato.*

Marcos para calcular el promedio de estos equipos al finalizar el torneo hizo lo siguiente: al promedio actual le sumo $6 \div 4$, a todo este resultado lo dividió por 2, es decir: $(\text{Promedio Actual} + (6 \div 4)) \div 2 = \text{Promedio}$.

Lucia en cambio hizo lo siguiente: al promedio que tenia le sumo el resultado de dividir $9 \div 4$, es decir: $\text{Promedio actual} + (6 \div 4) = \text{Promedio}$.

Rocío afirma que para calcular el promedio hizo lo siguiente: a la suma de todos los puntos de las últimas tres temporadas le sumo 9 puntos, a ese total lo divide por 114, es decir: $(\text{suma de los puntos de las tres temporadas} + 9) \div 114 = \text{Promedio}$.

¿Se obtienen los mismos resultados? ¿Cuál de los métodos de los tres amigos crees que es más conveniente para calcular el promedio? Si consideras que hay otro método para calcular el promedio, ¿cuál sería? Calcular es el promedio de los tres clubes al finalizar el campeonato.

Posibles resoluciones de los alumnos:

En este problema puede haber respuestas variadas, ante la duda los alumnos lo primero que harían es tomar como ejemplo alguno de los tres club mencionados como modelo para hacer los cálculos pertinentes utilizando los tres métodos mencionados.

Intervención docente:

Este problema tiene la intención de que los alumnos puedan ver las diferentes formas que pueden surgir para calcular el promedio, para que puedan distinguir las erróneas de las correctas matemáticamente, además de poder generar argumentos válidos de por qué su elección. En estos casos es importante que el docente busque contraejemplos apoyándose en propiedades de la media aritmética para que pongan en dudas los argumentos incorrectos de los alumnos para llegar a una institucionalización o remarcar el sentido que tienen las consignas. Uno de los contraejemplos que se pueden usar en este caso para el caso de Lucia es aplicar un caso en el que no se cumpla con la propiedad de que la media aritmética tiene que estar comprendida entre los extremos de los datos o de la distribución, por ejemplo:

si las notas de evaluaciones parciales de un alumno de un alumno son 5,6 y 7 el promedio le va a dar 6, luego obtiene un 6 y 7 en las dos últimas pruebas, ¿Qué promedio tendrá en el semestre si se promedian las 5 notas de las evaluaciones parciales? En este ejemplo está claro que si seguimos el razonamiento de Lucía obtenemos: $(6+(7+6)/2)= 12,5$ está claro que el promedio de notas no puede ser mayor que diez por lo tanto existe un límite, y ese límite está comprendido entre los extremos o valores máximos y mínimos que puede tener una distribución o conjunto de datos. Si nos enfocamos en la situación el promedio tiene que estar comprendido entre 0 y 3 (en el caso que pierdan todos los partidos el promedio es 0 y en el caso que ganen todos los partidos el promedio será 3). Para dar cierre a la institucionalización se pretende que los alumnos puedan interpretar que expresión que utilizo Rocío es la correcta y se puede enunciar la propiedad enunciada en el contraejemplo anterior.

- b) Se estima que Atlético Rafaela obtendrá 15 puntos en los 8 partidos que quedan para terminar la temporada 12/13, ¿qué promedio obtendrá al finalizar la temporada?**

Posibles resoluciones de los alumnos:

Puntos que lleva hecho Atlético Rafaela= 87

Partidos jugados en las últimas tres temporadas=68

Si de los últimos 8 partidos que quedan se estima un total de 15 puntos, entonces $87+15=102$ son los puntos obtenidos en las últimas tres temporadas, $68+8=76$ partidos jugados en las últimas tres temporadas, luego para calcular el promedio lo que hay que hacer es el cociente entre la suma total de puntos hechos en las últimas tres temporadas sobre la cantidad de partidos jugados, es decir, $102/76=1,342$. Otra forma de resolución que puede aparecer es que para calcular el promedio hagan el cociente entre la cantidad de puntos sumados que es 102 sobre los 68 partidos, es decir, el promedio es $=102/68=1.5$, en este caso el error está en que no le sumaron los 8 partidos que restan para terminar la temporada. Otra forma de resolución que puede aparecer es obtener el promedio como suma de los dos promedios parciales que hay, es decir, $(50+37/68) + (15/8)=1,279+1,875=3,154$.

Intervención docente:

Es importante que aparezcan todos estos distintos tipos de resoluciones para luego hacerlos explícitos a través de una puesta en común para generar un ambiente de discusión entre los alumnos, y como docente hacerles entender donde cometieron los errores, dando algún contraejemplo o haciendo hincapié en la relectura del problema o situación, por ejemplo en el último caso de resolución hacerles la pregunta a todo el curso: ¿es posible que el promedio sea 3,154 con los datos que nos da la situación? En este caso se pretende que los alumnos se den cuenta que el promedio máximo que se puede obtener es 3 puntos en el caso que el equipo gane todos los partidos ya que la situación nos dice que por partidos ganados suman 3 puntos, los perdidos 0 puntos y los empatados 1 punto. A partir de los errores de los alumnos se puede desviar a otros puntos importantes a tratar de la situación como el promedio máximo o mínimos que puede obtener un equipo, etc; lo importante es que se tengan en cuenta estos errores para luego discutirlos en conjunto con los alumnos para que puedan ver los distintos casos, es decir, donde se produce el error, las distintas formas de resolución, etc. Como institucionalización se pretende llegar a

la primera resolución del problema, es decir, que puedan interpretar y transcribir los datos que nos brinda el problema para poder calcular el promedio. Si aparece el último caso de resolución es importante llegar a una de las propiedades del promedio: “la media o promedio es un valor comprendido entre los extremos”.

- c) ***Si a la suma de los puntos obtenidos temporada 10/11 los llamamos “SP1”, a los de la temporada 11/12 “SP2” y a los de la temporada 12/13 con la palabra “SP3”, a la cantidad total de partidos jugados en las tres temporadas con la palabra “N” y al promedio lo denominamos con la palabra “Promedio”. ¿Cómo le explicarían a un compañero a través de una serie de instrucciones o expresión matemática como harían para calcular el promedio?***

Posibles resoluciones de los alumnos:

Una de las resoluciones es $(SP1+SP2+SP3)/N=Promedio$, otra forma de resolución es: $(SP1/N)+(SP2/N)+(SP3/N)=Promedio$,

Intervención Docente: Este problema tiene como objetivo que los alumnos puedan encontrar una expresión o fórmula para calcular el promedio. Como en el problema anterior hay que explicitar todas las resoluciones, una vez explicitadas las distintas resoluciones lo que haría es probar con un ejemplo de la tabla de promedios y verificar en forma conjunta con los alumnos para comprobar si la fórmula que encontraron funciona o bien si hay algún alumno que no esté de acuerdo con alguna de las expresiones que dé el porqué de su desacuerdo. Una vez hecho el análisis y el debate de las distintas expresiones se concluirá que la expresión válida es:

$(SP1+SP2+SP3)/N=Promedio$.

- d) ***Teniendo en cuenta los datos del problema anterior, si se estima la suma de los puntos de la temporada 13/14 y 14/15 que los denominaremos SP4 y SP5 simultáneamente y se sabe que en total en estas dos temporadas se jugaron un total de 76 partidos, Estefanía una periodista que trabaja en el diario la reforma quiere saber cómo se obtiene la expresión matemática para calcular el promedio de las últimas cinco temporadas. Encuentra una fórmula o expresión matemática que le ayude a Estefanía a calcular el promedio de las últimas 5 temporadas.***

Posibles resoluciones de los alumnos:

$(SP1+SP2+SP3+SP4+SP5)/(N+76)=Promedio$

$(SP1+SP2+SP3)/N + (SP4+SP5)/76=Promedio$

Intervención Docente:

El objetivo de este problema es que los alumnos entiendan la noción de la media o promedio como la suma de todos los puntos de todas las temporadas sobre la cantidad total de partidos jugados en las últimas 5 temporadas y no como la suma parciales de promedios como pueden aparecer en algunas de las resoluciones de los alumnos, si llega aparecer este error es importante hacerlo explícito como en el apartado anterior para mostrar con algún contraejemplo apoyándose en la tabla u otro ejemplo en el cual se vea reflejado el mismo problema. Una vez discutido el problema y haber hecho la puesta en común ya estoy en condiciones de institucionalizar el concepto de media o promedio. La resolución de este problema es:

$(SP1+SP2+SP3+SP4+SP5)/(N+76)=Promedio$.

Para continuar trabajando con la noción de promedio una de las preguntas que puedo hacer es, ¿Cómo sería la expresión matemática o fórmula para calcular el promedio si: se agregaran dos temporadas más, tres o cuatro? Si tenemos que un equipo hizo en la primera temporada X_1 puntos, en la segunda temporada hizo X_2 puntos, en la tercera hizo X_3 puntos,..., y así sucesivamente hasta la temporada k en la cual hizo X_k puntos, ¿cuál sería la expresión matemática para calcular el promedio de este equipo si se sabe que en las k temporadas se jugaron un total de N partidos? Una vez hecha la puesta en común se concluirá que la expresión para calcular el promedio de este equipo es:

$$\text{Promedio} = (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k) / N$$

Una de las dificultades en este caso es que no entiendan muy bien el término X_k , en el cual se deberá explicar que ese valor k puede tomar cualquier valor natural, como por ejemplo, si hay 10 temporadas en la cual habrá que calcularle el promedio la expresión que le corresponde a la cantidad de puntos para la decima temporada sería X_{10} , análogamente ocurre lo mismo si tenemos 11 o 15 temporadas por eso se toma arbitrariamente un total de k temporadas.

Al finalizar con la puesta en común se introducirá la noción de “MEDIA ARITMÉTICA”. *La media aritmética, también llamada promedio, se calcula con la suma de todas las observaciones en un conjunto de datos, dividida entre el número de elementos que lo componen. Se representa o denota con $\bar{X}$.*

2

Actividades de tarea:

- En un grupo, los varones obtienen las siguientes notas en Educación Física:**
5,6 ; 5,5 ; 4,8 ; 7 ; 6,4 ; 5,5 ; 4,5 ; 5,6 ; 5,4 ; 5,8 ; 6,0 ; 5,2
Las damas, a su vez, obtuvieron:
6,6; 6,5; 5,8; 4,8; 5,9; 7
Un niño dijo: nuestro promedio es 5,6; y una niña dijo nuestro promedio es 6,1.
Julio, que estaba escuchando, realizó los siguientes cálculos en su cuaderno:
5,6 + 6,1 = 11,7 11,7 ÷ 2 = 5,85 y dijo: este grupo tiene promedio 5,9;
¿qué error cometió Julio? Fundamente su respuesta.
- La altura media de los alumnos de un colegio es 1'40. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la altura de los 4 primeros es de 1'38, 1'42, 1'60, 1'40. ¿Cuál sería la altura más probable del quinto estudiante?**

- e) Una periodista deportiva quiere saber el promedio de 4 equipos. Se sabe que los 4 equipos tienen 15 puntos, un simpatizante le dice que si los cuatro tienen 15 puntos, entonces todos van a tener el mismo promedio. Se tiene que:**

Equipos	Part. Ganados	Part. Empatados	Part. Perdidos
A	3	6	0
B	4	3	0
C	5	0	2
D	6	9	0

¿Es cierta la afirmación del simpatizante? ¿Qué respuesta le deberá dar la periodista?Posibles resoluciones de los alumnos:

Alguno alumnos quizás estén tentados a responder que el promedio será el mismo sin tener en cuenta que la cantidad de partidos varía, por lo tanto los promedios de los equipos serán distintos. Otra resolución que puede aparecer es que los promedios serán distintos ya que los puntajes obtenidos son distintos, solamente el equipo B y C tienen el mismo promedio.

Intervención Docente:

Este es un problema que tiene como objetivo que los alumnos utilicen la información de la situación inicial planteada para analizar como varía el promedio al variar la cantidad de partidos, es decir, si tenemos uno de los dos componentes constantes como en este caso la suma total de puntos, a mayor cantidad de partidos menor será el promedio. Es importante preguntar qué es lo que tienen en común y que de distintos los cuatro equipos para que puedan realizar producciones y argumentos correctos.

- f) Se sabe que un club A en la primera temporada hizo 56 pts, en la segunda 48 pts y que hizo un promedio de 1.50. ¿Cuántos puntos hizo en la tercera temporada?**

Posibles resoluciones de los alumnos:

$(56+48+X)/(38+38+38)=1.50 \Leftrightarrow X=(1.50 \times 114)-104=67$ Luego en la tercera temporada hizo 67 puntos.

Otra posible resolución puede ser la siguiente: $(56+48) \div 76 = 1.368$, me falta 0,132 para llegar a 1.5, luego tengo que encontrar un número que dividido por 38 me de 0,132. Entonces tengo: $(X \div 38) = 0,132 \Leftrightarrow X = 5$. Luego en la tercera temporada el club A hizo 5 puntos, ya que $(56+48) \div 76 + (5 \div 38) = 1,368 + 0,132 = 1,5$

Intervención Docente:

Este problema tiene como objetivo que los alumnos apliquen la noción de la media aritmética para calcular uno de los datos faltantes de la ecuación. Si se observan errores como en la segunda forma de resolución, quiere decir que se arrastra el error de las sumas parciales de promedios y para que esto no ocurra se puede recurrir a la tabla para mirar el promedio de equipos que cuenten con tres temporadas y preguntar si es posible que un equipo con un promedio de 1,5 pueda realizar 5 puntos en una de las tres temporadas.

Situación 3:

- a) Jorge, el profesor de educación física, cronometra el tiempo que tardan, en correr 100 metros, los chicos que van a competir en el intercolegial. Entre sus 31 alumnos algunos tardaron 20 segundos, otros 25, otros 30 y algunos, 32 segundos.**

Tiempo (en segundos)	Número de alumnos (Frecuencia)
20	12
25	10
30	5
32	4
Total	31

Más que contento, entró a la sala de profesores y dijo: “¡El promedio de los chicos batió todos los records: 3,45 segundos!”

Úrsula, la profesora de Matemática, no muy convencida, le pidió que le mostrara los cálculos que había hecho, y con el micro fibra roja le tachó todo. ¿Por qué será?

Posibles resoluciones de los alumnos:

Algunos alumnos no estarán de acuerdo con la profesora de matemáticas porque lo que el profesor de educación física afirma es correcto, es decir, la forma de calcular el promedio que el profesor utilizó es correcta: $(20+25+30+32) \div 31 = 3,45$

Otra forma de resolución que puede aparecer es:

$$(20 \div 12) + (25 \div 10) + (30 \div 5) + (32 \div 4) = 1,666 + 2,5 + 6 + 8 = 18,66$$

La resolución esperada o que se pretende que lleguen a elaborar los alumnos es:

Como 12 alumnos tardaron 20 segundos, 10 lo hicieron en 25 segundos, 5 en 30 y 4 en 32 segundos, si desagrupamos los datos tenemos que los 31 tiempos generados por los alumnos son:

20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 30, 30, 30, 30, 32, 32, 32, 32.

Para calcular la media sumamos todos los datos y los dividimos por la cantidad total de alumnos:

$$\text{Suma total de los 31 tiempos} = (20 \times 12) + (25 \times 10) + (30 \times 5) + (32 \times 4) = 768$$

$$\text{Cantidad de alumnos} = 31$$

$$\text{Promedio de tiempos de los chicos} = 768 \div 31 = 24.77$$

Intervención Docente:

La intencionalidad que tiene este problema es introducir el concepto del cálculo de la media para datos agrupados.

Como institucionalización tenemos que para calcular la media para variables cuantitativas discretas cuando los datos están agrupados es igual a la suma de total de los productos entre las observaciones por sus respectivos frecuencia absolutas. Se denota de la siguiente forma:

$X = (\sigma_1 \times f_1 + \sigma_2 \times f_2 + \dots + \sigma_k \times f_k) \div N$ donde σ_i son las observaciones, f_i son las frecuencias relativas de cada observación y N es la cantidad total de datos.

b) Con los datos que nos brinda la siguiente tabla de frecuencias que muestra el peso de 41 alumnos. ¿Cómo harían para calcular el peso medio de los alumnos?

Intervalos Peso kg	Frecuencia Absoluta (f_i)
(58-61]	5
(61-64]	10
(64-67]	15
(67-70]	5
(70-73]	6
Totales	41

Posibles resoluciones de los alumnos e intervención docente:

Este problema lo trabajó anteriormente el profesor en el cual se mostraban los pesos de 41 alumnos y lo que se pretendía hacer era completar una tabla de frecuencias que solamente

contaba con los intervalos de la primer columna, las siguientes columnas estaban conformadas por frecuencia absoluta, frecuencia acumulada y el porcentaje. Aquí solamente lo que hice fue utilizar las dos primeras columnas para que se genere la discusión de cómo se calcula el promedio cuando los datos están agrupados, muchos alumnos estarán tentados en decir que se suman todos los datos que tenemos en el problema anterior y lo dividimos por la cantidad total de pesos que es 41, el interrogante o finalidad de esta actividad es: “si no tuviéramos los 41 datos de los pesos de cada uno de los alumnos como en el problema que se presentó en la actividad 4 de la fotocopia y se presentan agrupados como en la tabla que anterior, ¿Cómo se calcula la media aritmética cuando los datos están agrupados en intervalos?”

En las posibles resoluciones de los alumnos el mayor problema será sin dudas el valor que represente al intervalo para luego multiplicarlo por la frecuencia relativa. Algunos calcularán el promedio de los valores enteros que están contenidos en el intervalo de la siguiente forma:

Suma total de todos los tiempos de los alumnos:

$$5 \times ((58+59+60) \div 3) + 10 \times ((61+62+63) \div 3) + 15 \times ((64+65+66) \div 3) + 5 \times ((67+68+69) \div 3) + 6 \times ((70+71+72) \div 3) = 295 + 620 + 975 + 340 + 426 = 2656$$

$$\text{Peso Medio} = 2656 \div 41 = 64,78$$

Otra forma de obtener la suma total de todos los tiempos de los alumnos es:

$$5 \times ((59+60+61) \div 3) + 10 \times ((62+63+64) \div 3) + 15 \times ((65+66+67) \div 3) + 5 \times ((68+69+70) \div 3) + 6 \times ((71+72+73) \div 3) = 300 + 630 + 990 + 345 + 432 = 2697$$

$$\text{Peso Medio} = 2697 \div 41 = 65,78$$

Una vez calculado la suma total de los tiempos de los alumnos en ambos casos solo queda dividirlos por la cantidad total de alumnos que es 41, para calcular el promedio.

Estos dos casos se dan por el significado que le atribuyen a los arcos de los intervalos, ya que noté en las clases que presencié que no se acordaban bien si el paréntesis o el corchete es el que incluye al número, y como uno de los dos números extremos del intervalo no pertenece al conjunto por eso promedia solamente esos tres enteros.

Otros en vez de promediar los tres números lo harán con los cuatro enteros pertenecientes al intervalo:

$$5 \times ((58+59+60+61) \div 4) + 10 \times ((61+62+63+64) \div 4) + 15 \times ((64+65+66+67) \div 4) + 5 \times ((67+68+69+70) \div 4) + 6 \times ((70+71+72+73) \div 4) = 297,5 + 625 + 982,5 + 342,5 + 429 = 2676,5$$

$$\text{Peso Medio} = 2676,5 \div 41 = 65,28$$

Luego de hacer una puesta en común lo que se debe discutir cual de los tres casos o de los tres resultados es más representativo para el promedio de los datos que caen dentro del intervalo. (En este caso no sé si debe decir si se toma por conveniencia que ese valor es el punto medio del intervalo)

La institucionalización en este problema sería la siguiente: *El valor representativo que se utiliza para representar el promedio de los datos agrupados en un intervalo se denomina Marca de Clase y es igual al punto medio del intervalo, se calcula como el promedio de los extremos del mismo. Para calcular el promedio de un conjunto de datos agrupados lo que se hace es: La media aritmética para datos agrupados es el cociente entre la “Suma de todos los productos entre la marca de clase y la frecuencia absoluta correspondiente a ese intervalo” y la cantidad total de datos.*

Intervalos Peso kg	Frecuencia Absoluta (f_i)	Marca de clase (x_i)	$f_i \times x_i$
(58-61]	5	59,5	297,5
(61-64]	10	62,5	625
(64-67]	15	65,5	982,5
(67-70]	5	68,5	342,5
(70-73]	6	71,5	429
Totales	41		2676,5

Peso medio = $2676,5 \div 41 = 65,28$

ACTIVIDADES DE TAREA:

- *¿En qué se equivocó Leticia? “Durante las vacaciones duermo diez horas diarias, y durante el resto del año, ocho horas. Así que, en promedio, duermo nueve horas diarias.”*
- *Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 58 kg y el de los hombres 72 kg. ¿Cuál es el peso medio de las diez personas de ascensor?*

Situación 4:

En una empresa de electrodomésticos hay un conflicto gremial, no todos los empleados están conformes con sus sueldos. El otro día se reunieron con el dueño para pedirles un aumento:

Los sueldos de los empleados son: \$3500, \$7000, \$3300, \$3300, \$7000, \$7000, \$3200, \$3000, \$3500, \$7700, \$3500, \$3200, \$8000, \$7000, \$3000, \$7000, \$3500.

-¿Usted pretende que nosotros vivamos con menos de \$4000?

La respuesta del dueño fue contundente:

-No sé de qué se quejan si el promedio de los sueldos supera a los \$4000 que ustedes proponen que se le aumenten.

- No aceptamos lo que dice. Nuestros reclamos son justos- contestaron los empleados-

Mariano uno de los empleados afirma que el aumento debe hacerse en relación al sueldo más alto, es decir, deben ajustarse a \$8000.

Julián propone lo siguiente: al tener distintos cargos está bien que los sueldos sean distintos, yo propongo que el valor representativo sea \$3500 ya que si ordenamos todos los sueldos es el que se encuentra en el medio, tal que la mitad de los datos están por arriba y la otra mitad por debajo de este, se puede aumentar este valor hasta que se regule al valor esperado.

Alexis dice que los sueldos se tienen que ajustar todos a \$7000 ya que es el sueldo que aparece con mayor frecuencia.

Los sueldos de los empleados son: \$3500, \$7000, \$3300, \$3300, \$7000, \$7000, \$3200, \$3000, \$3500, \$7700, \$3500, \$3200, \$8000, \$7000, \$3000, \$7000, \$3500.

¿Quién tiene razón para ustedes?

¿Crees que la media aritmética un buen estadístico? ¿Por qué?

Situación 5:

Una fábrica de calzados decide hacer una encuesta a trabajadores de la salud para saber que numero de calzado deberá fabricar mas para hombres y cual para mujeres. Para ello decide encuestar a profesionales de hospitales, clínicas, laboratorios e industrias farmacéutica, para lanzar al mercado un nuevo calzado para que se adapte a las normas de seguridad y salud.

Los siguientes datos muestran los resultados obtenidos en la encuesta:

Mujeres:

35, 40, 37, 40, 36, 36, 37, 37, 37, 41, 41, 37, 37, 41, 37, 36, 40, 37, 35, 37, 39, 37

Hombres:

40, 41, 44, 40, 39, 41, 42, 41, 41, 40, 39, 41, 44, 41, 45, 41, 39, 41, 43, 43, 41, 38

Cuatro empleados discuten cual es el número de calzados que deberán producir más.

Juan propone calcular la media aritmética para saber cuál es el número de calzado mas deben producir tanto para hombre como para mujeres.

Alex propone calcular el promedio entre el valor máximo y mínimo en los dos casos para determinar cuál será el número de calzado que más se deberá producir.

Gaspar propone ver cuál es el número de calzado que aparece con mayor frecuencia en ambos casos.

Marcos propone ordenar los datos y elegir el valor del medio o central.

¿Qué propuesta crees que es más conveniente para la empresa?

Posibles resoluciones de los alumnos e intervención docente:

En la situación 4 se pretende discutir la noción de mediana y en la situación 5 la noción de Moda.

1) Los siguientes datos muestran el peso en kg de 13 alumnas:

61.5, 55.5, 66.4, 55.5, 71.8, 58.0, 62.4, 56.2, 57.8, 56.2, 57.1, 59.7, 55.9

a) Completa la siguiente tabla de frecuencias y luego realizar un histograma:

Clases	Frecuencias Absolutas
[55.5, 57.5)	
[57.5, 60.5)	
[60.5, 63.5)	
[63.5, 66.5)	
[66.5, 69.5)	

c) ¿Qué puedes decir con respecto a la concentración de los datos? ¿Cómo es la mediana con respecto a la media aritmética?

2) Los siguientes datos muestran la altura de 14 jugadores de un equipo de básquet:

2.05, 1.91, 1.82, 1.77, 1.69, 2.04, 2.01, 2.00, 1.85, 1.95, 1.89, 1.96, 1.97, 1.95

a) Completa la siguiente tabla de frecuencias y luego realizar un histograma:

Clases	Frecuencias Absolutas
[1.60, 1.70)	
[1.70, 1.80)	
[1.80, 1.90)	
[1.90, 2.00)	
[2.00, 2.10)	

¿Cómo es la mediana con respecto a la media aritmética?

¿Qué influencia tienen con respecto al gráfico?

3) ¿En cuál de los dos extremos se encuentran más concentrados los datos en el apartado 2)? ¿y en el 3)? ¿Qué relación encuentras entre la concentración de los datos, la media aritmética y la mediana?

4) La siguiente tabla muestra las temperaturas en el mes de abril de 2013 en la ciudad de Santa Rosa:

Dom.	Lun.	Mar.	Mie.	Jue.	Vier.	Sab.
					15.8	17.8
17.3	18.5	19.7	23.1	25.4	21.9	17.7
19.9	20.5	21.4	20.9	21.0	21.3	22.5
19.9	19.7	23.4	23.3	25.5	22.1	25.5
22.2	18.9	19.4	19.2	18.6	18.5	19.6
19.3						

a) Completa la siguiente tabla y luego grafica.

Clases	Frecuencias Absolutas
[15.5, 17.5)	
[17.5, 19.5)	
[19.5, 21.5)	
[21.5, 23.5)	
[23.5, 25.5)	

b) ¿Qué relación encuentras entre la mediana y la media aritmética en relación al gráfico?

Posibles resoluciones de los alumnos e intervención docente:

La mediana es normalmente utilizada resumir los resultados de una distribución. Si la distribución es oblicua o sesgada, la mediana, es el mejor indicador de medida para saber donde los datos observados se encuentran concentrados.

Generalmente, la mediana proporciona una mejor medida de localización que la media cuando hay algunas observaciones extremadamente grandes o pequeñas; es decir, cuando los datos se sesgan a la derecha o a la izquierda. Se observa que si el valor de la mediana es **menor que** el de la media, los datos están sesgados a la derecha. Si el valor de la mediana es **mayor que** el de la media, los datos están sesgados a la izquierda. Cuando la distribución es simétrica el valor de la mediana coincide con el de la media aritmética.



PLANIFICACIÓN DEL SEGUNDO CUATRIMESTRE: RAYOS SIMULTÁNEOS PARA REDUCIR UN VIRUS



Planificación del Segundo Cuatrimestre

Rayos simultáneos para reducir un virus.

Intercambios de Registros (coloquial, gráfico y algebraico) e Implementación de las TIC para la Construcción de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Fundamentación de la propuesta

En el presente trabajo se pretende facilitar el aprendizaje de objetos matemáticos, en este caso, los sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución, a través de distintas situaciones y/o problemas, que implican trabajar en los diferentes registros de representación semiótica y de pasajes entre ellos (gráfico, algebraico, lenguaje natural).

Se pretende plantear actividades a los alumnos para que se involucren activamente en el proceso de construcción del conocimiento, que experimentan las distintas etapas de situación didáctica de Brousseau, es decir, situación de acción, formulación, validación e institucionalización.

A lo largo del trayecto escolar aparecen numerosas complejidades, que surgen como interrogantes fuertes para discutir entre los profesores. Una de las dificultades que presentan los alumnos es, en la utilización de operaciones aritméticas más elementales en problemas verbales que involucran ecuaciones o sistemas de ecuaciones aún cuando saben aplicar perfectamente los algoritmos de resolución, tales errores vuelven a surgir en la introducción literal para valores numéricos y en la introducción del Álgebra, sobre todo en igualdades (Guzman, 2000). Esta dificultad la pude rastrear en mi curso.

Además, de acuerdo a otras investigaciones, resuelven un sistema de ecuaciones lineales y no verifican la solución, es decir, hay una desarticulación entre el objeto de sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución (Panizza et al, 1995), no realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico de un problema que involucre un sistema de ecuaciones lineales (Perez Donoso, 1998), y recurren pocas veces al pasaje del registro gráfico al algebraico para resolver un sistema de ecuaciones lineales (Perez Donoso, 1998). En general, no se efectúa la representación y resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales, dándole un estatus inframatemático a este registro de representación (Ramirez, 1997).

Las dificultades en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones tienen orígenes diversos. Unos están ligados a la complejidad matemática de los elementos básicos que se utilizan en la adquisición del objeto sistemas de ecuaciones lineales (números reales y función a fin, ambos en vías de construcción); otros al concepto de sistemas de ecuaciones lineales y su solución, y otros más a la ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico.

Algunos libros de textos y algunos profesores apuntan al desarrollo algorítmico. No trabajan los pasajes del registro algebraico al verbal ni del gráfico al algebraico, a pesar de que el paso entre registros de representación semiótica resulta necesario para acceder a un objeto matemático. Esto no se trata de una opción pedagógica, sino de un aprendizaje obligado (Guzman, 1990).

No basta con presentar una serie de problemas para que los estudiantes manejen con responsabilidad un sistema de ecuaciones lineales, es imprescindible trabajar con diferentes registros semióticos que admiten un tratamiento en cada uno de ellos. Si se logra un pasaje fluido entre registros y un tratamiento natural en ellos se le permitirá al alumno que examine sus ideas y controle sus resultados. Esta es una de las bases para la construcción de

la situación que involucra al objeto ya que, 'el cambio de registro constituye una variable que se revela fundamentalmente en didáctica; facilita considerablemente el aprendizaje, pues ofrece procedimientos de interpretación'.

Tomando como referencia estas bases teóricas explicitadas anteriormente que fueron producto de varias investigaciones, más la utilización como estrategia pedagógica un juego didáctico que involucre fichas con los diferentes registros (gráfico, algebraico, lenguaje natural) con la finalidad de que puedan relacionar y clasificarlos para una validación eficaz, involucrando al alumno a 'hacer matemáticas' y a construir el conocimiento, apropiándose del objeto 'sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución'.

Tema

- Sistemas de Ecuaciones Lineales:
 - ✓ Método Gráfico (relacionándolo con los distintos registros).
 - ✓ Método de Igualación a partir de la gráfica.
 - ✓ Conjunto Solución
 - ✓ Resolución de situaciones problemáticas.

Objetivos

- Objetivos generales:
 - ✓ Reconocer y analizar gráficamente los sistemas de ecuaciones lineales.
 - ✓ Reconocer a través de la gráfica el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Objetivos específicos:
 - ✓ Resolver los sistemas a partir de la gráfica con método de igualación.
 - ✓ Distinguir gráficamente la compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales.
 - ✓ Clasificar un sistema según sus soluciones;
 - ✓ Graficar sistemas de ecuaciones lineales e interpretar sus soluciones utilizando como herramienta el software Geogebra.

Conocimientos previos necesarios para abordar el tema.

- ✓ Números reales y sus operaciones.
- ✓ Ecuación de la recta (pendiente, ordenada) gráfica y analíticamente.
- ✓ Ecuación de la recta que pasa por dos puntos
- ✓ Gráfica de puntos y rectas en el sistemas de ejes cartesianos ortogonales (Plano)

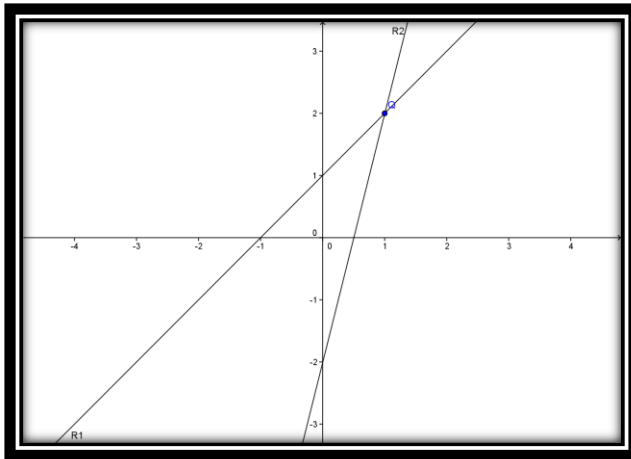
Secuencia de la planificación

ACTIVIDAD 1:

Objetivos: El objetivo es que el estudiante explícitamente escriba un sistema de ecuaciones lineales, observando su simultaneidad, de ahí que deba proponer más de un rayo para eliminar a un virus ubicado en un cierto punto en el plano.

Situación Problemática: Por mutación, un virus está siendo cada vez más fuerte y no alcanza con un solo rayo para vencerlo. Hay que enviarle dos rayos en forma simultánea para que pueda ser reducido.

- a. Un virus aparece en el punto $Q = (1,2)$ y los rayos que emiten las fuentes son:



¿Qué relación tienen los rayos con el punto $Q = (1, 2)$? ¿Cuáles son las ecuaciones de cada uno de los rayos? Explicar matemáticamente un método que te ayude a verificar la gráfica.

- Dibujar dos rayos distintos a los del apartado anterior que alcancen el virus que se encuentra en el punto $(1, 2)$. Verificar matemáticamente.
- Con los datos del apartado anterior si en lugar del rayo R_2 (gráfica) tenemos otro rayo distinto desde la fuente ubicada en el punto $(0, -1)$, ¿cuál sería la ecuación del rayo para eliminar el virus que se encuentra en el punto $Q = (1, 2)$? Dibújalo.
- Realiza lo mismo que el punto c. pero la ubicación de la fuente ahora será $(-2, 2)$.
- El virus aparece ahora en el punto $(2, 3)$. Una de las fuentes emite un rayo $y = 2x - 1$, que impacta en el virus; diseña la ecuación de otro rayo que elimine al virus en forma simultánea con el rayo ya citado.
- Supongamos que ahora el virus aparece en el punto $(2, 1)$. Elige tres ecuaciones de los siguiente rayos que sirvan para matar al virus:
 - $x - y = 1$
 - $y = 2x - 4$
 - $y = \frac{1}{2}x$
 - $3x - 2y = 4$
 - $y = 2x - 1$
 - $x - 2y = 3$
 - $y - x = -1$

Explica gráfica y matemáticamente tu elección.

- Ahora se emiten dos rayos hacia un virus en el cual se desconoce su ubicación, las ecuaciones de los rayos son $R_1: x + y = 12$ y $R_2: x - y = 2$. Dibuja los rayos y encuentra la ubicación del virus. Verificarlo matemáticamente.

ACTIVIDAD 2:

Para trabajar con geogebra:

Objetivos: Encontrar la relación que existe entre las rectas y tipos de solución del sistema de ecuaciones.

- Utilicen el programa Geogebra, instalado en sus equipos portátiles, para graficar cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

- $$\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ -6x - 4y = -7 \end{cases}$$

b. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -6x - 4y = -7 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x - 3y = -4 \\ 3x - 9y = -12 \end{cases}$

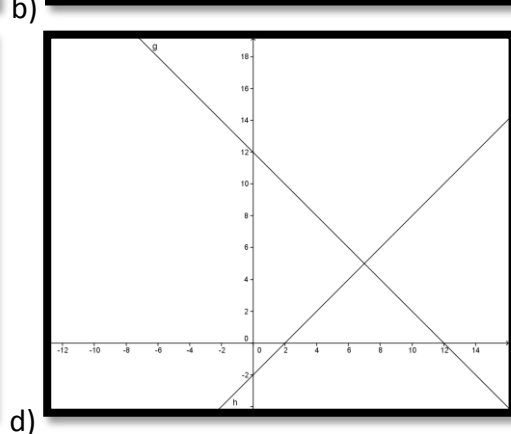
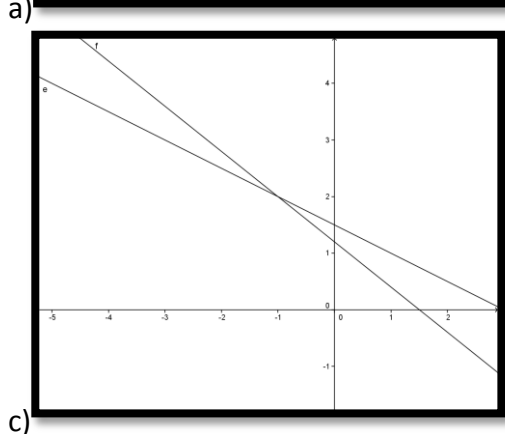
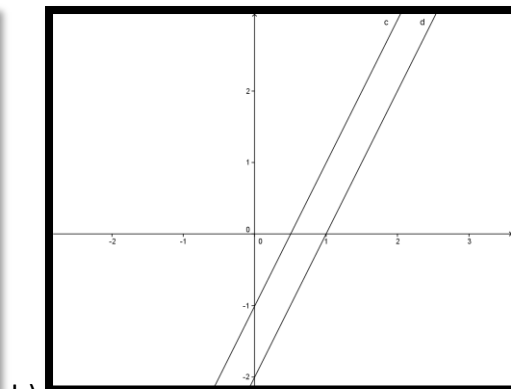
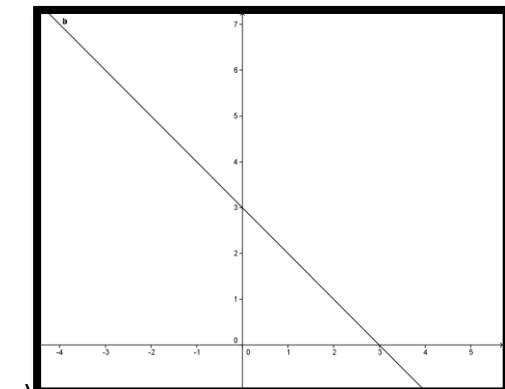
2. Para cada sistema de ecuaciones graficado, analicen cómo son las rectas entre sí.
3. Resuelvan los sistemas de ecuaciones a través de la gráfica. Compruébalo utilizando alguno de los métodos vistos (igualación, sustitución, reducción).
4. Indiquen en qué casos pudieron encontrar una única solución, infinitas soluciones o ninguna solución.
5. ¿Cómo relacionarían cada solución hallada en el ítem 4 con los gráficos obtenidos en el ítem 2? Clasifiquen las soluciones de cada sistema según las rectas obtenidas.

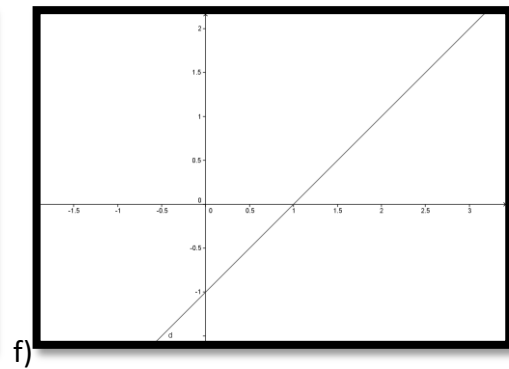
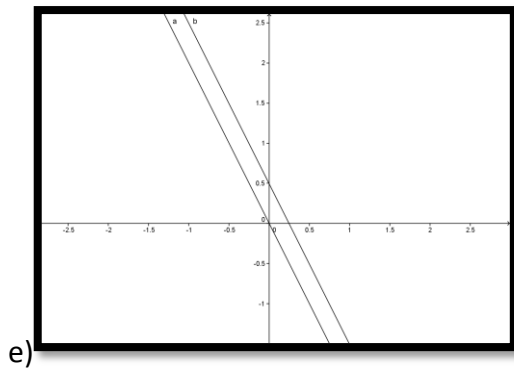
Institucionalización: Una vez hecho las puestas en común de los resultados se concluye:

Tipos de Rectas	Tipo de solución
Se intersecan en un punto	Única Solución
Son paralelas	Ninguna Solución
Son coincidentes	Infinitas Soluciones

Actividades para seguir trabajando con Geogebra:

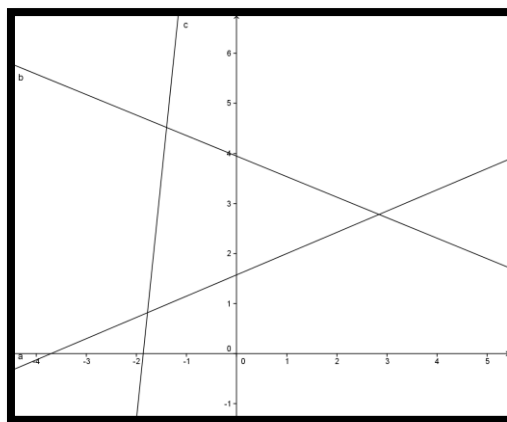
1. Indica que tipo de solución tienen los sistemas:



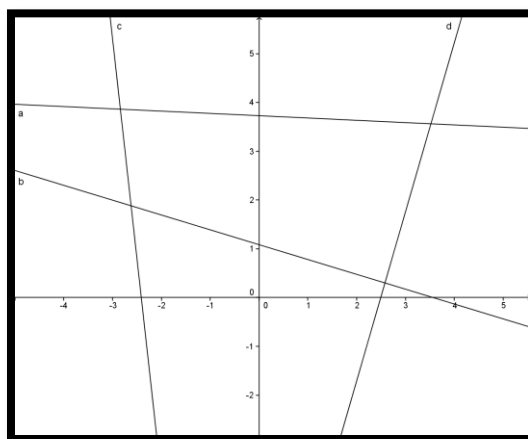


Para seguir trabajando:

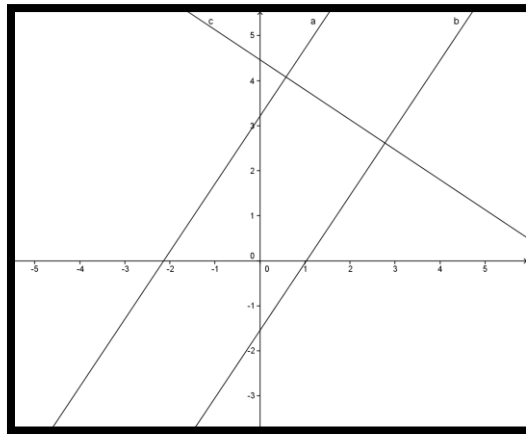
2. A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



3. A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de 4 ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



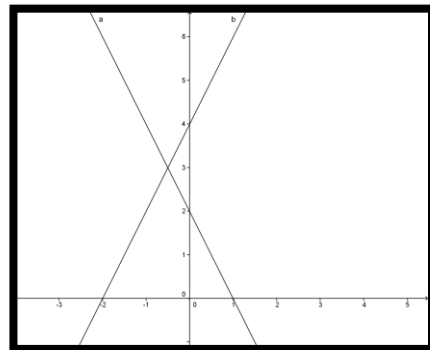
4. A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de 3 ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



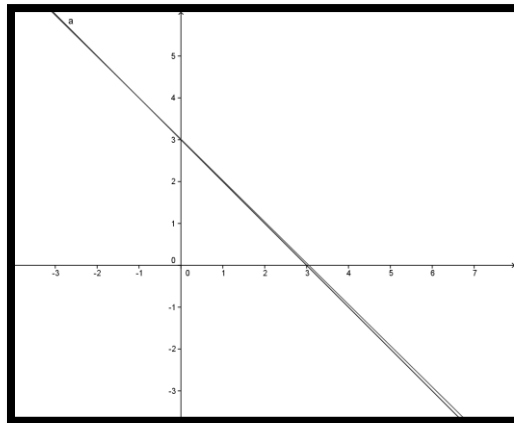
5. Resuelve el sistema el siguiente sistema de ecuaciones por el procedimiento que desees. ¿Tiene solución el sistema? En el caso que tu respuesta sea negativa explica porque y en el caso que sea afirmativa indica cuántas y cuáles son.
6. Un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:
 - a. ¿Puede tener única solución?
 - b. ¿Puede tener exactamente dos soluciones?
 - c. ¿Y exactamente tres soluciones?
 - d. ¿Puede tener infinitas soluciones?
 - e. ¿Y ninguna?

Explica cada una de tus respuestas e ilustra gráficamente con el Geogebra.

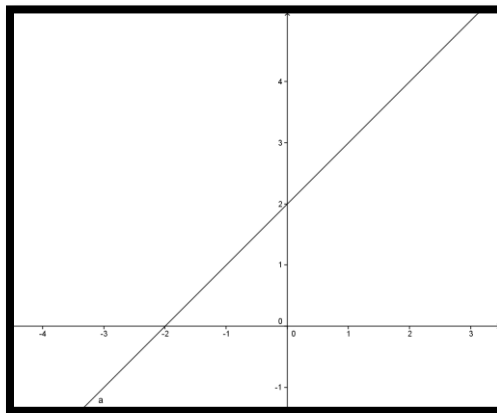
7. ¿Puedes representar una recta más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a todas las rectas no tenga solución? Explica tu respuesta. Utiliza el software Geogebra si es necesario para justificar.



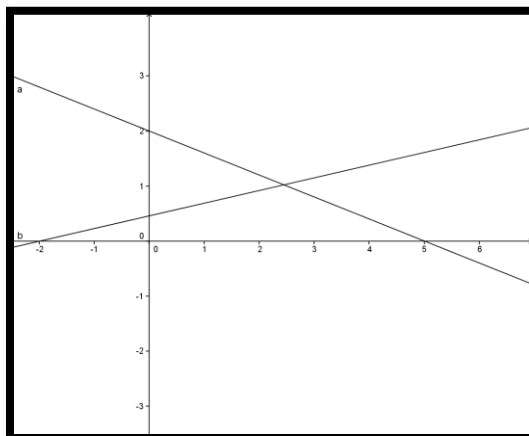
8. ¿Puedes representar tres rectas más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a todas las rectas tenga solución única? Explica tu respuesta. Utiliza el software Geogebra si es necesario para justificar tu respuesta.



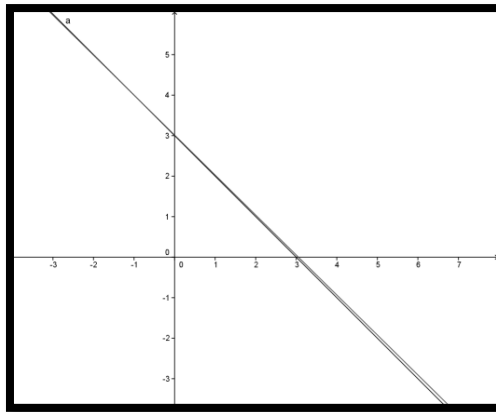
9. ¿Puedes representar una recta más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a las dos rectas tenga solamente dos soluciones? Explica tu respuesta. Utiliza el software Geogebra si es necesario para justificar tu respuesta.



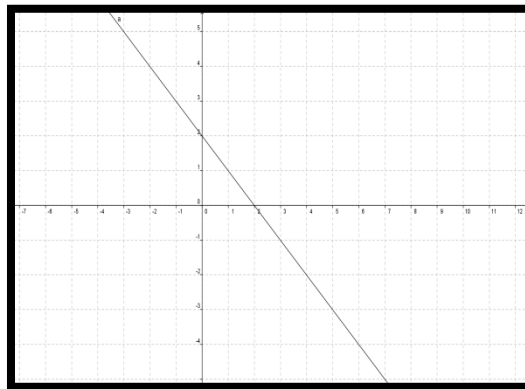
10. ¿Puedes representar una recta más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a todas las rectas tenga infinitas soluciones? Explica tu respuesta. Utiliza el software Geogebra si es necesario para justificar tu respuesta.



11. ¿Puedes representar dos rectas mas de manera que el sistema de ecuaciones asociado a todas las rectas tenga no tenga solución? Explica tu respuesta. Utiliza el software Geogebra si es necesario para justificar tu respuesta.



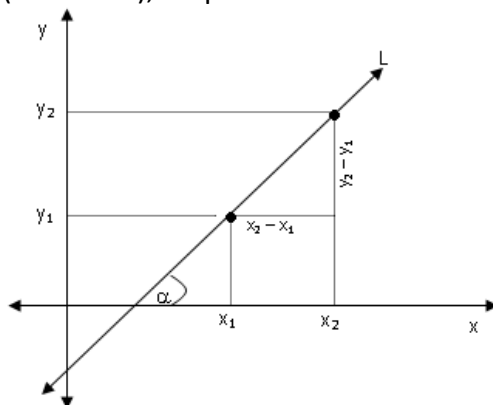
12. Presenta un sistema de ecuaciones de primer grado que tenga como solución única el punto (2,1). Explica como lo haces.
13. ¿Puede un sistema tener como solución el par (2,1) y además otras soluciones? Si tu respuesta es negativa explica por qué no es posible y si es afirmativa presenta un ejemplo explicando cómo lo consigues. Utiliza el software Geogebra.
14. ¿Puedes representar una recta más para que el sistema asociado a ellas tenga como solución el punto (3,4)?



Posibles resoluciones de los alumnos e intervenciones docentes:

- a) En este problema la intencionalidad es enseñarles a los alumnos a resolver el sistema de ecuaciones a través del método de igualación.

Recordar: Para ello lo primero que voy hacer es con la ayuda de los alumnos encontrar las ecuaciones de las rectas, la intersección con el eje y como (ordenada), las pendientes de las rectas como:



La pendiente es (en los términos más sencillos) la medición de una línea, y se define como la relación de la “subida” dividido por la “corrida” entre dos puntos en una recta, o en otras palabras, la razón de la altitud cambio a la distancia horizontal entre dos puntos cualesquiera de la línea.

Dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en una línea, la pendiente m de la línea es:

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Ecuación: Una ECUACIÓN es una Igualdad entre dos expresiones matemáticas denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o Datos y desconocidos o Incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. Los valores conocidos se los denominan como números, constantes o coeficientes; y las incógnitas se denominan variables en nuestro caso x e y . Las incógnitas son representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretende hallar. Por ejemplo, en la ecuación:

$$4y - x = 8$$

$4y - x$ Conforman el primer miembro; 8 conforma el segundo miembro. Las variables x e y representan las incógnitas, mientras que el coeficiente -1 y 4 son los números que acompañan a las variables x e y respectivamente. La igualdad planteada por una ecuación será cierta o falsa dependiendo de los valores numéricos que tomen las incógnitas; se puede afirmar entonces que una ecuación es una igualdad condicional, en la que sólo ciertos valores de las variables (incógnitas) la hacen cierta. Los valores numéricos de esas incógnitas para los cuales se verifica la igualdad son la solución de la ecuación. Por ejemplo $(x, y) = (2, 0), (0, -8), (3, 4), \dots$ son solución a la ecuación $4y - x = 8$ que como sabemos es una recta.

Resolución del sistema:

Un SISTEMA DE ECUACIONES es un conjunto de dos, tres o más ecuaciones en donde las variables $x, y, z, \dots$ son las incógnitas, en nuestro caso vamos a trabajar con dos incógnitas solamente con x e y , los valores numéricos que verifiquen todas las igualdades de las ecuaciones se denomina Conjunto solución del sistema.

Resolución a través de la gráfica por el método de igualación:

Si analizamos el ejercicio gráficamente, la solución al sistema de ecuaciones es la intersección de las dos rectas, que en este caso es el punto $(1, 2)$. Ahora bien, ¿cómo explicamos matemáticamente el sistema de ecuaciones que determina la gráfica? La solución al sistema vendría a ser el punto (x, y) que pertenece a ambas rectas, para hallarlo lo primero que tenemos que hacer es identificar las ecuaciones de las rectas: la ecuación del rayo 1 corta al eje y en 4, que vendría a ser la ordenada de la recta; si miramos el recorrido que hace la variable tenemos que corre 1 y baja dos unidades, por la definición de pendiente tenemos que $m = -2$. Luego la Ecuación del Rayo 1: $y = -2x + 4$ de la misma manera obtenemos la Ecuación del Rayo 2: $y = 5x - 3$. Ahora nos queda analizar el punto $(1, 2)$, este punto es punto que tienen en común las dos rectas en nuestro caso los rayos 1 y 2, que quiere decir, ¿tienen en común? Que el punto pertenece a ambas rectas es decir, si reemplazamos el punto en las ecuaciones de los rayos verifican la igualdad, esto es:

Ecuación del Rayo 1: $y = -2x + 4 \leftrightarrow 2 = -2 \times 1 + 4 \leftrightarrow 2 = 2$

Ecuación del Rayo 2: $y = 5x - 3 \leftrightarrow 2 = 5 \times 1 - 3 \leftrightarrow 2 = 2$

Lo que hicimos anteriormente es:

- Como sabemos que el punto pertenece a ambas rectas el valor de y de del primer rayo tiene que ser igual al valor de la variable y del rayo 2.

- Como los primeros términos son iguales entonces los segundos términos serán igual, es decir, si $y = y$ entonces $5x - 3 = -2x + 4$
- Resolviendo la ecuación tenemos que $x = 1$
- Una vez que obtenemos el valor de x , lo reemplazamos en ambas incógnitas y así obtenemos el valor de y , luego tenemos Rayo1: $y = -2 \times 1 + 4 = 2$; Rayo2: $y = 5 \times 1 - 3 = 2$
- Luego verificamos que la solución del sistema es el punto Q= (1,2)

Los pasos nombrados anteriormente constituyen lo que se denomina el METODO DE IGUALACIÓN.

Metodo de igualación a partir de la gráfica:

El método de igualación a partir de la gráfica consiste Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

- Se encuentran la ecuaciones que conforman el sistema.
- Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.
- Se resuelve la ecuación.
- El valor obtenido se sustituye en alguna de las dos ecuaciones y obtenemos la incógnita despejada.
- Los valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Una vez encontradas dichas expresiones no preguntaremos, ¿y ahora qué hacemos?

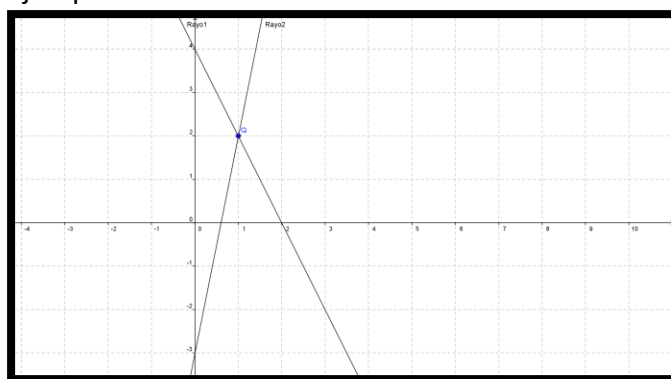
Como sabemos que el punto que pertenece a ambas rectas es (1,2)

b) Analizando con los rayos del apartado anterior tenemos :

Una de las posibles resoluciones es que marquen el punto y dos rectas que pasen por el mismo, luego que traten de dar las ecuaciones de las rectas. Pueden aparecer como error que al poner al azar cualquier recta, no logren identificar la ordenada al origen y la pendiente, por lo que tendrán que rectificar y plantear gráficamente otras rectas. También pueden proponer escribir algebraicamente las ecuaciones verificando que pasen por el punto y luego las comprueben gráficamente.

En cuanto a la verificación matemática que se les pueden directamente reemplazar los puntos en las ecuaciones y verificar si se cumple la igualdad o bien resolver el sistema de ecuaciones y comprobar que la solución es el punto (2,3).

Ejemplo1:



Ecuación del Rayo 1: $y = -2x + 4$

Ecuación del Rayo2: $y = 5x - 3$

Ejemplo2:

Algunos alumnos pueden realizar un trabajo puramente algebraico, por ejemplo, eligiendo una ordenada al origen, por ejemplo 6, y reemplazas x e y del punto, te da la pendiente y ya tienes la recta, es decir:

En $y = ax + b$ reemplazamos por $Q=(1,2)$ y por la ordenada $b = 6$ luego tenemos:

$$2 = a1 + 6$$

$$a = 2 - 6$$

$$a = -4$$

Luego la recta que pasa por la ordenada 6 y el punto $Q= (1,2)$ es $y = -4x + 6$ que es la ecuación de uno de los rayos.

Con el mismo procedimiento pueden hallar la ecuación de otra recta eligiendo una ordenada arbitraria. Y luego basta con resolver el sistema con cualquiera de los dos métodos enseñados (igualación, sustitución) para verificar si la solución es el punto $Q= (1,2)$.

IMPORTANTE A TENER EN CUENTA (Variable Didáctica): tomar como referencia las resoluciones de los alumnos o bien crear una situación en donde se reflejen y expliciten distintos casos y ejemplos de rectas en nuestro caso “rayos” que pasen por el punto dado (ubicación del virus) y otras rectas que no pasen por el punto, para que el alumno pueda identificar cuáles de las rectas inciden y cuáles no en el punto, pretendiendo que argumenten gráfica o algebraicamente sus elecciones o respuestas.

Ejemplos de rayos que inciden en el virus:

$$y = -2x + 4$$

$$y = -5x + 7$$

$$y = 3x - 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Ejemplos de rayos que no inciden en el virus:

$$y = -2x + 3$$

$$y = x + 2$$

$$y = 5x - 2$$

$$y = -3x + 4$$

En ambos casos lo que se pretende es que los alumnos grafiquen las rectas y verifiquen si pasan o no por el punto. O que lo muestren algebraicamente es decir reemplazando con el punto para verificar si se cumple o no la igualdad en la ecuación determinando así la incidencia o no en el punto.

Otra Variable Didáctica: Trabajar con pares de ecuaciones que son equivalentes en el caso que aparezcan en las resoluciones, por ejemplo:

$$y = -2x + 4 \text{ e } y = -\frac{6}{3}x + 4$$

$$y = -5x + 7 \text{ e } y = -\frac{1}{0,2}x + 7$$

$$y = -\frac{1}{0,5}x + 4 \text{ e } y = -2x + 4$$

Pedir que las grafiquen para verificar que son coincidentes. Y también que lo muestren algebraicamente.

- c) alguna de las respuestas que pueden surgir por partes de los alumnos es que la relación que tienen es que los rayos coinciden en el punto $(1,2)$, o bien que el

punto pertenece a las dos rectas que representan los rayos, o que los rayos vendrían ser las ecuaciones del sistema y el punto o virus la solución a dicho sistema. Los rayos se representan en un gráfico, con rectas, y matemáticamente con ecuaciones.

Una de las estrategias es ir haciendo preguntas como por ejemplo: ¿Qué es lo que pide el problema? ¿Con qué se matan los virus? ¿Cómo se representan esos rayos? ¿Qué vendría a ser matemáticamente el virus? ¿Qué relación tiene este con respecto a los rayos?

Es importante remarcar que se puede representar a los rayos algebraicamente (o matemáticamente para los alumnos) y gráficamente.

Para encontrar las ecuaciones de los rayos algunos pueden encontrarla sin dificultad analizando la gráfica, identificando la ordenada al origen y la pendiente (“los alumnos están acostumbrados a graficar de la siguiente forma, por ejemplo: $y = \frac{2}{3}x + 5$ se sitúan en 5 en el eje y (ordenadas), luego desde ese punto corren 3 hacia la derecha y suben 2, por ser la pendiente positiva caso contrario bajan tantos lugares como determine el numerador”). La dificultad aparecerá en el momento de encontrar la pendiente.

La ecuación de la recta R1 (rayo1) es $y = x + 1$ y la de R2 (rayo2) es $y = 4x - 2$. Por ejemplo al plantear las ecuaciones no tendrán problema para identificar las ordenadas 1 y -2 ya que en el gráfico se ven fácilmente donde las rectas cortan al eje y , al no identificar bien las pendientes pueden aparecer muchos casos erróneos como por ejemplo $y = 2x + 1$ o $y = 2x - 2$.

En el caso anterior como intervención docente hay que insistir en la resolución del sistema de ecuaciones, por cualquiera de los métodos aprendidos (sustitución o igualación) y verificar si la solución es el punto $Q = (1, 2)$.

Verificación algebraica:

Ecuación del Rayo 1: $y = x + 1$

Ecuación del Rayo2: $y = 4x - 2$

Por Igualación tenemos: $x = 1, y = 2$

- d) En este punto invitaría a pasar a un alumno para que con la ayuda de los demás realice gráficamente la situación y la recta del nuevo rayo que pasa por el punto $(0, -1)$ y el punto $Q = (1, 2)$. Una vez graficado les pediré que terminen de resolverlo, es decir, que encuentren la ecuación que pasa por esos dos puntos, la idea es que traten de encontrarla a través de la gráfica y no por medio de la expresión que permite encontrar la ecuación que pasa por dos puntos, que había presentado el profesor en el tema anterior “ecuación lineal”. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

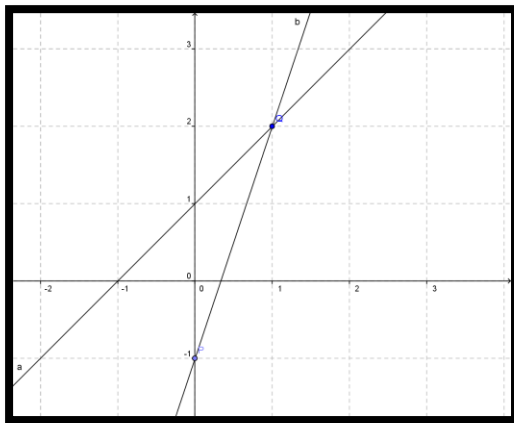
Luego la ecuación de la recta que pasa por $(0, -1)$ y por $(1, 2)$:

$$y - (-1) = \frac{2 - (-1)}{1 - 0} (x - 0)$$

$$y + 1 = 3x$$

Ecuación del Rayo2: $y = 3x - 1$

No es lo que se pide lo hecho anteriormente pero si llega aparecer vale explicitarlo para recordarlo para utilizarlo como un método de verificación.



Al igual que los puntos anteriores vale es conveniente a invitar a los alumnos a que pasen de la grafica a la verificación algebraica y viceversa para hacer más eficaz la verificación de la solución al sistema.

Verificación algebraica:

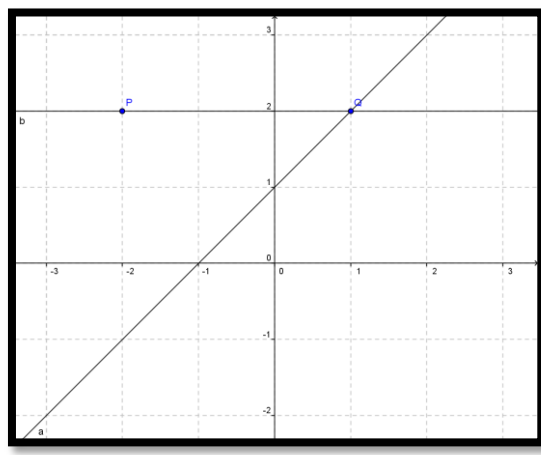
Ecuación del Rayo 1: $y = x + 1$

Ecuación del Rayo2: $y = 3x - 1$

Por sustitución tenemos: $x = 1, y = 2$

Pueden surgir la resolución de un alumno que lo hago del según

- e) Lo primero que haría en este caso es dejar un tiempo para que los alumnos puedan lograr graficar el rayo o recta que pasa por el punto (2,2) y el punto (1,2), y luego hacer una puesta en común para graficarlo en el pizarrón. El paso siguiente es encontrar la ecuación de la recta que pasa por esos puntos. En este paso, quizás, a los alumnos se le dificulte el hecho de que aparece la pendiente igual a cero, al estar acostumbrados a expresar la ecuación completa con todos sus coeficientes.



Ecuación del Rayo 1: $y = x + 1$

Ecuación del Rayo2: $y = 2$

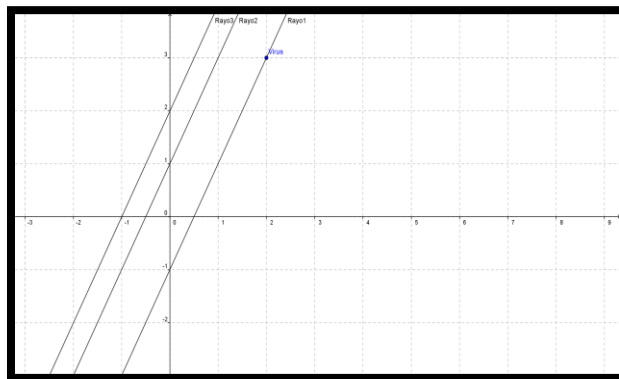
Luego por igualación tenemos que $x = 1$ e $y = 2$.

- f) Muchos de los alumnos lo primero que harán es el trazo del rayo en la gráfica, lo cual les impida hallar una solución al problema ya que se pueden encontrar muchas rectas paralelas pero ninguna que pase por el ponto (2,3). Algunos trazaran una recta paralela a $y = 2x - 1$, y dirán que ese es el rayo sin verificar

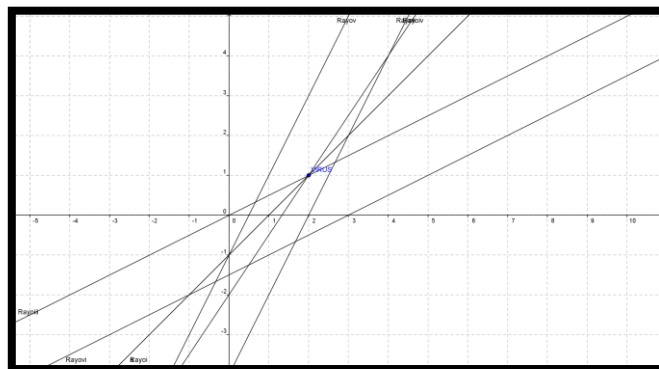
si pasa o no por el punto, la idea es detectar estos casos erróneos e insistir en la verificación, es decir, si alcanza al virus, o que traten de resolver el sistema de ecuaciones.

Es importante introducir este problema, ya que hay casos en el cual no hay solución si se tiene una determinada condición.

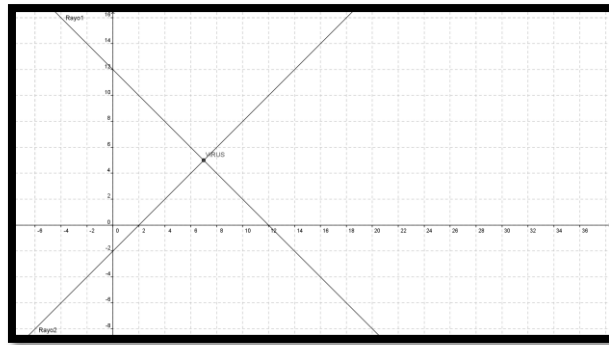
Otra forma es resolverlo en forma algebraica, es decir, algunos alumnos pueden tener una idea de cómo tienen que ser las pendiente de la rectas para que sean paralelas y al igual que aquellos que los hicieron gráficamente pueden tener el error de no tener en cuenta la verificación, es importante hacer explícitos estos casos y trabajar sobre el error por medio de los dos registros gráfico y algebraico. Otros pueden resolverlo a través de rectas equivalentes o coincidentes, si aparecen hay que hacerlas explícitas y explicar que son rectas coincidentes y que no es lo mismo que sean paralelas, lo cual no es el objetivo de esta actividad, estas se van a trabajar más adelante.



- g) Esta actividad tiene como objetivo reforzar lo que se trabajó en la actividad b., es bueno hacer explícitos varias producciones de los alumnos para verificarlo entre todos en el pizarrón ya sean erróneos o correctos, para institucionalizar cuando un punto pertenece o no a la recta, además que hay infinitas rectas que pasan por un punto, y esto se puede ver gráficamente o algebraicamente



- h) El objetivo de esta actividad es que los alumnos encuentren la solución del sistema de ecuaciones a través de la gráfica y luego lo verifiquen algebraicamente aplicando algún método de resolución (igualación o sustitución). Algunos de los alumnos empezaron a resolverlo al revés, es decir, primero resolverán el sistema, encontrarán el punto, y luego graficarán. La idea no es que traten de empezar por uno y no por el otro, sino que se apunta que ellos elijan y adopten una estrategia que les sea más conveniente a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales.



Consideraciones finales sobre la planificación

- ¿Qué tiene de particular mi propuesta con respecto a las otras del mismo tema?
Lo que tiene de particular esta propuesta es que no se focaliza tanto en lo algebraico ya que es en donde más dificultad presentan los alumnos, como tienen en común la mayoría de las otras propuestas, sino mas bien en lo gráfico y el cambio de registro (algebraico, grafico, aritmética).
- Elaborar dos expectativas a evaluar al finalizar la puesta en el aula de la propuesta
 - Con mi propuesta voy a lograr que los alumnos se involucren más activamente en el proceso de construcción del conocimiento, en mi caso sistemas de ecuaciones lineales.
 - En el transcurso de la propuesta voy a lograr que los alumnos comprendan cada uno de los elementos de los sistemas de ecuaciones lineales, que tengan una como herramienta el gráfico para verificar y validar sus resultados.

Resultados con respecto a mis hipótesis y expectativas:

Los resultados no fueron del todo positivos, si bien se logro que los alumnos se apropiaran del objeto de estudio en este caso “sistemas de ecuaciones lineales”, no se hizo como se pretendía, es decir, al no poder trabajar con la netbook por problemas técnicos, la clase se torno media pesada ya que solo requería resolver una serie de ejercicios, que si bien estaban bien planificados, falto ponerlos más en discusión y problematizarlos más, otro inconveniente que tuve fue que los alumnos estaban muy desinstrumentalizados, había ciertos conceptos del tema anterior “Ecuación Lineal” no estaban del todo claro y provoco el desentendimiento de algunas consignas, incluso el esfuerzo más grande estuvo en explicar esos temas previos que el que se pretendía abordar actualmente.

Criterios de mi planificación

En cuanto al texto de ‘BUENAS PRÁCTICAS’, rescato la parte en la que la autora Nuria Planas habla en cuanto a la interpretación de la gráfica, “un estudiante interpreta mal una gráfica o no llega a interpretarla porque no se ubica en el contexto de la actividad, puede ser que no haya entendido bien el concepto de variable y/o que significa matemáticamente la expresión de la pendiente en un punto de la gráfica. Pero además puede ocurrir que el estudiante no comprenda bien el lenguaje usado en el enunciado, que no se sienta motivado y/o que no se hayan formulado las preguntas oportunas que le lleven a la interpretación de la gráfica esperada por el profesor, entre otras muchas cosas. Hay que ofrecer actividades adecuadas de enseñanza, crear un ambiente que favorezca la participación, para fortalecer el contexto en el cual se pretende que trabajen los alumnos”. Este perspectiva más lo que planteo como dificultades en la fundamentación que fueron

tomados de una investigación didáctica sobre el tema de sistema de ecuaciones, que hacia énfasis en trabajar en los diferentes registro de representación semiótica y de pasajes entre ellos (gráfico, algebraico, lenguaje natural), en el cual el registro gráfico esta casi ausente en la mayoría de las propuesta, es lo que se pretendió trabajar y revertir. En cuanto a los criterios que anuncia la autora esta planificación se identifica con la reflexividad, con la conversación como recurso y el guión de preguntas como método. Desde la perspectiva del estudiante, las experiencias de aprendizaje reflexivas responden a necesidades de comunicación, promoviendo primero la presentación de opiniones y después de elaboración de descripciones, explicaciones, definiciones, argumentaciones, justificaciones, explicaciones, pruebas... para la expresión del pensamiento matemático y la fundamentación de opiniones. El objetivo de la propuesta darle un tiempo para que resuelvan las consignas luego los alumnos pasaban al pizarrón para explicitar sus resoluciones y se debatía en forma grupal sobre las distintas formas de resolver un problema, se explicitaban las características en común luego del análisis del debate y luego se institucionalizaba el concepto que se pretendía abordar en dicha actividad, siempre utilizando la conversación como recurso y el guión de preguntas como método.

Bibliografía

- ✓ <http://funes.uniandes.edu.co/1893/> (Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones de 2×2)
- ✓ Dianlet-Sistemas de Ecuaciones Lineales-Volumen 7
- ✓ Informe Final Ochoviet- Sobre la entrada al algebra lineal en el nivel medio- El caso de los sistemas lineales con dos incognitas- Cristina Ochoviet

Estadística Descriptiva



Promedios del Fútbol Argentino

#	Equipo	10/11	11/12	12/13	PTS	PJ	PROM
1	Velez	62	64	55	201	110	1.827
2	River Plate	0	0	58	58	34	1.705
3	Lanus	63	55	62	180	110	1.636
4	Arsenal	57	62	57	176	110	1.600
5	Boca Juniors	53	76	46	175	110	1.590
6	Belgrano	0	55	56	111	72	1.541
7	Estudiantes	69	50	43	162	110	1.472
8	Newells	42	48	68	158	110	1.436
9	Racing Club	52	50	53	155	110	1.409
10	Colon	47	60	44	151	110	1.372
11	Godoy Cruz	63	38	44	145	110	1.318
12	San Lorenzo	47	44	52	143	110	1.300
13	Tigre	50	63	30	143	110	1.300
14	All Boys	51	54	37	142	110	1.290
15	All Rafsela	0	50	41	91	72	1.263
16	Argentinos	54	49	27	130	110	1.181
17	Quilmes	0	0	40	40	34	1.176
18	Independiente	43	47	37	127	110	1.154
19	San Martin (SJ)	0	48	34	82	72	1.138
20	Union	0	50	20	70	72	0.972

- A partir de la tabla de promedios se intentaba analizar la media aritmética, en relación a las distintas temporadas.
- Se presentaban distintas expresiones de calcular el promedio.
- Se pretendía un análisis de las distintas expresiones para debatirlas y validarlas grupalmente luego.
- Posteriormente se presentaban situaciones en el cual el objetivo era ver cuál era la medida de tendencia central mas representativa.

EN LA PRÁCTICA

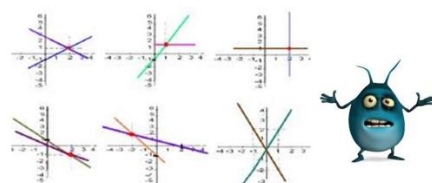


Discontinuidad en las Clases



- La autora Nuria Planas propone unos criterios de buenas prácticas como el de la reflexividad, con la conversación como recurso y el guión de preguntas como método. Desde la perspectiva del estudiante, las experiencias de aprendizaje reflexivas responden a necesidades de comunicación, promoviendo primero la presentación de opiniones y después de elaboración de descripciones, explicaciones, definiciones, argumentaciones, justificaciones, explicaciones, pruebas, para la expresión del pensamiento matemático y la fundamentación de opiniones. Este criterio orientó mi planificación.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



EN LA PRÁCTICA

