CB39

VISUALIZACIÓN INTERACTIVA MEDIANTE LA UTILIZACIÓN DE UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA COMPUTACIONAL DISEÑADA EN GEOGEBRA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UNA IMAGEN CONCEPTUAL DEL TEOREMA DE LOS EJES PRINCIPALES EN ALGEBRA LINEAL

Oscar Enrique Ares

Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias. FICA, Universidad Nacional de San Luis.
25 de Mayo 384. Mercedes (San Luis)
oscareares@gmail.com

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación: Propuesta didática, utilizando TICs. Educación Superior.

Palabras Claves: diagonalización ortogonal, transformaciones lineales, ejes principales, visualización interactiva.

RESUMEN

En este trabajo se presenta el *diseño* de una propuesta didáctica utilizando nuevas tecnologías para la enseñanza del tema de algebra lineal: *Teorema de los ejes principales en* $\boldsymbol{R}^2$.. Una fase del diseño es la construcción de una *herramienta didáctica computacional* que se materializa en el entorno de visualización del software Geogebra. La *esencia de esta propuesta didáctica* es la utilización de la herramienta computacional específicamente destinada a visualizar los conceptos involucrados en el teorema de los ejes principales, conjuntamente con una guía de actividades que ordenan y articulan la secuencia didáctica. Una de las metas de comprensión de la secuencia didáctica es, dada la expresión $a\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{bxy} + \mathrm{cy}^2 + \mathrm{dx} + \mathrm{ey} + \mathrm{f} = 0$ y utilizando una herramienta didáctica computacional diseñada en geogebra realice una tarea de exploración, experimental y computacional para hallar una nueva base, mediante *rotación de la base canónica* que transforme la matriz asociada a la forma cuadrática en diagonal.

INTRODUCCIÓN

La evolución que ha experimentado el software matemático, especialmente en la última década ofrece nuevas formas de *enseñar, aprender y hacer matemática.*

En el campo de la ingeniería didáctica, la utilización de software educativos, permite diseñar estrategias donde el alumno sea un participante más activo en la elaboración de su propio aprendizaje, realice tareas de exploración y elaboración de hipótesis en la que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones. Esto es la finalidad que se persigue con el diseño de esta secuencia didáctica, implementada utilizando el entorno de programación de *geogebra*, en el tema de algebra lineal: *Teorema de los ejes principales en* $\boldsymbol{R}^2$.

En este trabajo, se muestra en detalle el *diseño y forma de utilizar la herramienta computacional*, conjuntamente con la *guía de actividades*. Se menciona que los objetivos perseguidos, se alcanzaron en alto grado, como se desprende del análisis de las respuestas obtenidas de las guías de actividades entregadas. Una de las metas de comprensión de la secuencia didáctica es, dada la expresión $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ y utilizando una herramienta didáctica computacional diseñada en geogebra realice una tarea de exploración, experimental y computacional para hallar una nueva base, mediante *rotación de la base canónica* que transforme la matriz asociada a la forma cuadrática en diagonal. La segunda fase de la secuencia es realizar un uso activo del teorema de los ejes principales para identificar la cónica asociada a la forma cuadrática. Una de los ejes teóricos de la ingeniería didáctica de la secuencia, que fueron concretados, es que para enseñar a los alumnos un concepto matemático se debe presentar la reunión de distintos *registros de representación semiótica*, y su *coordinación***.**

OBJETIVOS

Como resultado de evaluaciones escritas de los exámenes finales de Algebra Lineal, se concluye que no hay una imagen conceptual que estructure claramente las ideas de cambio de base y diagonalización ortogonal conjuntamente con el teorema de los ejes principales.
A partir de la detección de estas dificultades se ha realizado un diseño, utilizando la *visualización con computadora*, que permita la construcción de una *imagen conceptual* del teorema de los ejes principales en $\mathbf{R}^2$.

TEORIAS DIDACTICAS Y FUNDAMENTACION MATEMATICA

La imagen conceptual es la *primera asociación mental no verbal que aparece en nuestra mente* cuando el nombre del concepto es evocado (Hitt Fernando, 2000).
Puede tratarse de una impresión visual o una colección de impresiones o experiencias. si bien estas imágenes visuales, experiencias pueden luego traducirse en forma verbales, no es así como aparecen en primera instancia.
Para adquirir un concepto *no es suficiente con memorizar su definición*, debe poseerse una imagen conceptual del mismo. es decir, que el aprendizaje, la comprensión, la aplicación y desarrollo de los conceptos matemáticos involucra la construcción de un cierto tipo de estructura mental: la imagen conceptual.
La teoría de situaciones didácticas introducidas por G. Brousseau (1986), se basa en una hipótesis acerca de la construcción del significado de una noción .. . *una nocion aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, ese relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, solo si es una solución de un problema. Tales problemas constituyen, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen la significación de la noción.*
Dada una transformación lineal $T:V \rightarrow V$ y *fijada una base* B_v *existe una única matriz* A que la representa. Si se *cambia* la base de B_v a B'_v la matriz que representa la misma transformación lineal T, *cambia* a A´. Uno de los *problemas fundamentales del algebra lineal*, es *elegir una base para V*, de manera que la *matriz T sea tan sencilla* –por ejemplo, diagonal- como se pueda. Se puede pensar que una manera de atacar el problema es elegir primero una matriz para T con relación a alguna base simple, como la base canónica. Frecuentemente esta elección no conduce a la matriz más sencilla para T, de modo que entonces se busca una manera de cambiar la base a fin de simplificar la matriz. En consecuencia, para resolver este problema, es necesario saber en que forma un cambio de base afecta la matriz de un operador lineal, en otras palabras, hallar la nueva matriz de la transformación lineal cuando cambia la base. El siguiente teorema es un resultado clase para resolver el problema:

Sea T:V→V un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita. Si A es la matriz de T con respecto a una base B, y A´ es la matriz de T con respecto a una base B´, entonces:

$$A' = P^{-1}AP$$

siendo *P* la matriz de cambio de base de *B´* a *B*.
Las matrices A y A´ se denominan semejantes y propician la *siguiente definición general de semejanza*.
A y B matrices cuadradas de orden n. A es semejante a B si y solo si existe una P –inversible– tal que $B = P^{-1}AP$

Diagonalización
El problema fundamental antes planteado se reformula en forma de preguntas . Dado un operador lineal T:V→V ¿existe una base para V respecto a la cual la matriz de T sea diagonal? Dado un producto interior en V, que permite calcular norma de vectores y angulos ¿existe una *base ortonormal* para V de manera que la matriz de T sea diagonal?

El problema en términos matriciales
Si A es la representación matricial de T, con respecto a alguna base ¿existe algún cambio de base tal que la nueva matriz de T sea diagonal? Por lo expuesto la nueva matriz para T debe ser de la forma $D = P^{-1}AP$ donde P es la matriz de transición adecuada que se debe hallar. En consecuencia, la siguiente definición establece el concepto.
A es *diagonalizable* si y solo si existe una P –inversible- tal que $D = P^{-1}AP$. Por lo tanto, las dos preguntas anteriores se reformulan en términos matriciales del siguiente modo:
Dada una matriz cuadrada A, ¿existe una matriz cuadrada P tal que $D = P^{-1}AP$? En otros términos, que condiciones definen una matriz diagonalizable.
La pregunta ¿existe una *base ortonormal* para V de manera que la matriz de T sea diagonal? En términos matriciales equivale a ¿hay una matriz ortogonal P tal que $D = P^{-1}AP = P^TAP$? Esta pregunta propicia la definición de semejanza ortogonal:
A es *diagonalizable ortogonalmente* si y solo si existe una P –ortogonal- tal que

$$D = P^{-1}AP = P^TAP.$$

La clave de la respuesta a la pregunta anterior es el siguiente resultado fundamental:
A es simétrica si y solo si es diagonalizable ortogonalmente.

Enunciado del Teorema de los ejes principales en $\mathbf{R^2}$.
El diseño de la visualización y la secuencia didáctica son estrategias orientadas a favorecer la comprensión del siguiente resultado fundamental no solo en el sentido estrictamente matemático sino sobre todo por el conjunto de problemas de ciencias de la ingeniería que permite resolver, es decir, en el sentido de Vergnaud, se puede construir un *campo conceptual en torno de este teorema*.
Sea

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

la ecuación de una cónica c, y supóngase que

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} + \mathrm{K}\mathbf{x} + \mathrm{f} = 0$$

es la forma cuadrática asociada. Entonces se puede hacer girar los ejes de coordenadas de modo que la ecuación para C en el nuevo sistema de coordenadas xý´ tenga la forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + dx' + ey' + f = 0$$

donde λ_1 λ_2 son autovalores de A. entonces se puede llevar a cabo la rotación por medio de la sustitución **x**´=P**x** en donde P diagonaliza ortogonalmente a A y detP=1.

Los invariantes del polinomio característico

Los autovalores de una matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ surgen de hallar las raíces del polinomio característico

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A).$$

¿Se puede descubrir o verificar mediante el uso de computadora –si se conoce de antemano el resultado teórico- la invarianza de Tr(A) y det(A), ante un cambio de base?
El diseño de la herramienta didáctica computacional con geogebra permite al alumno realizar cambios de base mediante rotación de la base euclidea ortonormal, experimentar y observar los resultados numérico de Tr(A), det(A) y $A' = P^{-1}AP$. Este ensayo configura la situación didáctica para una segunda fase que consiste en demostrar algebraicamente la invarianza.
El aprendizaje del concepto más importante por medio de la estrategia didáctica de la visualización mediante la utilización de una herramienta didáctica computacional consiste en producir un cambio de base mediante rotación hasta producir la transformación de A en otra matriz diagonal.

SOBRE EL USO DE LA HERRAMIENTA DIDÁCTICA COMPUTACIONAL

Si el producto de los autovalores de A λ_1 $\lambda_2 \neq 0$, la ecuación

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

mediante rotación de los ejes de coordenadas se transforma con el nuevo sistema de coordenadas xý´ , en

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + dx' + ey' + f = 0$$

Completando cuadrados, resulta la siguiente ecuación en el nuevo sistema x´´y´´ de ejes trasladados:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + F = 0$$

Si λ_1 $\lambda_2 > 0$ y $F\lambda_1 < 0$, se puede escribir la ultima ecuación como:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

Para ciertas constantes a y b. Esta es la ecuación canónica de la elipse.

Solamente rotación de ejes

Con el uso de la herramienta didáctica computacional se puede visualizar el proceso algebraico anteriormente descripto, ajustando con el deslizador los valores de las constantes a,b,c,d,e,f, pero también con el cursor deslizando la base mediante rotando del punto C con el mouse, hasta hacerlo coincidir con E. Allí el alumno obtendrá las matrices de cambio de base y la matriz A diagonalizada ortogonalmente. Pero de fundamental importancia es que en la rotación se verifica como se transforma numéricamente la matriz A en otra matriz A´ que representa la misma forma cuadrática pero con referencia a otra base. Si la nueva esta dada por los vectores propios de A ordenados adecuadamente, la matriz A´ será diagonal. Este hecho se puede explorar experimentalmente con la herramienta didáctica computacional.La estrategia didáctica que mejora la comprensión, según se desprende por las actividades entregadas por los alumnos sobre la secuencia didáctica, la devolución, es entre otras variables la posibilidad de aprehender el concepto como resultado de la experimentación. La descripción visual está representada por las dos siguientes figuras –figura1, figura2-.

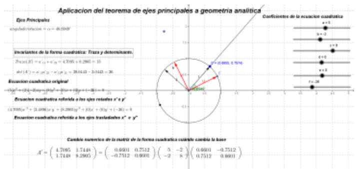

Figura 1. Cambio de base mediante rotación interactiva por desplazamiento del cursor.

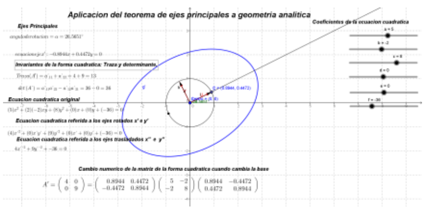

*Figura 2.*Visualizacion de la forma cuadrática en los registros geométrico, algebraico y numérico.

Rotación y Traslación de ejes

Calibrados los coeficientes de la ecuación cuadrática a través de los deslizadores, se plantea la visualización a través de la herramienta didáctica computacional de :

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 5y - 4 = 0$$

Ingresados los coeficientes de la cónica y rotada la base hasta obtener la diagonalizacion ortogonal, la información que se puede extraer, son las ecuación cuadrática referida a los ejes rotados y la ecuación cuadrática estándar de la cónica referida al par de ejes de traslación x´´y´´, ademas de valores y vectores propios, traza y determinante. El centro de la cónica indica el origen del sistema x´´ y´´. También se puede observar el angulo de rotación y la ecuación de uno de los ejes principales x´´ -figura3-.

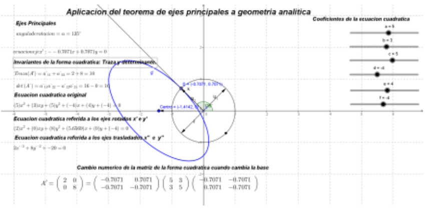

*Figura 3.*Visualizacion de la forma cuadrática en los registros geométrico, algebraico y numérico.

Si $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ y $F \neq 0$, se puede escribir la ecuación:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + F = 0$$

de la siguiente forma

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

y representa la ecuación canónica de una hipérbola.

Calibrados los coeficientes de la ecuación cuadrática a través de los deslizadores, se plantea la visualización a través de la herramienta didáctica computacional de :

$$x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$$

Ingresados los coeficientes y rotada la base hasta obtener la diagonalizacion ortogonal, se puede visualizar el registro geométrico, grafico y numérico de la cónica –figura4-.

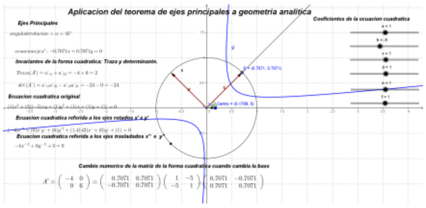

*Figura 4.*Visualizacion de la forma cuadrática en los registros geométrico, algebraico y numerico.

Si $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ y $d' \neq 0$, se puede escribir la ecuación (con $\lambda_2 \neq 0$):

$$\lambda_2 y''^2 + d'x'' = 0$$

que representa una parábola. La siguiente figura5, ilustra este caso:

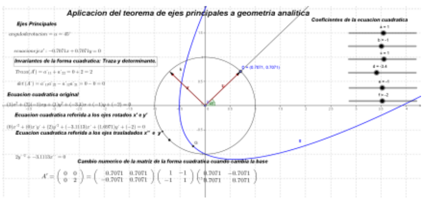

*Figura 5.*Visualizacion de la forma cuadrática en los registros geométrico, algebraico y numérico.

Cónicas degeneradas

Descripto el modo de trabajo para operar la herramienta didáctica, se muestra con figuras, los distintos casos en que la representación grafica de la ecuación cuadrática da lugar a rectas paralelas, un par de rectas que se cortan o una sola recta.

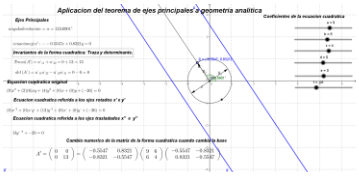

*Figura 6.*Visualizacion de la forma cuadrática en los registros geométrico, algebraico y numerico.

*Figura 7.*Visualizacion de la forma cuadrática en los registros geométrico, algebraico y numérico.

*Figura 8.*Visualizacion de la forma cuadrática en los registros geométrico, algebraico y numérico.

SECUENCIA DIDÁCTICA

Objetivos

La visualización es una estrategia didáctica que sirve para crear una situación didáctica, en el sentido de Brousseau, que le dé sentido a un teorema de fundamental importancia en algebra lineal. El significado del saber matemático del alumno está fuertemente influenciado por la forma didáctica con que el contenido le es presentado. *El desarrollo del alumno dependerá de la estructuración de las diferentes actividades de aprendizaje* a través de una *situación didáctica*, Brousseau (1986). La idea pedagógica en el redescubrimiento del conocimiento no es fácil de ser puesta en práctica y solamente cobra sentido en un cuadro muy bien reflexionado. Todo indica que tal vez uno de los grandes equívocos encontrados en la enseñanza de la matemática sea aquel de pensar que su práctica educativa se reduciría a una simple reproducción, en menor escala, del contexto de trabajo del científico.
Una ecuación cuadrática de la forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

se puede representar matricialmente en la forma

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} + \mathrm{K}\mathbf{x} + \mathrm{f} = 0,$$

con $$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$$

Actividad N°1'Visualizacion: Uso de la herramienta didáctica computacional para explorar y descubrir mediante la aplicación del teorema de los ejes principales cual es la cónica, el ángulo de rotación y los ejes principales'.

Metas de Comprensión

A través de la experimentación numérica con la herramienta didáctica computacional, verificar la estrategia fundamental de transformar la forma cuadrática $\mathbf{x}^t A\, \mathbf{x}$ en una suma de cuadrados mediante la expresión $\mathbf{x}^t D\, \mathbf{x}$ con

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Conocimientos previos

Definición de matriz diagonalizable ortogonalmente, vectores y valores propios y cambio de base.

Enunciado de la actividad

Dada la forma cuadrática

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

y utilizando una herramienta didáctica computacional diseñada en geogebra realice una tarea de exploración, experimental y computacional para hallar una nueva base, mediante *rotación de la base canónica* que transforme la matriz asociada a la forma cuadrática en diagonal. Para ordenar su tarea exploratoria ajuste en cada deslizador los valores de los coeficientes correspondientes a cada ecuación cuadrática y siga los siguientes dos pasos:

a) situé la base rotatoria de manera que quede definida la base canónica.
b) rote la base y describa el comportamiento de la forma cuadrática.
c) Para los ángulo de rotación a partir de la base canoníca $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ correspondientes a $\theta=30°$, $\theta=60°$ determinar:
 c1) ecuación cuadrática o polinomio de segundo grado en dos variables igualado a cero.
 c2) Matriz de la forma cuadrática.
 c3) Matriz de cambio de base.
d) determine la existencia o no de una base ortonormal donde la matriz de representación de la forma cuadrática es diagonal.
e) identifique la grafica que muestra el monitor de la computadora.
f) determine el centro o vértice de la cónica.
g) Con la ayuda de la grafica de la computadora determine *la ecuación de los ejes principales* y el *ángulo de rotación* de los ejes.

Del experimento determine:

a) *valores propios* de A -matriz de la forma cuadrática-.
b) *Vectores propios* y de la *base ortonormal*.
c) identifique la cónica o cónica degenerada.

¿Qué relación existe entre el producto de los valores propios –positivo, negativo, nulo- y la cónica obtenida?

Del experimento computacional deduzca a partir de los datos numéricos la respuesta a las siguientes cuestiones:

a) ¿La traza de las matrices A y A´ con distintos cambios de base dados por distintos ángulos de rotación se modifica o permanece invariante?
b) ¿El determinante de las matrices A y A´ con distintos cambios de base dados por distintos ángulos de rotación se modifica o permanece invariante?
c) La factorización $A = P\,D\,P^{-1}$ ¿es única? Del experimento con la herramienta didáctica, justifique la respuesta.

Actividad N°2: Cálculos en el Registro algebraico, visualización geométrica y verificación algebraico-numérica con la herramienta didáctica computacional.

Metas de Comprensión

Adquirir la habilidad necesaria para aplicar la secuencia de pasos algebraico-numérico del teorema de ejes principales en $\mathbf{R}^2$ y determinar la cónica asociada.

Conocimientos previos

Enunciado y demostración del teorema de ejes principales.

Enunciado de la actividad

Aplique el teorema de los ejes principales y determine mediante rotación la cónica asociada a la forma cuadrática

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

Actividad N°3: 'Clasificación de las formas cuadráticas'

Metas de Comprensión

Adquirir destreza en el manejo de la secuencia de pasos del teorema de ejes principales y establecer una clasificación de las formas cuadráticas en elípticas, hiperbólicas y parabolicas.

Conocimientos previos

Teorema de los ejes principales.

Enunciado de la actividad

Utilizando la herramienta didáctica computacional realice el mismo estudio de la actividad N°1, pero con las ecuaciones cuadráticas:

a) $5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0$
b) $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0.$
c) $x^2 + 2xy + y^2 - \frac{10}{\sqrt{2}}x + \frac{80}{\sqrt{5}}y + 14 = 0.$
d) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

A partir del análisis de la resolución de actividades, responda las siguientes cuestiones:

I) ¿Qué relación existe entre el producto de los valores propios –positivo, negativo, nulo- y la cónica obtenida?

II) Las conclusiones numéricas referidas al resultado del producto

$$\lambda_1\lambda_2>0 \text{ o } \lambda_1\lambda_2<0 \text{ o } \lambda_1\lambda_2 = 0$$

obtenidos del ítem anterior proporcionan las bases cognitivas para formular el planteo algebraico general. Entonces a partir de la ecuación de segundo grado en dos variables

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + F = 0$$

Clasifique las cónicas o cónicas degeneradas en los siguientes tres ítems, respondiendo que lugares geométricos se obtienen:

a) Curvas elípticas
b) Curvas hiperbólicas
c) Curvas parabólicas

Actividad N°3 'Conceptos y resultados fundamentales involucrados en la construcción del teorema sobre ejes principales'

Metas de Comprensión

De gran importancia para la comprensión conceptual de un teorema es identificar los *resultados claves utilizados*, que generalmente, son muy pocos en referencia a el o los hechos fundamentales e imprescindibles que posibilitan la demostración del resultado. Es más, es usual en matemática, cuando se trata de resultados claves, agregarle al nombre propio de un teorema la *palabra fundamental*. Ilustrativamente se menciona en Calculo I, el teorema *fundamental* de sucesiones o el *teorema fundamental* del cálculo integral.

Conocimientos previos
Teorema de los ejes principales.

Enunciado de la actividad
Identifique y enuncie el resultado fundamental -de algebra lineal- *utilizado* en la construcción de la demostración del teorema de ejes principales.

CONCLUSIONES
El nudo central de este trabajo, el diseño de una herramienta didáctica computacional junto con un modelo de secuencia didáctica correspondiente, destinado a la comprensión conceptual de teorema de los ejes principales en $\mathbf{R}^2$, ha permitido en gran medida al alumno integrar los temas d diagonalización ortogonal y cambio de base en una imagen conceptual unificada como se ha verificado en exámenes escritos finales. Pero también y colateralmente ha permitido el trabajo intelectual en grupo y esencialmente la dedicación y respuesta de todos los participantes en la devolución de los trabajos correspondientes a la secuencia didáctica.

BIBLIOGRAFÍA

- Anton, Howard.1986. *Introducción al álgebra lineal*. Editorial Limusa.
- Brousseau, Guy. (1986). *Fundamentos y Métodos de la didactica.*RDM N°9.
- Hitt Fernando.2000. Contruccion de conceptos matematicos y estructuras cognitivas. Cinvestav,IPN. Mexico.
- Pita Ruiz,Claudio .1991. *Algebra Lineal*. Mc Graw-Hill.
- Golovina,L.I.1974. *Algebra Lineal y algunas de sus aplicaciones*.