CB35

LA HIPÉRBOLA. UNA *ACTIVIDAD DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN* DESDE LA ARTICULACIÓN ENTRE GEOMETRÍA SINTÉTICA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Cecilia Elguero & Mabel Licera

Universidad Nacional de Río Cuarto
Ruta Nacional 36-km 601. Río Cuarto (Cba)
celguero@exa.unrc.edu.ar, rlicera@exa.unrc.edu.ar

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación: Propuesta didáctica - Nivel Superior – Didáctica de la Matemática

Palabras claves: TAD; geometría analítica; sintética; articulación

RESUMEN

En este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación en relación a *la formación del profesor en Matemática vía el cuestionamiento y reconstrucción de la matemática escolar*. Realizamos una descripción a priori de parte de una *Actividad de Estudio e Investigación* (Chevallard, 2013) para el *Profesorado de Matemática* que pone el énfasis en la complementariedad entre geometría analítica y geometría sintética en el estudio de las cónicas. Tomamos como marco teórico-metodológico de referencia la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* y en particular la postura epistemológica y didáctica de Josep Gascón (2002 a, 2002 b, 2003) en torno al abordaje de problemas geométricos a partir de un “diálogo” entre técnicas sintéticas y analíticas. La propuesta tiene por objetivos, por un lado, establecer la equivalencia entre dos caracterizaciones de la hipérbola como lugar geométrico, y por otro lado, hacer visible el “diálogo” entre geometría sintética y analítica y el aporte de una a la otra en el estudio de propiedades de la hipérbola.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca en la línea de investigación a la que pertenecemos, en relación a *la formación del profesor en Matemática vía el cuestionamiento y reconstrucción de la matemática escolar*. En particular se muestra parte de la propuesta de un proceso de estudio en el ámbito del *profesorado de matemática* que pone el énfasis en la complementariedad entre geometría analítica y geometría sintética en el estudio de las cónicas.

Tomamos como marco teórico-metodológico de referencia la *Teoría Antropológica de lo Didáctico*. En este marco, Chevallard (2013) propone las *Actividades de Estudio e Investigación (AEI)* como dispositivos escolares que propongan, para cada tema de estudio escolar, cuestiones problemáticas iniciales cuyo abordaje “conduzca a la clase a encontrar, con una gran probabilidad, los elementos del saber deseado”. Cabe aclarar que entendemos, siguiendo a este autor, la importancia de insertar articuladamente cada *AEI* en procesos de estudio más amplios los llamados *Recorridos de Estudio e Investigación* (*REI)* (Chevallard, 2013).

Desde este marco proponemos una AEI basados en el trabajo de Josep Gascón (2002a, 2002b, 2003) en el que pone a consideración una postura de "diálogo" entre técnicas sintéticas y analíticas para abordar problemas geométricos y presenta algunos problemas prototípicos.
Asumimos que el grupo de estudio ha trabajado en geometría sintética y analítica, caracterizando rectas y circunferencias, estableciendo propiedades, demostrando teoremas de incidencia y estudiando lugares geométricos sencillos e intersecciones entre los mismos. Proponemos estudiar –parados en principio en el ámbito de la geometría analítica- *lugares geométricos* del plano determinados por condiciones más complejas, en particular, **el *lugar geométrico* de puntos del plano que sean centros de circunferencias *c´* tangentes a una circunferencia dada *c* o a una recta dada *m* y que pasen por un punto fijo *A* cualquiera del plano.** Variando las condiciones particulares de las situaciones, estos *lugares geométricos* serán las cónicas (o cónica degenerada).
Consideramos que el estudio de estos *lugares geométricos* desde el "diálogo" entre geometría sintética y geometría analítica -usando el recurso de programas de geometría dinámica como herramienta para la exploración de relaciones, formulación de conjeturas y estudio de casos- permite llegar a la definición habitual de las cónicas en términos de distancias que involucran sus "focos" y estudiar sus propiedades.
En la propuesta que presentamos en este trabajo se plantea caracterizar analíticamente uno de estos lugares geométricos y dar información sobre su gráfica. Tal como lo indica Gascón (op. cit.) esta tarea pone en evidencia las limitaciones de las técnicas analíticas disponibles y la potencia de las técnicas sintéticas para sugerir una nueva estrategia analítica que permita dar respuesta completa a la situación planteada.

LA ACTIVIDAD DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN

Realizaremos una descripción a priori del proceso de estudio, planteando la cuestión inicial y el juego entre cuestiones, tareas problemáticas particulares que se desprenden de ellas y respuestas. También, iremos haciendo algunos comentarios respecto al recorrido trazado (A las cuestiones problemáticas que se van planteando las indicaremos con las expresiones Q_1, Q_2, ...).

Q_1: ¿Cuál será el lugar geométrico de puntos del plano que sean centros de circunferencias c´ tangentes a una circunferencia dada c o a una recta dada m y que pasen por un punto fijo A cualquiera del plano? ¿Tendrá siempre la misma forma su gráfica? ¿Cumplirá alguna regularidad? ¿Qué propiedades tendrá? ¿Habrá una ecuación que lo identifique?

La tarea que sigue propone estudiar un caso particular:

<u>**Tarea 1:**</u>

a) Dada la circunferencia c de ecuación $(x-3)^2+y^2=4$ ***y el punto*** $A = (-3,0)$ ***exterior a ella, encontrar las coordenadas del centro P de la circunferencia c´ que pasa por A y es tangente a c en el punto B = (3,2).***

b) ¿Es posible que para algún punto B de c el centro P de c´ esté en el eje de abscisas?

c) Proponer otro punto B de c y encontrar las coordenadas de P.

d) ¿Cómo se puede caracterizar analíticamente el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por $A= (-3,0)$ ***y son tangentes a c? ¿Qué información podemos dar de su gráfica (forma, propiedades)?***

El considerar distintos puntos B de c, llevará a establecer las condiciones que deben satisfacer los centros P de las circunferencias $c´$:

(i) P debe equidistar de A y de B, hecho que se deriva inmediatamente de la definición de circunferencia.

(ii) P debe estar en $\overleftrightarrow{OB}$. Esta afirmación se justifica en la siguiente propiedad: Las circunferencias tangentes tienen sus centros alineados con el punto de tangencia

En la Figura 1, dado un B particular, se muestra P tal que $P \in \overleftrightarrow{OB}$ y $PA=PB$[1].

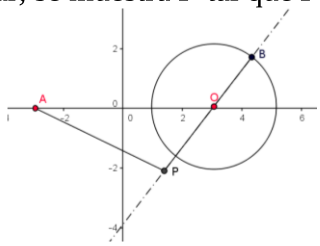


Fig 1. Representación gráfica de P para un punto B en particular

Sea $P = (x,y)$ el centro de c´ y $B = (b_x, b_y)$ en c. El siguiente sistema caracteriza analíticamente el lugar geométrico buscado:

$$\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = (x-b_x)^2 + (y-b_y)^2 \\ y = \dfrac{-b_y}{3-b_x}(x-3) \quad \text{si } b_x \neq 3 \\ (b_x - 3)^2 + b_y{}^2 = 4 \end{cases}$$

Las condiciones (i) y (ii) se traducen analíticamente en las dos primeras ecuaciones. El hecho que B es un punto en la circunferencia c, se expresa en la última ecuación del sistema.

Observamos que a partir de (i) se puede establecer otra relación: B pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ (M_{AB}). Como M_{AB} pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ y es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, su ecuación es: $y = -\dfrac{b_x+3}{b_y}\left(x - \dfrac{-3+b_x}{2}\right) + \dfrac{b_y}{2}$, si $b_y \neq 0$ (si $b_y = 0$, la ecuación es $x = \dfrac{-3+b_x}{2}$).

De esta manera, se obtiene otra caracterización algebraica del lugar geométrico. (En ambos casos el planteo algebraico involucra justificaciones del ámbito de la geometría sintética, mostrando así el permanente "diálogo" entre ambas geometrías.)

Los sistemas propuestos para describir el *lugar geométrico* no se muestran "eficaces" para explorar sus propiedades y obtener su representación gráfica. El intento de reducir las condiciones a una sola ecuación es un trabajo algebraico engorroso que no garantiza una expresión más "eficaz". Si se toma otra circunferencia c u otro punto A se puede observar que los sistemas obtenidos no resultan "más amigables", se evidencian limitaciones de las técnicas analíticas para el estudio de este lugar geométrico. Un posible camino a seguir sería -en términos de Gascón (2003)- enunciar una *versión euclidiana general* del problema inicial, es decir, considerar figuras despojadas de su caracterización algebraica, resolver esta versión

[1] Las notaciones *PA y PB* indican distancia de P a A y a B respectivamente.

del problema mediante el patrón de dos *lugares geométricos* y finalmente inspirarse en esta resolución para retomar la versión *analítica particular* del problema inicial.

Q_2: *Podríamos plantear problemas de este tipo sin recurrir a coordenadas y además de manera general, esto es, sin limitarnos a una circunferencia particular y a un punto A determinado y estudiar las características del lugar geométrico correspondiente. En este caso:*
Q_{21}: ¿Cómo reformularíamos la cuestión problemática inicial?
Q_{22}: ¿Qué información del lugar geométrico podemos obtener a partir de esta formulación general del problema?
Q_{23}: ¿De qué manera la información obtenida aporta para abordar situaciones como las planteadas en el problema inicial?

Respecto a ***Q_{21}***, para la tarea dada, el enunciado inicial se podría plantear –en términos sintéticos- de la siguiente manera:
Caracterizar el lugar geométrico de los centros P de las circunferencias c´ tangentes a una circunferencia c de centro O que pasan por un punto A exterior a c.
Abordamos ahora ***Q_{22}***. Las tareas que siguen proponen explorar relaciones métricas entre los elementos involucrados en la construcción del lugar geométrico, su trazado con un software y su caracterización "en términos métricos".

<u>Tarea 2:</u>
Sea la circunferencia c de centro O. Sea A un punto exterior a la misma. Sea $\mathcal{P}$ ***el lugar geométrico de los centros P de circunferencias c´ tangentes a c en B tales que A ϵ*** *c´*.
a) Marcar algunos puntos B en c y los correspondientes P de $\mathcal{P}$.
b) Realizar la misma tarea que en a) usando el software Geogebra. Explorar si es siempre posible la construcción de puntos del lugar geométrico.
c) Usar el comando "lugar geométrico" y obtener la representación gráfica del conjunto de puntos P. Variar la posición de los puntos A y O y obtener nuevas curvas. Comparar sus formas.

La condición de tangencia equivale a que el punto *P* esté en $\overleftrightarrow{OB}$, y la condición de equidistancia a los puntos *A* y *B* equivale a que *P* esté en M_{AB}. De esta manera, *P* está en la intersección de estos dos lugares geométricos (se puede haber llegado a esta relación en la tarea 1a)).

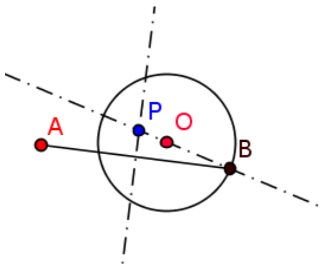


Fig 2. Construcción de un punto P como intersección de M_{AB} y $\overleftrightarrow{OB}$

El trabajo con lápiz y papel -útil para reconocer cómo las condiciones que debe satisfacer *P* se traducen a encontrar la intersección de sendos lugares geométricos- muestra sus limitaciones si se quiere "ver" el lugar geométrico de los puntos *P* y llevar a cabo un estudio exploratorio de características y propiedades del mismo. El complementar el estudio con el uso del software *Geogebra*, permite, a partir de la construcción de un punto *P* (como lo realizado con lápiz y papel), obtener nuevos puntos de P variando la posición del punto de tangencia B sobre la circunferencia dada, usando para ello el comando "arrastre".

El análisis de la posibilidad o no de la construcción de puntos del lugar geométrico implica el considerar si las rectas $\mathrm{M_{AB}}$ y $\overleftrightarrow{OB}$ siempre se cortan cualquiera sea el punto B en c. Si B es tal que la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente a c, el radio $\overline{\mathrm{OB}}$ resulta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, y por lo tanto $\overleftrightarrow{OB}$ es paralela a $\mathrm{M_{AB}}$, entonces la construcción no es posible.
Mediante el uso del comando "lugar geométrico" se obtiene la gráfica del conjunto de puntos P para la circunferencia y el punto exterior A considerado (Fig. 2). Precisamente, los dos puntos en que $\overleftrightarrow{OB}$ resulta paralela a $\mathrm{M_{AB}}$ marcan un cambio entre dos "ramas" de la gráfica.

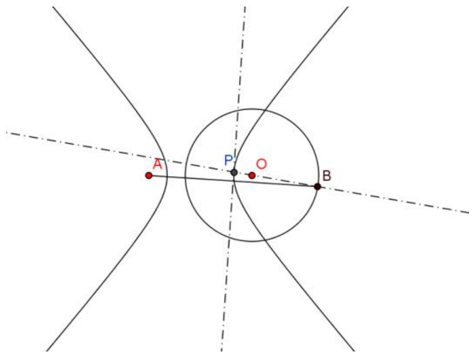


Fig2. Gráfica del lugar geométrico

Al variar la posición de los puntos fijos A y O se puede observar que la forma de la curva es la misma.
Respecto a la pregunta realizada en el problema inicial ***¿Es posible que el centro P esté en el eje de abscisas tomando otro punto de tangencia B sobre la circunferencia dada?,*** se puede estudiar cuál sería su enunciado en este contexto general y sintético. De esta manera, se observaría que en todos los casos las curvas intersecan a la recta $\overleftrightarrow{AO}$. En este trabajo exploratorio visual es probable que se conjeturen propiedades de la curva respecto a su forma y simetrías. El avance en el proceso de estudio permitirá construir herramientas para su enunciado y validación.
El profesor (o algún estudiante) puede aportar la siguiente conjetura:

P* parece corresponder al lugar geométrico denominado *HIPÉRBOLA.

Podrían graficarse hipérbolas seleccionando la opción que propone el software, el cual pide tres puntos (los focos y un punto por el que pasa, pero sin "hablar" del estatus de los mismos), y comparar las gráficas.
También se podría dar su definición: *HIPÉRBOLA es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante*. O podría pedirse a los estudiantes que busquen definiciones habituales en textos, internet, etc.
Esta definición hace referencia a dos puntos y un número. Podrían conjeturarse identificaciones entre estos elementos y los involucrados en el problema que se está abordando y respecto a cuáles son las distancias de las que se habla.
Surge así una nueva cuestión:

Q_{22}´: ¿Cómo saber si realmente P es una hipérbola?

El objetivo ahora es indagar si efectivamente las condiciones dadas en el planteo sintético son equivalentes a las condiciones que definen una hipérbola. Lo hacemos a partir de las siguientes tareas:

Tarea 3

Veremos ahora si todo punto P de P cumple las condiciones de pertenecer a una hipérbola. Para esto exploraremos inicialmente relaciones de valores intermedios entre P, B y O, y relaciones de dependencia entre las distancias OB, PA y PO.

***Sea un punto P de P*:**

a) Sabemos que P, B y O están alineados. Mover el punto de tangencia B sobre la circunferencia c y establecer qué relaciones de valores intermedios se dan entre estos puntos.

b) ¿A partir de las relaciones establecidas entre P, B y O, qué relaciones pueden establecerse entre las distancias OB = r_o (radio de c), PB y PO? ¿Y entre las distancias r_o, PA y PO?

Al variar *B* sobre la circunferencia dada se puede observar que los centros *P* se mueven en $\overleftrightarrow{OB} - \overline{OB}$ esto es, se dan las siguientes relaciones de valores intermedios[2]:

P-O-B (Fig. 3a) ó P-B-O (Fig. 3b)

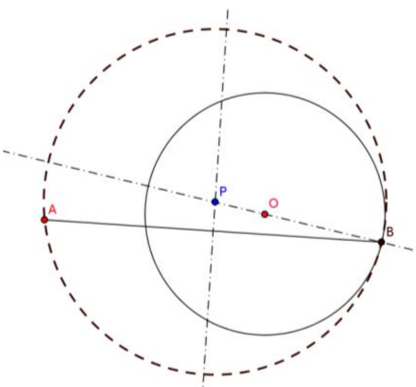


Fig3a) P-O-B

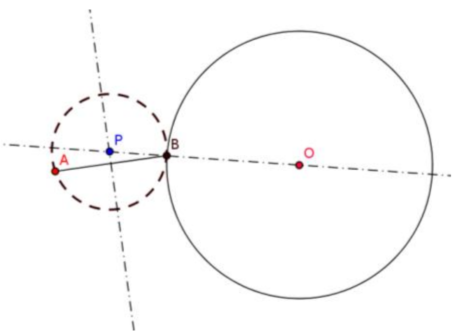


Fig3b) P-B-O

¿Por qué P no puede estar en $\overline{OB}$? La validación de este hecho implica probar que *P≠O*, *P≠B* y que *P* no está entre *O* y *B*. Si *P=O* o *P=B* trivialmente se tiene que *P* no cumpliría las condiciones de la construcción solicitada. Si *O-P-B*, entonces *PB<OB*. Como *PB=PA* se tiene *PA<OB*, lo que conduce a la contradicción que *A* sería un punto interior de la circunferencia *c* ya que, *PA* y *OB* son radios respectivos de las circunferencias *c´* y *c* tangentes en *B* y *P* es un punto interior de c.

Respecto a la **Tarea 3b)**

* Si P-O-B, entonces PB = PO + OB

[2] La relación de valores intermedios entre A, B y C que se nota A-B-C indica que tales puntos están alineados y además que B está entre A y C, o sea AB + BC = AC.

* Si P-B-O, entonces PO = PB + OB

OB = r_o (radio de la circunferencia c) se mantiene constante y en ambos casos se obtiene como diferencia de las otras dos distancias que van variando (hecho que se puede constatar gráficamente haciendo variar B sobre c):

$$r_o = PO – PB \text{ ó } r_o = PB – PO$$

Como PB = PA se tiene:

$$r_o = PO – PA \text{ ó } r_o = PA – PO$$

Por lo tanto:

$$|PA - PO| = r_o$$

De esta manera, se prueba que los puntos *P* de ***P*** verifican la siguiente propiedad métrica:
"El valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a los puntos fijos dados A y O es el valor constante, r_o".
Es decir, el lugar geométrico ***P*** está incluido en la hipérbola de focos *A* y *O* y constante r_o.
Falta ver si la hipérbola -de focos *A* y *O* y constante r_o- está incluida en ***P***. Un camino para indagar esto es hacerlo directamente. Otra posibilidad es abordar la siguiente tarea:

Tarea 4:
¿Existe algún punto P que no pertenezca a P pero verifique la desigualdad $|PA - PO| = r_o$ ***?***

Sea P un punto que no pertenece a **P**, entonces no existe un punto *B* en c tal que para toda circunferencia c´ con centro en *P* se cumpla que:

"c´ sea tangente a c en B" y "***PB=PA"***

Si *P=O*, no existe un punto *B* en c tal que c´ sea tangente a c en dicho punto, es decir *P* no pertenece al lugar geométrico. Para este *P* particular, la condición $|PA - PO| = r_o$ queda $|OA - OO| =$ OB, o sea OA = OB lo cual es absurdo ya que *A* es punto exterior a c. No se cumple así la propiedad métrica.
Si $P \neq O$, siempre existe al menos un punto *B* en c -que depende de *P*- tal que es posible construir una circunferencia c´ con centro en *P* y tangente a c en *B*. Luego, **que *P* no esté en el lugar geométrico implica que para ese *B* no se cumple la condición PB = PA.** Probaremos que tales *P* no verifican la propiedad métrica.
Los centros *O* de c, *P* de c` y el punto de tangencia *B* están alineados y son distintos. Entonces:
Si PA < PB, entonces $PA - PO < PB - PO$ (1)

$*\text{Si} \quad P - B - O,\ PB < PO$, por lo que ambos miembros de la desigualdad (1) son negativos, además $OB = -(PB - PO)$.

$*\text{Si} \quad P - O - B,\ PB > PO$, por lo que ambos miembros de la desigualdad (1) son positivos, además $OB = PB - PO$.

por lo tanto, en cualquiera de los casos $|PA - PO| \neq |PB - PO| = OB = r_o$.

$*$ La relación $O - P - B$ no se cumple ya que en tal caso se tiene que A está en el interior de c, lo cual es un absurdo.

Análogamente se prueba que si $PA > PB$ entonces $|PA - PO| \neq r_o$.

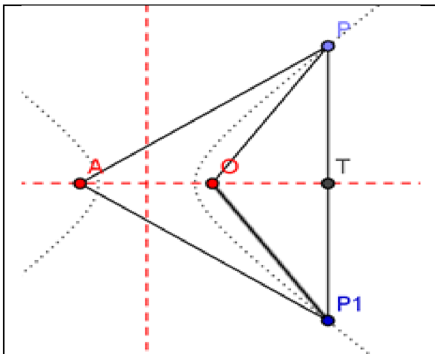
Se ha probado así la siguiente equivalencia de definiciones:

<u>Definición 1</u>
Lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de las circunferencias tangentes a una circunferencia de centro O y radio r y pasan por un punto A exterior a la misma.

$\Longleftrightarrow$

<u>Definición 2</u>
Lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos dados A y O es una constante positiva (el radio de la circunferencia de centro O)

En este momento se podría seguir el proceso de estudio en varias direcciones. Se podría utilizar la nueva caracterización para demostrar fácilmente algunas propiedades del lugar geométrico ***P*** (se muestra en la figura 4 la validación de la simetría de la gráfica respecto al eje focal).



Dado el punto *P* en la hipérbola de focos *A* y *O*, existe un punto P_1 simétrico a *P* respecto del eje focal. Se probará que P_1 está en la hipérbola.
Sea *T* el punto de intersección del segmento PP_1 con el eje focal.
Como $\Delta ATP_1 \cong \Delta ATP$ y $\Delta OTP_1 \cong \Delta OTP$ se tiene que $AP=AP_1$ y $OP=OP_1$. Luego P_1 está en la hipérbola.

Fig 4. Simetría de la hipérbola respecto al eje focal

Proponemos retomar en este punto la cuestión ***Q_{23}*: *¿De qué manera la información obtenida –la nueva caracterización de* P *en términos de distancias- aporta para abordar situaciones como las planteadas en el problema inicial?***

Dicha información permite volver al ámbito de la geometría analítica aportando una nueva estrategia para la tarea 1d) que quedó pendiente, evidenciando la pertinencia de la nueva caracterización para estudiar la gráfica del lugar geométrico.

Tarea 5:

A partir de la propiedad métrica de la hipérbola, caracterizar analíticamente el lugar geométrico* P *de los centros P de las circunferencias que pasan por A= (-3,0) y son tangentes a la circunferencia c $(x-3)^2+y^2=4$***. ¿Qué información podemos dar de su gráfica (forma, propiedades)?***

Sabemos ahora que el lugar geométrico corresponde a una hipérbola, sus puntos verifican la condición $|d(P,O)-d(P,A)|=2$ con A = (-3,0) y O = (3,0).

Si ahora traducimos esta condición en términos analíticos se tiene:

Sea $\mathrm{P} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{O} = (3,0)$ y $\mathrm{A} = (-3,0)$, entonces la condición $|d(P,O) - d(P,A)| = 2$, equivale a :

$$\left| \sqrt{(\mathrm{x}+3)^2 + y^2} - \sqrt{(\mathrm{x}-3)^2 + y^2} \right| = 2$$

Y esta expresión puede llevarse a la forma

$$8x^2 - y^2 = 8$$

Esta expresión permite determinar los puntos de corte con el eje x (en x = 1 y x = -1) y el hecho que la gráfica no corta al eje y. También permite afirmar –inmediatamente- las simetrías de la gráfica respecto a los ejes coordenados (aunque también estas propiedades pueden establecerse desde la geometría sintética, como ya lo ejemplificamos. Sin embargo, hay propiedades de la curva que estamos estudiando que definitivamente requerirá trabajar con herramientas del cálculo infinitesimal para poder ser establecidas, nos referimos específicamente a la existencia de rectas asíntotas. Podemos comprobar analíticamente que $y = \pm\sqrt{8}x$ son asíntotas oblicuas de la curva (remarcamos, una vez más la complementariedad entre técnicas analíticas y sintéticas). Hemos logrado dar muy buena información respecto a la gráfica del lugar geométrico.

Aún esta *Actividad de Estudio e Investigación* no termina. Considerando que estamos abordando un caso particular, podemos plantear una nueva cuestión:

Q_3: ¿Se podrá dar una caracterización algebraica general de la hipérbola -independientemente de donde se encuentren los puntos fijos iniciales- que permita identificar rápidamente sus rasgos esenciales?

Su abordaje requerirá elaborar nuevas tareas, yendo de las situaciones más simples (puntos fijos sobre los ejes coordenados) a considerar hipérbolas “trasladadas” y “rotadas” respecto a los ejes coordenados, estableciendo parámetros y “elementos distinguidos” de la hipérbola y relacionándolos con su gráfica. Dichas tareas requerirán a su vez técnicas analíticas de abordaje.

Hasta acá la descripción del recorrido.

COMENTARIOS FINALES

La propuesta descrita en este trabajo, tal como se señaló, forma parte de un proceso de estudio en torno a las cónicas desde una visión epistemológica y didáctica que pone énfasis en la complementariedad entre geometría analítica y geometría sintética. Desde esta postura, siguiendo a Gascón (op. cit.) describimos una propuesta diseñada para abordar el estudio de la hipérbola como lugar geométrico, partiendo de una cuestión problemática del ámbito de la geometría analítica y abordándola desde una perspectiva de “diálogo” entre técnicas sintéticas y analíticas.

Este grupo de tareas se enmarca dentro del estudio más general de los ***lugares geométricos*** **de puntos del plano que sean centros de circunferencias *c´* tangentes a una circunferencia dada *c* o a una recta dada *m* y que pasen por un punto fijo *A* cualquiera del plano.** En particular, hemos considerado una actividad de estudio para el caso del lugar geométrico de los centros de circunferencias *c’* tangentes a otra *c* y que pasen por un punto *A* **exterior** a la misma. El estudio puede extenderse a dos nuevas situaciones:

- Igual que el anterior pero considerando un punto *A* **interior** a la circunferencia c, en cuyo caso el lugar geométrico se corresponde con una elipse.

- Estudiando el lugar geométrico de los centros de circunferencias c’ tangentes a **una recta *m*** y que pasan por un punto *A* del plano (que no está en *m*), este lugar se corresponde con una parábola.

En estas situaciones, el trabajo involucra, como en la propuesta presentada, el establecer equivalencias entre dos caracterizaciones de un mismo lugar geométrico y el hacer visible el “diálogo” entre técnicas de geometría sintética y analítica en el estudio de propiedades del mismo. Se puede partir abordando el estudio -en el ámbito de la geometría analítica- de lugares geométricos particulares y realizando una “mirada” sintética de los mismos. El software geométrico se convierte en una herramienta poderosa para la exploración de relaciones y formulación de conjeturas. En todos los casos se pretende arribar a la caracterización analítica habitual de las cónicas en términos de distancias que involucran sus focos y a la determinación de sus propiedades.
Yendo más allá en el proceso, podríamos preguntarnos si nuevas combinaciones de condiciones nos llevarían a encontrar y caracterizar nuevos lugares geométricos. El avance en el estudio con cónicas trasladadas o rotadas en relación al sistema de ejes cartesianos, permitirá relacionar las ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas con las cónicas (o cónicas degeneradas), y llegar a la identificación “cónica- ecuación de segundo grado con dos incógnitas”. Este hecho permitiría afirmar que si las condiciones de un problema de este tipo desembocan en ecuaciones cuadráticas en dos variables, no podrá arribarse a nuevos lugares geométricos. Podría también hacerse un recorrido por textos e internert buscando “curvas famosas” del plano y sus correspondientes ecuaciones, para analizarlas y compararlas con las cónicas.
La potencia de los REI es muy grande. Si el objetivo es tomar en serio las cuestiones problemáticas iniciales, necesariamente se irá dando el juego entre cuestiones, tareas, respuestas provisionales a las cuestiones, nuevas cuestiones… acercándonos a esa nueva epistemología escolar de la que habla Chevallard.
Una última observación. Si bien el recorrido se ha pensado para la introducción de las cónicas, puede también desarrollarse aunque éstas ya sean conocidas por los estudiantes (en cuyo caso la propiedad métrica ya está construida). El establecer -desde la geometría sintética- la equivalencia de dos formas de describir el mismo lugar geométrico permitirá diseñar nuevas técnicas analíticas que permitan encontrar mejores respuestas al problema inicial.

BIBLIOGRAFÍA

- Bosch, M. & Gascón, J. (1994): La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. Enseñanza de las ciencias, 12(3), 314-332.
- Chevallard, I. (2013): La matemática en la escuela. Por una revolución epistemológica y didáctica. Libros del Zorzal. Buenos Aires. Argentina.
- Gascón, J. (2002a). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? Suma, 39, 13-25.
- Gascón, J. (2002b). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico. *Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales, 28*, 1-20.

- Gascón, J. (2003). Efectos del «autismo temático» sobre el estudio de la geometría en secundaria. Suma, 44, 25-34.
- González-López, M.J. (2001). La Gestión de la Clase de Geometría utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. En P. Gómez y L. Rico (Ed), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*, (pp. 277- 290) Granada: Universidad de Granada.