CB34

¿CÁLCULO NUMÉRICO O ANÁLISIS MATEMÁTICO? EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Diego Francisco Vilotta, Luis Miguel Duarte & Sebastián Michael Filipigh

Universidad Nacional del Nordeste. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura
Avda. Libertad 5600. Corrientes Capital.
dfvilotta@gmail.com, luismiguelduarte1992@gmail.com, smfilipigh@gmail.com

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación: Trabajo de Investigación. Educación Superior. Educación Matemática en la formación de Profesores.

Palabras clave: cálculo numérico (CN), análisis matemático (AM), solución numérica de ecuaciones, método de Newton-Raphson (M-N-R)

RESUMEN

El cálculo numérico y el análisis son áreas de la matemática que tienen sus respectivas técnicas, sus tipos de tareas, etc. que se las estudia sin relacionarlas demasiado. Por lo general, en el nivel superior se ensaña primero los conceptos básicos del análisis matemático sin hacer referencias a cuestiones numéricas y creemos que, cuando se estudia cálculo numérico, se hace poco hincapié en la exploración exponiéndose en forma acabada los métodos numéricos y justificando los mismos a partir del análisis matemático desarrollado previamente. Pensamos que históricamente no fue así, que primero estuvo lo numérico y que el análisis surge como una manera de optimizar estas cuestiones. Mediante un estudio histórico del método de Newton-Raphson tratamos de clarificar, en parte, este entramado entre lo numérico y lo analítico.

INTRODUCCIÓN

Sin contar con un conocimiento profundo de la historia, con una idea que pensamos proviene más de nuestra concepción de la construcción social de los conocimientos matemáticos, estamos convencidos de que los conocimientos del CN no se gestionaron de la manera en que generalmente se los presenta en la actualidad.

Si bien existen diversas organizaciones teóricas para la presentación de los temas básicos de AM y el CN, pensamos que en general éstas distan mucho de la manera en que dichos conocimientos se generaron.

Numerosos investigadores han dejado de manifiesto que la presentación axiomática de los contenidos del AM no coincide con la manera en que surgieron. Como ejemplo, basta observar que la definición de límite que significó una manera de sintetizar un concepto que llevó mucho tiempo madurar, es uno de los primeros que se presenta en los cursos de análisis[1]. Esto contribuye a que se presente este concepto sin que se sepa cuál o cuáles fueron las preguntas que se buscaban responder.

[1] En (Ferrante, J., 2009) se expone una interesante explicación de la evolución histórica del concepto de límite.

En esta ponencia, nos queremos ocupar del CN, donde no sucede exactamente lo mismo. Decimos esto porque, a diferencia de los cursos de análisis, el desarrollo de los cursos de CN está más ligado a los problemas que resuelven. Por ejemplo, si se deja de lado el tratamiento de los errores, que bien podría ser un tema tratado transversalmente, los cursos de CN comienzan con métodos para resolver ecuaciones, es decir que el problema a tratar es claro. Sin embargo, al observar las herramientas que se utilizan, se puede ver que dichos problemas, aunque cercanos a su razón de ser, son abordados utilizando conceptos del análisis de significativa complejidad.
Sostenemos que el CN se originó de una manera, se podría decir, más intuitiva - sin las herramientas desarrolladas del AM- y que incluso el análisis se gestó para formalizar y justificar estos métodos numéricos. Hoy día, existen métodos numéricos de aproximación en los que intervienen objetos del análisis totalmente formalizados (derivadas, integrales, límites, entre otros), es decir, los conceptos del análisis necesarios para desarrollar un curso de CN están previamente presentados y definidos.
Inicialmente, los problemas se trabajaron en forma numérica. La imposibilidad de realizar grandes cantidades de cálculos y el avance en el estudio de conceptos del AM, dieron un predominio a este último, dejando de lado la operatoria numérica. Con el avance de la tecnología y el surgimiento de problemas para los cuales la matemática pura no provee ningún método analítico deductivo para resolverlos, el CN toma vigencia nuevamente con una fuerte incidencia del análisis en su desarrollo teórico.
Todo esto hace que los métodos numéricos en lugar de ser una oportunidad que permita a los alumnos aproximarse a las razones de ser del análisis, se limiten a una aplicación del mismo (que no es poca cosa si se tiene en cuenta las presentaciones habituales del AM).
Para comprender lo que queremos plantear no basta con entender cómo evolucionó cada área por separado sino que se necesita ver cómo se relacionaron o, cómo evolucionaron en un momento donde los campos de conocimientos no tenían la clasificación que tienen hoy en día.
Entre los distintos temas del CN y el AM, escogimos estudiar el M-N-R por razones explicitadas en el desarrollo de la ponencia.

DESARROLLO

La resolución numérica de ecuaciones como objeto de estudio

Esta interrelación de la que hablamos entre el CN y el AM se la puede establecer en los distintos temas. Un claro ejemplo es el abordaje que se realiza para el cálculo de áreas entre curvas que, desde el análisis se lo resuelve con el cálculo de integrales definidas (obteniendo la primitiva y evaluándola en determinados valores) y desde el cálculo numérico se lo resuelve mediante la integración numérica.
Sin embargo, la integración, tanto numérica como analítica, se encuentra en lugares avanzados de los programas vigentes y, al menos desde la organización matemática actual, para definir dichos objetos se necesitan otros conceptos anteriores donde el CN y el AM ya han tomado caminos separados. Lo mismo sucede con el cálculo diferencial y la diferenciación numérica o con la solución analítica y numérica de las ecuaciones diferenciales.
Por lo dicho y porque además nos interesan los cambios que se puedan hacer en la enseñanza, construyendo bases sólidas desde los primeros temas que se encuentran en el programa de CN, es que elegimos la resolución numérica de ecuaciones como tema de estudio.

Los dos métodos de resolución numérica de ecuaciones que siempre se estudian son el de la bisección y el M-N-R.

Si bien en este artículo nos ocuparemos principalmente del M-N-R, no queremos dejar de señalar algunas cuestiones interesantes que permitirían reflexionar el método de la bisección.

Se podría decir que el método de la bisección es bastante intuitivo, en el sentido de que si uno busca un determinado valor en un intervalo donde se anula una ecuación, parece razonable probar con el valor del medio, ver si es ese el buscado y, si no lo es, determinar en qué mitad del intervalo se encuentra y seguir con este proceso hasta encontrar ese valor. Sin embargo, para poder llevar a cabo esta tarea, suponiendo que alguien lo hace motu proprio, hacen falta poner en marcha varios conocimientos. A saber:

a) Relacionar una ecuación con una función. Probar con un valor, ver si al reemplazarlo en la ecuación da cero y, de no ser así, probar con otros valores, pone de manifiesto la idea de que al variar los valores de x varían los valores de esa expresión.
b) Una idea de crecimiento o decrecimiento. Para poder establecer en qué mitad del intervalo se encuentra el valor buscado, hay que pensar que a medida que aumenta el valor de x la expresión puede aumentar o disminuir.
c) Una noción de límite y continuidad, porque a medida que asignamos valores a x cada vez se aproxima más al valor buscado.
d) Cota de error. No necesariamente está estudiada con anterioridad, pero de alguna manera al ver la expresión decimal de la aproximación, se puede establecer que no está más lejos de un cierto número, aunque no se sepa su valor de ante mano.

Por otro lado, es interesante observar que para una presentación rigurosa del método de la bisección se utilizan teoremas como el de Bolzano, definición de sucesiones (aunque un poco atípica porque no tiene una expresión en función de n), límite de sucesiones, propiedades de las sucesiones, estas son herramientas extraídas del análisis, que hacen pensar que este método está muy cargado de teoría. Es una buena oportunidad de invertir el proceso y, después de hacer intuitivamente lo que se hace en el método de la bisección analizar qué propiedades aseguran el éxito de lo que estoy haciendo. También es una oportunidad de reflexionar la génesis de algunos teoremas como el de Bolzano.

> *"En Bergé y Sessa (2003) se señala la perplejidad de los alumnos de los primeros cursos de cálculo cuando los docentes se empeñan en demostrar una relación que para ellos es tan obvia como la que propone el teorema de Bolzano. Efectivamente el teorema es banal si se piensa solamente en el contexto geométrico, para comprender su necesidad hace falta pensar aritméticamente." (Sadovsky, 2005)*

La presentación formal del método de la bisección es un claro ejemplo de cómo en la presentación axiomática se invierte el proceso de cómo surgieron los conocimientos, apareciendo primero las definiciones para luego como ejemplo poner los problemas y sus respuestas.

El método de Newton para resolver ecuaciones

En los otros temas que mencionamos como ejemplos donde se podría analizar la relación entre el CN y el AM, cada problema tiene una manera distinta de ser abordarlo y eso se nota incluso en los nombres de los temas. Por ejemplo, el problema del cálculo de áreas entre curvas se resuelve mediante la integral definida en el AM y mediante la integración numérica en CN. Se podría decir que cada tema del AM tiene su desarrollo paralelo en el CN.

Sin embargo, la resolución de ecuaciones que ocupa un importante lugar en el CN, al estudiar la solución numérica de las mismas, no figura como tema específico en los cursos de AM. Sí son temas de estudio en el análisis matemático las funciones (crecimiento, límite,

continuidad, derivación, extremos, etc.) que tienen una estrecha relación con las ecuaciones y que, paradójicamente, es el CN el que muchas veces explícita esta relación.
Si bien la resolución de ecuaciones no figura como tema en los cursos de veremos, al estudiar el M-N-R (un método de solución numérica de ecuaciones) la estrecha relación entre el AM y el CN.
Ya hemos aclarado los motivos que nos llevaron a elegir la resolución de ecuaciones para efectuar nuestro análisis ¿Por qué, entre los distintos métodos de resolución de ecuaciones, seleccionamos el de Newton? Además de que es un método potente (mucho más que el de la bisección) y fácil de programar, es un método que en su fórmula de recurrencia aparece la derivada de una función, un objeto, creemos, más desarrollado que la noción de sucesiones o de límite. En la derivada, además de la noción de límite, al usar las fórmulas de derivación, hay un paso al límite expresado en forma genérica que consideramos un conocimiento "avanzado" en el análisis.
Analizando el método de la bisección resulta sencillo, como ejercicio, "imaginar" a grandes rasgos cómo fue el proceso hasta la presentación formal del mismo: Buscando resolver una ecuación, si no se puede despejar "x", se pueden buscar valores por tanteo y más fácil hacerlo si está igualado a una constante. Igualando la ecuación a cero se puede ver si los resultados con los que se va probando son mayores o menores que cero. Luego, para hacer algo sistemático se puede ir probando con el punto medio del intervalo en el que va quedando la raíz. De esta manera, a la larga, se van obteniendo valores cada vez más próximos a la raíz. Para formalizar este método y otras cuestiones similares, en el análisis (en lo que sería hoy el análisis) se elaboraron teoremas como el de Bolzano, se formalizó la idea de sucesión y de límite de una sucesión entre, otras cosas.
Realizar un recorrido similar en el método de Newton no parece tan sencillo. Lo primero que nos podemos preguntar es cómo hizo Newton para llegar a su método porque es menos intuitivo que el de la bisección. Además, si es un método que comenzó desde lo numérico (como creemos comienzan a tratarse estos problemas) ¿cómo es que aparece una derivada en el mismo[2]?
Con la mirada puesta en estas preguntas decidimos explorar la historia del método de Newton. Entre los materiales que consultamos se encuentra "*Historical Note on the Newton-Raphson Method of Approximation"* (Cajori, 1911) un antiguo artículo de cuatro páginas que nos servirá como punto de partida para analizar algunas cuestiones.
El artículo comienza diciendo que Newton explicó su método de aproximación a las raíces reales de una ecuación en el tratado *De analysi por aequationes numero terminoraum infinitas.* Tratado que contiene también, el primer anuncio del principio de fluxiones y el teorema del binomio.
Luego de explicar algunas idas y venidas en la publicación del método de Newton, Cajori dice que el relato más antiguo impreso del método de aproximación de Newton se encuentra en *Wallis 'Álgebra*, Londres, 1685, capítulo 94. Wallis explica el método de Newton resolviendo la ecuación $y^3 - 2y - 5 = 0$. En el artículo se encuentra el siguiente cuadro que se encuentra en la página 268 del vol. I de *Newton's Opera* (Ed. Horsley):

[2] Para resolver la ecuación $f(x) = 0$, en el método de Newton, se utiliza la siguiente fórmula recurrente $p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$ y consideramos a la derivada un objeto propio del análisis.

$y^3-2y-5=0$		$+2.10000000$ -0.00544853 $+2.09455147=y$
$2+p=y$	$+y^3$ $-2y$ -5	$+8+12p+6p^2+p^3$ $-4-2p$ -5
	Summa	$-1+10p+6p^2+p^3$
$0{,}1+q=p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0{,}001+0{,}03q+0{,}3q^2+q^3$ $+0{,}06\ \ +1{,}2\ \ +6{,}0$ $+1\ \ +10,$ $-1,$
	Summa	$+0{,}061+11{,}23q+6{,}3q^2+q^3$
$-0{,}0054+r=q$	$+6{,}3q^2$ $+11{,}23q$ $+0{,}061$	$+0{,}000183708-0{,}06804r+6{,}3r^2$ $-0{,}060642\ \ +11{,}23$ $+0{,}061$
	Summa	$+0{,}000541708+11{,}16196r+6{,}3r^2$
$-0{,}00004854+s=r$		

Traducimos la breve explicación que se realiza en el artículo:

> *Vemos que Newton toma como la primera aproximación a la raíz real y = 2. Se expresa así: "que 2 difiera de la raíz en menos de una décima. Entonces pongo* $2+p=$ *y ..." La ecuación en p se convierte en* $p^3+6p^2+10p-1=0$. *Dejando de lado las potencias superiores de p, se pone 10p-1 = 0; teniendo* $p=.1+q$, *obtiene* $q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+.061=0$. *De* $11{,}23q+.061=0$ *se obtiene* $q=-.0054+r$ *, y por el mismo proceso,* $r=-.00004853$. *Por último,* $y=2+.1-.0054-.00004853=2.09455147$. *Newton parece muy consciente de que su método de aproximación puede fallar. Si hay duda, dice, si p. 1 es lo suficientemente cerca del valor verdadero, encontrar p de* $6p^2+10p-1=0$ *, pero no escribe en el trabajo si incluso este último método siempre responderá. Se da una explicación de la solución de* $y^3-2y-5=0$ *, pero no se desarrolla su método adicional. No se dan otros ejemplos.*

El autor realiza una breve descripción de lo que se realiza en la tabla y una referencia a que Newton era consciente de que el método puede fallar. Aunque nos parece un buen ejercicio tomarse un tiempo para decodificar lo que hace Newton, podemos ampliar la descripción[3] teniendo en cuenta que en ella se pueden distinguir cuatro etapas del proceso:

- *Etapa 1:* Sabiendo que la verdadera raíz es y=2+p, donde p es la distancia de 2 a esta última, se reemplaza esta expresión en la ecuación original. En las columnas que se encuentran a la derecha de 2+p=y, se reemplaza "y" por la expresión antes mencionada y se calculan los términos $(2+p)^3$ en la primer fila, -2(2+p) en la segunda fila y en la tercer fila simplemente se coloca -5. En la cuarta fila se calculan las sumas de las expresiones anteriores, la cual se corresponde con el cambio de variable hecho en la ecuación original. Como se supone que la distancia de 2 a la raíz es muy pequeña, se pueden despreciar los términos con grado mayor a uno, quedando $-1+10p\cong 0$, de donde es $p\cong 0{,}1$.
- *Etapa 2*: Se realiza un nuevo cambio de variable, tomando p=0.1+q, donde q es lo que le sobra (o falta) a 0.1 para llegar a p. En la segunda y tercer columna se aprecian los

[3] Nos parece importante diferenciar la palabra descripción de explicación, ya que en la descripción no se justifica ningún paso y tampoco se realizan comentarios que ayuden a entender por qué el método funciona.

resultados de realizar el reemplazo de p por 0.1+q, y en la cuarta fila de esta etapa, se suman las expresiones obtenidas. Al ser q una cantidad pequeña, se pueden desechar los términos de grado mayor que 1, quedando 0.061+11.23q ≅ 0, con lo que q ≅ -0.0054.

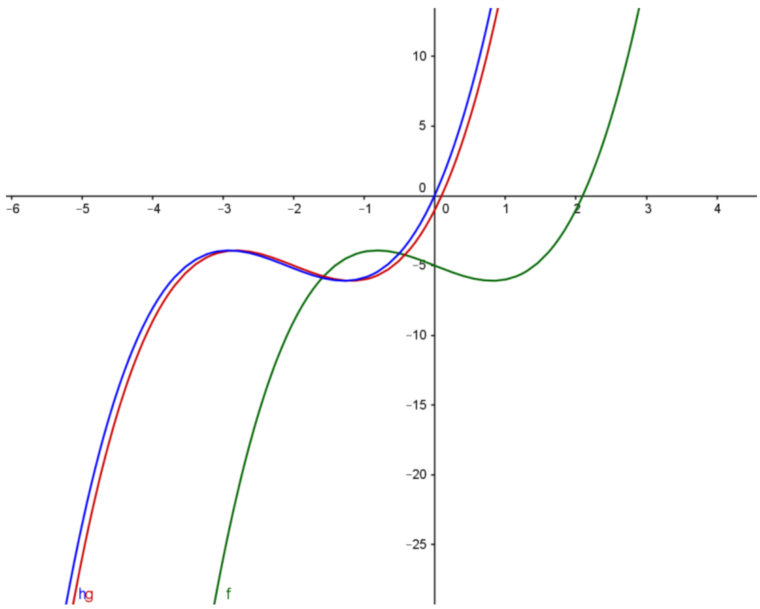
- *Etapa 3*: Se lleva a cabo un procedimiento análogo al de las etapas anteriores, reemplazando q por -0.0054+r, concluyendo que r ≅ -0.00004854.
- *Etapa 4*: Viendo que el último valor obtenido es lo suficientemente pequeño, se procede a calcular la raíz sumando lo hallado en cada etapa. De esta manera se concluye que la raíz es 2.09455147.

Es factible preguntarse ¿en qué se parece este método a lo que se conoce hoy como el método de Newton? A primera vista muy poco, podemos decir es que se trata de un método recursivo como el de Newton pero, sacando eso, parece muy diferente.

Una explicación desde lo geométrico

Con el objetivo de entender por qué funciona el método descrito se nos ocurrió[4] graficar los polinomios que se van obteniendo al ir realizando los sucesivos reemplazos.

En el siguiente gráfico llamamos "f" a la función polinómica $f(x) = x^3 - 2x - 5$ (color verde), "g" a la función $g(x) = x^3 + 6p^2 + 10p - 1$ (color rojo) y "h" a la función $h(x) = x^3 + 6{,}3x^2 + 11{,}23x + 0{,}061$ (color azul). Observando el gráfico parece haber una traslación hacia la izquierda de la gráfica de f que corta al eje x cada vez más cerca del origen de coordenadas.

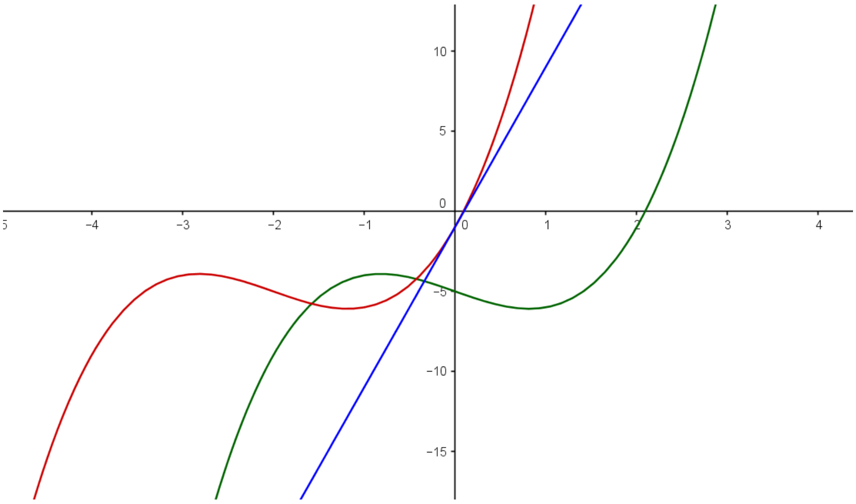


Como suele suceder cuando se usan distintos registros, al preguntarnos por qué sucede esto, se puede notar que al reemplazar x por p+2 en la expresión polinómica inicial se está cambiando la función $f(x)$ por la función $g(x) = f(x + 2)$ que rápidamente se asocia al desplazamiento de la curva dos unidades hacia la izquierda.

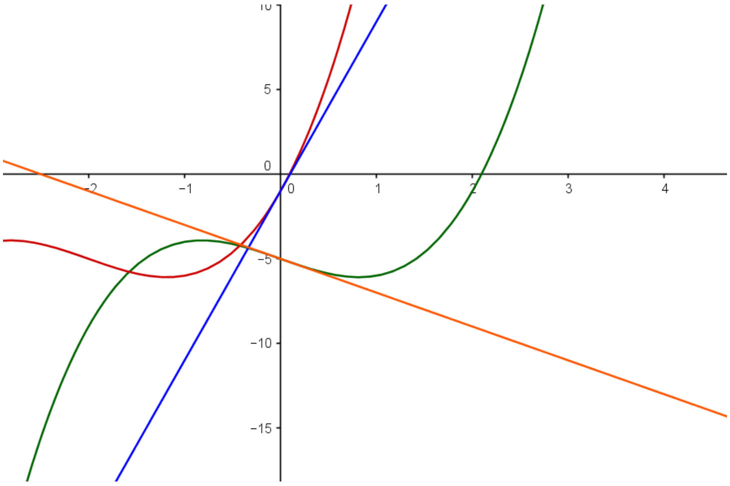
Cuando se reemplaza p=q+0,1; se toma el 0,1 de la ecuación -1+10p=0 donde el primer miembro de la ecuación está formado por el término independiente y lineal de la función

[4] Una vez realizado el gráfico, y al analizarlo, nos dimos cuenta de varias cuestiones a las que se podría haber llegado por otros caminos pero nos parece interesante respetar el proceso que fuimos realizando.

polinómica g(x), pero, ¿por qué se toma ese 0,1? ¿Por qué sirve el número solución de esa ecuación?
Si se agrega a los gráficos anteriores la recta de ecuación $y = -1 + 10x$ no se nota si la recta es o no tangente a la curva y en caso de ser tangente no se ve en qué punto.



Siguiendo con la exploración nos preguntamos ¿por qué tomó el término lineal e independiente de la ecuación que se obtiene de reemplazar x por p+2 y no se tomaron los dos términos de la ecuación original? Si se considerara la ecuación original nos queda la siguiente recta tangente:



La recta “parece” tangente a la curva del polinomio original en el punto donde la misma corta al eje y. Al realizar este último gráfico nos dimos cuenta que Newton no toma el término lineal e independiente del polinomio original porque la recta tangente a su representación gráfica, en el punto donde corta al eje y, corta “muy lejos” al eje x de donde lo hace la curva del polinomio.
A partir del análisis de estas representaciones notamos que la primer versión del método de Newton se puede interpretar geométricamente como la traslación horizontal del polinomio original hasta que corte al eje x en un punto cercano al origen de coordenadas, la obtención de un punto cercano al lugar donde este nuevo polinomio corta al eje x hallando el punto donde la recta tangente a este, corta al eje x. Este proceso se realiza reiteradas veces.
Similitudes y diferencias entre el método que inventó Newton (M-N) y la versión actual de dicho método (M-N-R):

- En el M-N-R se tiene en cuenta la pendiente de la recta tangente a la función polinómica (hoy en día cualquier función derivable) que define la ecuación mediante la derivada del polinomio mientras que en el M-N se traslada el polinomio y se calcula la recta tangente a este nuevo polinomio tomando el término lineal e independiente de este último.
- En el M-N-R con cada iteración se obtiene una nueva aproximación de la raíz buscada mientras que en el M-N el cálculo de la raíz se obtiene recién al final del proceso sumando a la primer aproximación esos valores cada vez más pequeños que se fueron obteniendo.
- En los dos métodos está presente la idea de linealizar la función.
- En M-N-R se puede trabajar con funciones no polinómicas mientras que en el (M-N) sólo se puede trabajar con funciones polinómicas.

Un párrafo del artículo nos hizo pensar en la necesidad de estudiar más profundamente el método de Viete, que es anterior al de Newton, y que en el artículo sólo dice lo siguiente:

> *Wallis does not praise Newton's method over the older; he merely states that it "is very different from that of Vieta, Oughtred, and Harriot, which is commonly received." The words "very different" are in marked contrast to the statements of the modern historians, H. Hankel and M. Cantor, who make Vieta's method of approximation appear as almost identical with the procedure given by Newton. The two are not the same. The essential difference lies in the divisors used in finding the successive approximations. If r is the approximation already reached, then Newton uses a divisor which in our modern notation takes the form $f'(x)$; Vieta's divisor may be expressed in the form $|f(r+s_1)-f(r)|-s_1^n$, where $f(x)$ is the left side of the equation $f(x)=k$, n the degree of the equation; and s_1 is a unit of the denomination of the digit next to be found.*

Con el objeto de tener más información del contexto en el que Newton desarrolló su método y analizar si, conceptualmente, el Método de Viete es un antecedente del de Newton es que ampliamos la búsqueda bibliográfica y encontramos TJALLING J.(1995) que estudia con más detalle el método de Viete.

Este artículo menciona que Newton estaba familiarizado con el trabajo de Francois Viete, que realizó notas extensivas de las mismas y que estas notas constituyen un primer signo del interés de Newton en la solución numérica de las ecuaciones no lineales:

> *By late 1664, soon after his interest had been drawn to mathematics, Isaac Newton was acquainted with the work of the French algebraist Francois Viete (1540-1603) (often latinized to "Vieta"). Viete's work concerning the numerical solution of nonlinear algebraic equations, De numerosa potestatum, published in Paris in 1600, ……*
>
> *Newton had access to both Schooten's collection and the third Latin edition of Oughtred's book, published in Oxford in 1652, and made extensive notes from them. These notes constitute a first sign of Newton's interest in in the numerical solution of nonlinear equations.*

Luego el artículo realiza una descripción detallada del método de Viete quien limitó su atención a ecuaciones de polinomios mónicos. En notación moderna las ecuaciones de Viete se describen en la forma:

$$p(x)=N$$

Sintetizando la explicación del artículo podemos decir que, si x_i es una aproximación, $x_{i+1}=x_i+a_{i+1}10^{k-(i+1)}$ es una nueva aproximación y la técnica de Viete equivale a calcular a_{i+1} como la parte entera de

$$\frac{N - .5\left(p\left(x_i + 10^{k-i-1}\right) + p(x_i)\right)}{p(x_i + 10^{k-i-1}) - p(x_i) - 10^{(k-i-1)n}}$$

Luego menciona que el método de Viete es casi equivalente a:

$$x_{i+1} = x_i - 10^{k-i-1}\left[\frac{f(x_i)}{f(x_i + 10^{k-i-1}) - f(x_i)}\right]$$

Que si se observa es similar al método de la secante (se verá más adelante que dicho método también es ideado por Newton) donde el incremento utilizado para el cálculo siempre es una potencia de 10.

También se encuentra en el artículo la transcripción que hace Newton de la solución de Viete de la ecuación $x^3 + 30x = 14356197$.

The analysis of Cubick Equations.

The equation supposed $Lc * + 30L = 14356197$. $Lc + CqL = Pc$.

The square coëfficient		3	0	
The cube affected to be	14	356	197	(243
Sollids to be substracted	8			$=Ac$
		6	0	$=ACq$
Theire sum̃e	8	006	0	
Rests	6	350	197	for finding y^e 2^d side.
The extraction of y^e seacond side				
Coëfficient			30	or superior divisor.
The rest of y^e cube to be	6	350	197	resolved
The inferior divisors	1	2		$3Aq$
		6		
Their sum̃e	1	260	30	
Sollids to be subtracted	4	8		$=3AqE$
		96		$=3AEq$
		64		$=Ec$
		1	20	$=ECq$
Their sum̃e	5	825	20	
[The extraction of y^e 3^d side]				
The superior part of y^e divisor			30	or y^e square coefficient
The remainder for finding		524	997	y^e third side
The inferior part of y^e divisor		172	8	$3Aq$ that is $3 \times 24 \times 24$
			72	$3A$ or 3×24
The sum̃e of y^e divisors		173	550	
Sollids to be taken away		518	4	$3AqE$
		6	48	$3AEq$
			27	Ec
			90	Ecq
Theire sum̃e		524	997	
Remaines		000	000	

Esta tabla es muy interesante porque se nota que, además de un proceso numérico que busca acercarse a la raíz, tiene en cuenta los recursos de cálculo de la época para poder operar.

Hoy podríamos describir el método de Viete como un método similar al de la secante (posterior al de Viete) pero que tiene en cuenta el control sobre los dígitos que se van obteniendo más que la distancia a la raíz.

Luego, el artículo expone el método de la secante ideado por Newton donde los cocientes incrementales que se utilizan para ir aproximándose a la raíz dejan de estar atados a las potencias de 10 y la aproximación ya no se obtiene por dígitos sino por distancias a la raíz cada vez más pequeñas. Saber que el método de la secante fue ideado por el mismo Newton, aunque no tenga su nombre, da la idea de una continuidad histórica entre el método de la secante que podríamos decir más numérico y el de Newton más cerca del análisis. Paradójicamente, en muchos textos utilizados actualmente para la enseñanza del CN[5], el Método de la Secante (también llamado Método de Regula Falsi, Posición Falsa o Regla Falsa) es tratado o bien como una variante del Método de N-R, o bien como un método independiente a éste. Sin embargo, el Método de la Secante no sólo es un predecesor del de N-R, sino que fue formulado por él como una versión posterior y mejorada del Método de Vieta.

Más adelante en el artículo, se desarrolla el método de Newton realizando un análisis del método ya descrito en el trabajo que analizamos al principio, método que difiere considerablemente de lo que hoy conocemos como el método de Newton.

El artículo comenta que Newton, en *"De análysi per aequationes numero terminorum infinta"* presenta esta primer versión del método antes de presentar las derivadas fluxionales (en este mismo trabajo) sugiriendo que lo pensó como un método algebraico y que no existe una clara evidencia de que en ese momento él interpretará esta técnica particular como una aplicación del cálculo, es decir del análisis matemático.

> *"No calculus is used in the presentation, and references to fluxional derivatives first appear later in that tract, suggesting that Newton regarded this as a purely algebraic procedure. … , but there is no clear evidence that at that time he perceived this particular technique as an application of the calculus or derived it using the techniques of calculus."* (Tjalling, 1995).

También hace mención a algo que notamos nosotros en el análisis del método presentado por Newton y lo que hoy se conoce como método de Newton. Se observa que el cálculo de la raíz se hace al final del proceso en lugar de aproximaciones sucesivas de la raíz. Si bien es un conocimiento que se puede deducir del análisis actual del método de Newton, es muy interesante como esto queda resaltado en la historia del método y pensamos que es un aporte que puede ser aprovechado para discutir hoy día en la enseñanza.

En esta ponencia no analizamos los aportes de Raphson al M-N-R quien extendió el método a funciones no polinómicas. No obstante creemos que, al igual que en el desarrollo histórico, con los alumnos conviene comenzar el estudio del M-N-R usando funciones polinómicas.

CONCLUSIONES

Iniciamos el estudio con la premisa que el surgimiento del CN no se veía reflejado en las presentaciones teóricas actuales, que al principio, antes que las distintas áreas de la Matemática tomaran caminos separados, la operatoria numérica prevalecía frente a otras técnicas que ahora podríamos distinguir como propias del AM. También pensábamos que las herramientas del AM fueron desarrolladas sin relacionarse demasiado con los procesos numéricos de cálculos y que, una vez que estas herramientas estuvieron debidamente aceptadas, se las incluyeron en los métodos de aproximación para formalizarlos de alguna manera y asegurar la validez de los mismos.

La investigación realizada, en cierto aspecto, confirmó ampliamente nuestra hipótesis de partida. Es decir, que el CN se originó sin las complejas herramientas del AM con las que cuenta en la actualidad, Sin embargo, este estudio nos permitió reformularnos ciertas aristas

[5] Por ejemplo (BURDEN, 2002) Y (PACE, 1997)

de nuestras hipótesis. Por ejemplo, el análisis no tuvo un desarrollo independiente del CN, ni se introdujo en el cuerpo teórico de éste para formalizarlo, sino que ambos procesos surgen en un entramado de procedimientos y razonamientos más identificados con lo algebraico y lo numérico. La necesidad de optimizar procedimientos, depurarlos y asegurar su validez, dieron pie a desarrollos en el AM que en sus principios, tal como sucede con las fluxiones, era muy distinto a lo que conocemos hoy en día.

En este trabajo hemos recorrido a través de la historia del M-N-R, estudiando sus predecesores y las primeras formulaciones realizadas por el mismo Newton. En dicho camino se pudo dilucidar que los primeros aportes sobre la resolución de ecuaciones (Método de Viete, Método de la Secante, Primera Formulación del Método de Newton) distan mucho de la manera en la que los métodos son presentados en la actualidad.

Al estudiar en profundidad el surgimiento del M-N-R, se observa que en sus orígenes el fundamento y la operatoria estaban muy ligados a los cálculos y los recursos de la época. Se trabajaba sólo en la resolución de ecuaciones polinómicas, por lo que las herramientas primordiales de cálculo eran los desarrollos de las potencias de binomios, mostrando que estos métodos usaban técnicas propias del Álgebra y no del AM como hoy en día. Esto hace replantearnos la manera en la que se enseñan los métodos numéricos de resolución de ecuaciones, ya que, en general, éstos vienen impregnados de constructos teóricos muy elaborados provenientes del AM y aceptados tan naturalmente que la génesis de los mismos queda relegada a lo meramente anecdótico. Este estudio deja de manifiesto algunos aspectos importantes a tener en cuenta y trabajar, a la hora de plantearnos la enseñanza de resolución numérica de ecuaciones. Entre ellos, la posibilidad de abordar primero ecuaciones polinómicas y aproximar soluciones de las mismas recurriendo a manipulaciones algebraicas e interpretaciones geométricas como un paso previo a la búsqueda de soluciones de cualquier tipo de ecuaciones que requieren métodos más generales que provienen del AM.

En esta búsqueda de consideraciones a tener en cuenta para la enseñanza del CN surgen algunas diferencias entre la evolución histórica de los métodos y la presentación actual de los mismos, que pensamos tienen una fuerte incidencia en la visión que los estudiantes van formándose de la Matemática, en general. Un claro ejemplo de esto es el hecho que en muchos textos utilizados actualmente para la enseñanza del CN, el Método de la Secante es tratado o bien como una variante del M-N-R, o bien como un método independiente a éste. Sin embargo, como se explicó en esta ponencia, el Método de la Secante no sólo es un predecesor del de N-R, sino que fue formulado por el mismo Newton como una versión posterior y mejorada del, entonces vigente, Método de Viete.

REFERENCIAS

- BERGÉ, A. y SESSA, C. (2003): *“Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes para una investigación didáctica”,* RELIME, vol 6, n°3.
- BURDEN, R. y FAIRES J. (2002): *Análisis Numérico*. México. Thomson Learning.
- CAJORI, F. (1911): *Historical Note on the Newton-Raphson Method of Approximation.* The American Mathematical Monthly, Vol 18, No. 2, pp.29-32. Mathematical Association of America Stable.
- FERRANTE, J. (2009): *Una introducción al concepto de límite (Dos mil años en un renglón).* Guía de estudio. Análisis matemático I, edUTecNe – editorial de la U. T. N.
- PACE, G. (1997): *Métodos Numéricos.* Corrientes, EUDENE.
- SADOVSKY, P. (2005): *Enseñar Matemática Hoy – Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Libros del Zorzal.
- TJALLING J. YPMA (1995): *“Historical development of the Newton-Raphson method”.* SIAM Review, Vol. 37, No.4, pp. 531-551.