CB27

DIÁLOGO ENTRE DOS PRÁCTICAS QUE LOGRÓ TENSIONAR LOS OBJETOS: FUNCIÓN-ECUACIÓN EN UN ESPACIO DE REFLEXIÓN SOBRE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DOCENTE

Silvia Catalina Etchegaray [1], Julia Edith Corrales [2], Karina Nahuin[3] & Lía Vazquez[4]
Alumnas: Luciana Sara ENRIQUE[5], Melani HERRERA[6]

Universidad Nacional de la Patagonia Austral-Unidad Académica Caleta Olivia [1-6]
setchegaray@exa.unrc.edu.ar[1], julia_corrales@hotmail.com[2], knahuin@uaco.unpa.edu.ar[3], lia_vqz@hotmail.com[4], melaniherrera_77@hotmail.com[5], lucianaenrique@gmail.com[6]

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación: Relatos de experiencias de enseñanza o capacitación. Educación Superior. Educación Matemática en la formación de Profesores.

Palabras Claves: formación Inicial, dialéctica, sistemas de prácticas, función, ecuación

RESUMEN

La finalidad de esta comunicación es compartir un diálogo que se “vivió” en un espacio de formación inicial docente denominado “Espacio de Construcción y Reflexión sobre el Conocimiento Matemático II”, del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de la Patagonia Austral-Unidad Académica Caleta Olivia, entre dos sistemas de prácticas matemáticas que surgen a partir de la resolución de una situación de modelización extra-matemática. El objetivo fundamental es relatar las reflexiones vividas en el seno del mencionado espacio de formación, hacer ostensibles los significados personales y colectivos que surgieron en la resolución y las tensiones que emergieron al interpelar el modelo a partir de una dialéctica institucional-personal entre los objetos función-ecuación.

INTRODUCCIÓN

Los estudios sobre los significados personales de los alumnos del profesorado generado en el aula de matemática, en tanto espacio de producción y reflexión colectiva, son necesarios para entender la configuración de conocimiento didáctico-matemático en el futuro profesor. La inclusión en la formación inicial de los profesores en matemáticas de un trabajo matemático reflexivo sobre los sistemas de prácticas que desarrollan los propios alumnos del profesorado, permite promover un posicionamiento ante los saberes a enseñar –en los futuros docentes- que puede modificar la mirada actual sobre la matemática escolar.

Por lo antes expuesto es que pretendemos compartir el diálogo entre dos diferentes sistemas de prácticas que como estudiantes del profesorado en matemática que participan del proyecto de investigación, hemos vivido en este espacio de la Optativa II cuando se trabajó sobre una tarea de modelización mediado por la gestión de las docentes.

Consideramos que esta dialéctica es la que permitió una genuina construcción o reconstrucción de relaciones matemáticas referidas al objeto Función-ecuación puestas a funcionar por quienes debimos enfrentarnos a la tarea.

En diálogo en el espacio del proyecto compartido con las docentes deliberamos acerca que no basta sólo confrontar los sistemas de prácticas resultantes sino además se debe pensar en cómo poder poner en interacción éstos últimos de manera tal que se puedan construir nuevos objetos matemáticos (definiciones, propiedades, técnicas, tensiones entre distintos objetos) o dar una nueva significación a otros ya existentes. Esta metodología se valida además en el propio seno del grupo de investigación donde, similarmente a lo que sucede en el aula de las optativas se promueve un diálogo de prácticas matemáticas en diferentes contextos.

DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO Y LA METODOLOGÍA DEL ESPACIO DE LAS OPTATIVAS

Diseño de las optativas

Estos espacios denominados Espacio de construcción y reflexión sobre el conocimiento matemático I y II pueden cursarse desde segundo año del plan de formación, espacios en el cual se revisa la matemática que conocen, se la interroga y se la analiza para pensar una matemática a enseñar, además se reflexiona sobre las prácticas personales puestas en acción para resolver situaciones seleccionadas por el equipo de la cátedra y que han sido estudiadas y analizadas con anterioridad, siempre con la firme convicción de que el poder atravesar, durante la formación inicial estos espacios, predispone a los estudiantes –futuros profesores- de una manera diferente frente al conocimiento que luego deberán enseñar. Es decir, el poder participar como constructores de relaciones matemáticas y no como meros reproductores de ellas posiciona a tales estudiantes, con una mirada más flexible y fluida al pensar en las situaciones con las que abordarán determinado conocimiento en sus futuras prácticas docentes.

Se anticipa con las tareas seleccionadas gestionar distintos sistemas de prácticas operativas y discursivas ante un cierto tipo de situaciones-problemas basándose en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática, tomando como base el nuevo constructo teórico que dicha teoría postula de **significados institucionales** y **significados personales** de los objetos matemáticos, que se encuentran mediatizados por un lenguaje común.

El docente es quien mediará la práctica discursiva para analizar las prácticas operativas intentando utilizar un mismo lenguaje en el análisis de las posibles disfunciones y dificultades de los alumnos que participan. Esto se pondrá hará visible en la exposición del estudio realizado por las alumnas cuando a posteriori de lo vivido en el aula analizan el diálogo entre ambos sistemas de prácticas desplegados a propósito de una situación de modelización, en un contexto geométrico, extraída del libro “Modelización Matemática en el Aula-Posibilidades y necesidades” (Segal, S., Giuliani, D., 2008), como alumnas pretendemos a partir de los sistemas de prácticas y las bitácoras de las clases atrapar y socializar un modo de dar significado a un proceso de modelización y reflexionar sobre los conflictos semióticos que emergieron al interpelar el modelo a partir de una dialéctica institucional-personal entre los objetos función-ecuación.

DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DIDÁCTICO

Fases del proceso didáctico

Podemos caracterizar distintas fases que se intentan respetar en cada encuentro, pensando que estas fases se integran de manera complementarias durante toda la actividad matemática que no son etapas sucesivas en el estudio de los campos de problemas pero sí ideales en relación a que deben vivenciarse durante el desarrollo de los encuentros.

Podríamos pensar en una **fase exploratoria** de los problemas en forma individual por los alumnos, que da lugar al trabajo de las técnicas al cual uno podría llamar **fase de la técnica o técnicas** pertinentes para el estudio de la situación problema planteada. Y una tercera **fase teórica** que consiste en la descripción, justificación e interpretación de las distintas técnicas matemáticas desplegadas y forman parte de una práctica discursiva que hace emerger y anclar las situaciones con la teoría asociada al campo de problemas presentado, esta fase es la que pertenece a un proceso metacognitivo a la hora de poder dar razones desde una búsqueda e integración teórica.

Prácticas significativas

Utilizando la noción de práctica desplegada por la teoría de Godino es que pensamos generar y focalizarnos en lo que se denominan prácticas significativas; práctica personal que tiene sentido, para los alumnos, si la misma desempeña una función para la consecución del objetivo que se propone la resolución de un campo de problemas, cuyo proceso debe pretender resolver la situación para comunicar a otros las decisiones tomadas para arribar a la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas, esto también se corresponde con la noción de (Vergnaud, 1990) "organización invariante de la conducta para una misma clase de situaciones dadas" (p.136)

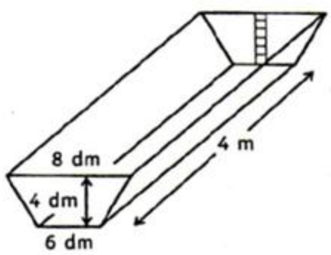
Este conjunto de prácticas significativas compartidas en estos espacios institucionales conforman los sistema de prácticas institucionales, que serán un insumo desde el análisis didáctico a la hora de describir las prácticas operativas y discursivas que se generan para un mismo campo de problemas con los distintos grupos de la cursada de las Optativas I y II.

La propuesta de trabajo es abordada desde dos objetivos específicos en estos espacios:

- Vivir el "hacer matemático" como una experiencia creativa y reflexiva que está inserto en un proyecto de estudio, centrado en la reconstrucción de Teoría matemática desde y a través de la resolución de problemas.
- Estudiar los sistemas de prácticas operativas y discursivas que inter-juegan ante las situaciones-problemas que, se presentan para poder analizar los distintos modos de acoplamiento que se producen en una clase entre los significados personales e institucionales.

Estudio y puesta en diálogo de las prácticas desde la reflexión de las alumnas

La situación que le fue presentada al grupo fue la siguiente: "En el campo, algunos bebederos para animales tienen una forma como la que se esquematiza en el dibujo. (Ver imagen) Se trata de un prisma recto de 4m de largo, y dos de sus caras son trapecios isósceles congruentes de base menor 6 dm, base mayor 8dm y altura 4dm. Se necesita graduar una varilla colocada en forma vertical sobre uno de los trapecios para precisar el nivel de agua correspondiente a 100, 200, 300…litros. ¿Cómo decidir dónde deben ir las marcas?



A partir de la resolución, se generan las siguientes prácticas de resolución:

PRACTICA 1	PRACTICA 2
Calculo del volumen total del bebedero. Para calcularlo se descompone el trapecio como un rectángulo y se calcula el área del mismo por la profundidad del prisma. $VT = 4dm * 7dm * 4m = 1120dm^3$	Cálculo del área del trapecio: $A = \frac{(B+b).h}{2}$ $B = base\ mayor,$ $b = base\ menor$ $h = altura$ $A = \frac{(8dm + 6dm).4dm}{2}$ $A = 28dm^2$ Volumen del prisma (bebedero) $V = A.L$ $A = área, L = largo$ $V = 28dm^2.40dm$ $V = 1120dm^3$ Como $1dm^3$ es equivalente a 1litro entonces tenemos que el volumen máximo es de 1120 litros.
División del prisma trapezoidal en 3 partes, un prisma rectangular y dos prismas triangulares.	Tomar la cara del bebedero como un todo y la profundidad considerarla como una constante.
Cálculo de los volúmenes de los tres cuerpos geométricos: $V_1 + V_2 = Vol.total\ del\ prisma\ trap.$ $V_1 = 40\ dm * x\ dm * 6dm = 240\ x\ dm^3$ $V_2 = 40\ dm * \frac{1}{4}x^2 dm = 10x^2 dm^3$ $V_1 + V_2 = 240x\ dm^3 + 10x^2\ dm^3$ Cambiando de unidades: $y = 240x\ l + 10x^2\ l$ Donde y será la cantidad de agua del bebedero y x la distancia de la marca. La fórmula se consigue luego de incorporar conceptos de trigonometría plana.	Procedimiento de construcción de la fórmula para resolver el problema: $\frac{\left(6 + (6 + 2h´\tan(arctan\frac{1}{4}\right).h'.40dm}{2} = Cant.litros$ Donde h es la altura que determina la cantidad de agua en el bebedero. Cálculo dónde iría la marca a los 100 litros: Fijo Fijo $\frac{(6dm + B').h'.40dm}{2} = 100dm^3$ $(6dm + B').h' = 5$ 1° Con geometría euclidiana, se obtuvo la relación : $B' = 6 + 2a$ 2° Los ángulos entre paralelas cortada por una transversal son congruentes: $a = \tan(\arctan\frac{1}{4}).h'$ 3° Reemplazo 3° en 2°: $B' = 6 + 2.h´.\tan(\arctan\frac{1}{4})$ Luego 4 en 1: $\left[6 + \left(6 + 2h'\tan\left(arctan\frac{1}{4}\right)\right)\right].h' = 5$ Con la corrección de la Prof. Silvia sobre la carpeta surge la simplificación en la ecuación dela tangente con el arcotangente; entonces: $\frac{1}{2}h'^2 + 12h' - k.5 = 0$ $k \epsilon \mathbb{N}$ $1 \leq k \leq 11$

<table>
<tr>
<td>Para determinar las marcas en la varilla, se le asigna el valor a la cantidad de agua (y) y se construye una ecuación.
Luego se aplica la técnica de Baskara para determinar el lugar de la cada marca a los 100 l, 200 l, 300 l, etc. El contexto determina el descarte de valores que no dan respuesta al problema.</td>
<td>Para determinar las marcas en la varilla se fueron construyendo distintas ecuaciones donde el valor variable dependía de la cantidad de marcas.
$1 \leq K \leq 11$
Estas ecuaciones fueron resueltas aplicando la técnica de Baskara y el contexto (graduación de la varilla) nos ayuda a determinar qué valores debemos tomar y cuales descartar para dar respuesta al problema.</td>
</tr>
<tr>
<td>Se construye la tabla de valores; a partir de la resolución de 11 ecuaciones de segundo grado.
<table>
<tr><th>MEDIDA</th><th>CANTIDAD DE AGUA (En litros)</th><th>DISTANCIA DE LA MARCACIÓN (En dm)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>100</td><td>0,40</td></tr>
<tr><td>2</td><td>200</td><td>0,80</td></tr>
<tr><td>3</td><td>300</td><td>1,19</td></tr>
<tr><td>4</td><td>400</td><td>1,5646</td></tr>
<tr><td>5</td><td>500</td><td>1,928</td></tr>
<tr><td>6</td><td>600</td><td>2,28</td></tr>
<tr><td>7</td><td>700</td><td>2,628</td></tr>
<tr><td>8</td><td>800</td><td>2.96662</td></tr>
<tr><td>9</td><td>900</td><td>3,297</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1000</td><td>3,620</td></tr>
<tr><td>11</td><td>1100</td><td>3,937</td></tr>
</table>
</td>
<td>Se construye la tabla de valores; a partir de la resolución de 11 ecuaciones de segundo grado.
<table>
<tr><th>Cantidad de Litros</th><th>Marca de la varilla</th></tr>
<tr><td>100 litros</td><td>0.409…</td></tr>
<tr><td>200 litros</td><td>0.806…</td></tr>
<tr><td>300 litros</td><td>1.190…</td></tr>
<tr><td>400 litros</td><td>1.564…</td></tr>
<tr><td>500 litros</td><td>1.928…</td></tr>
<tr><td>600 litros</td><td>2.282…</td></tr>
<tr><td>700 litros</td><td>2.628…</td></tr>
<tr><td>800 litros</td><td>2.966...</td></tr>
<tr><td>900 litros</td><td>3.297…</td></tr>
<tr><td>1000 litros</td><td>3.620…</td></tr>
<tr><td>1100 litros</td><td>3.937…</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Se construyó una función cuadrática. Asociando la carga de un bebedero con agua como una actividad continua y dinámica.
De la misma manera se plantea la necesidad de cuestionar si en un contexto real el procedimiento de cargar el bebedero para marcar la varilla sería factible. A partir de las preguntas realizadas por las docentes, se acuerda que es necesaria la función inversa, de la obtenida en un primer momento, para darle respuesta a la práctica real de cargar el bebedero</td>
<td>La indicación de las marcas en la varilla, genera acciones como la de construir Ecuaciones, que me determinaran puntos en un preciso instante, como un punto estático.</td>
</tr>
<tr>
<td>Es así que se decide calcular la función inversa:
$$\sqrt{\frac{x+1440}{10}}-12 = y$$</td>
<td>Otra forma de resolver el problema es con la incorporación del Teorema de Thales, que te define una “nueva” fórmula para implementar.
$$V(x) = 10x^2 + 240x$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Darle validez a la función inversa a través de la composición de funciones:</td>
<td>Luego de obtenida la ecuación principal, se busca</td>
</tr>
</table>

$fog = f\big(g(x)\big)$ $f = 240\,x + 10\,x^2$ $g = \sqrt{\frac{x+1440}{10}} - 12$ $fog = 240\left(\sqrt{\frac{x+1440}{10}} - 12\right) + 10\left(\sqrt{\frac{x+1440}{10}} - 12\right)^2$ $= 240\sqrt{\frac{x+1440}{10}} - 240 * 12 + 10\,\frac{x+1440}{10} - 10 * 24\frac{x+1440}{10} + 1440$ $= 240\sqrt{\frac{x+1440}{10}} - 2880 + x + 1440 - 240\sqrt{\frac{x+1440}{10}} + 1440$ $= 240\cancel{\sqrt{\frac{x+1440}{10}}} - 2880 + x + \cancel{1440} - 240\sqrt{\frac{x+1440}{10}} + 1440$ $fog = -2880 + x + 2880$ $fog = x$	construir una expresión que indique la marca en función del volumen. Por recomendación de la docente se lo realiza utilizando la técnica de Baskara. $\frac{-12+\sqrt{12^2-4.\frac{1}{2}.(-5k)}}{2.\frac{1}{2}} = x_{1,}\,x_2$ Por lo tanto la inversa será: $-12 + \sqrt{144 + 10k} = x_{1,}\,x_2$ Con $k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq k \leq 11$

Decisiones tomadas durante los procedimientos:

Lo que pudimos debatir mientras estaba planteando el problema:

- Ubicación de la varilla, sobre la cara en forma de trapecio, ¿Sería perpendicular a la base o sobre la cara lateral de bebedero (inclinada)? Quedó determinado que debía estar apoyada sobre la cara del trapecio.
- Se descartó la posibilidad de que las marcas estarían ubicadas a una misma distancia cada 100 litros de agua.
- Se acordó una unidad de medida (dm) para que le resulte cómodo trabajar con los litros de agua que se ingresan en el bebedero, ya que dm^3es equivalente a l (litros).

¿Qué conocimientos matemáticos emergen?

- El concepto de función. Función Inversa.
- Relación entre Ecuación y función.
- Comportamiento de las curvas.
- Figuras geométricas, cuerpos. Volumen, Capacidad.

REFLEXIONES FINALES

Luego de analizar ambas prácticas de resolución y debatir sobre los puntos que se presentaron al resolver el problema llegamos a las siguientes conclusiones:

- El cálculo del volumen total del bebedero se utiliza como un registro de control.
- La construcción de la fórmula a partir de indagar sobre la figura del trapecio permitió que se encuentren dos maneras diferentes de abordar el problema.
- Para ambos procedimientos fue claro que buscaban el ancho de la línea superior de agua en función de la altura, y así poder calcular el volumen de agua, ya que la profundidad es una constante.

  ¿Qué es lo que permanece en cada procedimiento? La búsqueda de un valor en función de otro, exige una relación funcional.
- La aplicación de las técnicas para abordar el problema nos otorgó una función cuadrática, a partir de la cual se armarían las distintas ecuaciones que darían respuesta al problema.
- Al responder sobre la graduación de la varilla, se generaron ecuaciones de segundo grado que se resolvieron a través de la aplicación de la técnica de Baskara y se tomaron las decisiones de descartar valores que, según el contexto, no daban respuesta al problema.
- Se observó el modelo cuadrático en ambos procedimientos. Las ecuaciones construidas son equivalentes ya que poseen el mismo conjunto solución.
- Relación Función-Ecuación. Responder la pregunta del problema (ubicar las marcas en la varilla), implicó transformar la función en una ecuación que dio como resultado un “punto fijo” de la función. En este caso, el contexto determina qué valor tendrá la variable dependiente, que es la que, luego de resolver la ecuación de segundo grado, determina el resultado de la variable independiente (valor de x).

  En este caso, la función fue una herramienta en donde el procedimiento de resolución hizo que se transformara en distintas ecuaciones cuadráticas que determinaban la distancia en la que se encontraba la “marca” de la varilla en función de la cantidad de agua que tenía el bebedero. La acción fue graduar la varilla.
- Es un problema de contexto extramatemático, que genera en la acción el llenado de un bebedero, la interpretación de la fórmula (función-ecuación) construida hace pensar a la inversa de dicha función es la respuesta a esta situación de la vida cotidiana.
- ¿Cuál sería la herramienta con la cual se “abre” el desarrollo de los temas o la posibilidad de distintos sistemas de prácticas?

  La forma que tiene el bebedero es quien “dispara” las prácticas de resolución. Se nota más en los ejercicios de la tarea, donde las distintas caras de los recipientes generan una gráfica particular.

  La función que representa al volumen de un prisma será de la forma:

  $ax^2 + bx$ Si la cara del prisma es un trapecio,
  ax Si la cara del prisma es un rectángulo,
  ax^2 Si la cara del prisma es un triángulo.

  Por supuesto, para que la manera de identificarlo sea “consciente” el alumno debe entender que lo que estamos analizando, es una situación dinámica. Que cada marca en la varilla es un “momento” de la carga de agua y que según la forma del bebedero las marcas estarán más cerca o más lejos entre sí, o a una distancia igual (constante) y esto lo logrará siendo parte de este proceso de construcción del modelo como respuesta a la situación.

REFERENCIAS

- Aké, L., Godino, J. D., & Gonzato, M. (2013). Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria. UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 33, 39-52.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.
- Etchegaray, S (2010) "Reflexiones y aportes para repensar la enseñanza de la Matemática" en la sección: Aportes y reflexiones para el aula de la Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral. Facultad de Humanidades y Ciencias. “YUPANA”. Pág., 11-26. Nº5.10.
- Godino. J (2009) Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.
- Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005), “Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal”, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 25(2), pp. 151-186.