CB26

UN RECURSO MULTIMEDIAL PARA ABORDAR ALGUNOS ASPECTOS DE LA FUNCIÓN RACIONAL

María Cecilia Papini, Carolina Bruni & María Daniela Sanabria

Facultad de Cs. Exactas – UNICEN
Paraje Arroyo Seco - Campus Universitario
Tandil – Buenos Aires
mcpapini@exa.unicen.edu.ar, carolinabruni22@gmail.com, danielasanabria@gmail.com

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación:
Propuesta Didáctica, Nivel Secundario

Palabras clave: materiales multimediales, recurso didáctico, enseñanza de la matemática, ingreso a la universidad

RESUMEN

Este trabajo intenta comunicar algunos aspectos de un camino de búsqueda alrededor de la elaboración de materiales multimediales. Se trata de materiales que se proponen ofrecer a los estudiantes, de los últimos años de la escuela secundaria o el ingreso a la universidad, una oportunidad de aprender, repasar o profundizar sus conocimientos matemáticos alrededor de algunos bloques de contenidos que forman parte del currículo de la escuela secundaria.

En particular, presentamos y analizamos un recurso didáctico que se ofrece en el contexto del Programa de Ingreso a la Facultad de Ciencias Exactas (PIEXA) de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Es un material de trabajo para el área de Matemática que aborda el contenido “función racional”, con acceso libre y disponible en el espacio del PIEXA de la plataforma Moodle de esta facultad.

INTRODUCCIÓN

El recurso didáctico, que compartimos en esta comunicación, se presenta en el contexto del Programa de Ingreso a la Facultad de Ciencias Exactas (PIEXA) de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Se trata de un material de trabajo para el área de Matemática cuyo acceso es libre y se encuentra disponible en el espacio del PIEXA de la plataforma Moodle de esta facultad.

Este programa de ingreso se desarrolla durante todo el año y ofrece alternativas de cursos con distintas modalidades: virtual, presencial y semipresencial. Abarca a alumnos en muy distintas situaciones: alumnos que cursan el último año de secundaria o que ya la aprobaron, que viven en Tandil o a distancias que no les posibilitan realizar actividades presenciales. También es variada la disponibilidad que tienen los estudiantes de conocimientos matemáticos que son contenidos de enseñanza de la escuela secundaria.

Como equipo de docentes de este programa, tenemos el propósito de producir materiales que se adapten y sean propicios para el trabajo matemático en las diferentes modalidades de los

cursos, para la diversidad de alumnos que incluyen y, fundamentalmente, buscamos que respondan a ciertas ideas que asumimos respecto de la enseñanza de la matemática.
Por lo tanto, la producción de recursos nos exige reflexionar y tomar decisiones sobre distintos aspectos, nos embarcamos en una búsqueda que intenta responder a preguntas tales como:
¿Qué tipo de tareas pretendemos que el alumno despliegue? ¿Con qué objetivos? ¿Qué contenidos matemáticos se jugarían en esos despliegues?
¿Qué herramientas, matemáticas o de otro tipo, involucrarían esas actividades? ¿con qué condiciones?
¿Qué recorridos habilitan las secuencias de actividades? ¿Cuáles nos interesa propiciar?
¿Qué esperamos que los alumnos hagan con estas secuencias? ¿Qué dificultades se les pueden presentar?
¿Qué ventajas y desventajas tiene la plataforma Moodle como soporte de estas actividades? y, en este caso, ¿qué oportunidades introduce la herramienta wiki del Moodle?
En consecuencia, este trabajo intenta comunicar algunos aspectos de este camino de búsqueda alrededor de la elaboración de materiales multimediales que se proponen ofrecer a los estudiantes de los últimos años de la escuela secundaria o ingreso a la universidad, una oportunidad de aprender, repasar o profundizar sus conocimientos matemáticos alrededor de algunos bloques de contenidos que forman parte del currículo de la escuela secundaria.

EL ESPACIO DE MATEMÁTICA EN EL PIEXA

Como dijimos en la introducción, en esta comunicación describimos un recurso didáctico que produjimos para el espacio de Matemática que es una parte importante de este programa de ingreso.
Los objetivos de este espacio, incluidos en las definiciones del programa, son los siguientes:

- Repasar y profundizar los conocimientos matemáticos de los futuros ingresantes, teniendo en cuenta los contenidos mínimos necesarios para la comprensión de las materias de primer año de las distintas carreras que se dictan en la Facultad.
- Aportar a la adquisición de una metodología de estudio y trabajo que favorezca a la inserción del alumno en el ámbito universitario.
- Desarrollar competencias para seleccionar, organizar, relacionar, jerarquizar, sistematizar y transferir información, a fin de incorporar herramientas que mejoren las tareas de estudio.

En los ítems que siguen describimos brevemente los contenidos matemáticos y los materiales de trabajo, algunas características del espacio virtual del programa, nuestra posición respecto de la enseñanza de la matemática y nuestras intenciones respecto del material multimedial que presentamos.

Los contenidos matemáticos y los materiales de trabajo

Realizamos una selección y reorganización de contenidos matemáticos que tiene en cuenta el tiempo de trabajo del que disponemos en los cursos, el Diseño Curricular para la Escuela Secundaria de la Provincia de Buenos Aires y la articulación con los contenidos de los programas de las materias de primer año Análisis I y Álgebra I. También consideramos especialmente la experiencia docente en los últimos años de la escuela secundaria de algunos de los integrantes del PIEXA a la hora de determinar este recorte de contenidos.

Esta selección y organización de los contenidos es para nosotros un tema de análisis y revisión permanente. Implica una tensión entre el tiempo escaso de nuestros cursos, la dificultad propia de la tarea de aprender matemática, la heterogeneidad en los resultados de la escuela secundaria y las necesidades de primer año de la facultad, respecto de estos conocimientos. Por un lado, durante tiempos cortos revisamos, profundizamos y buscamos nuevas relaciones entre contenidos que fueron trabajados de muy diversas maneras durante seis años de la escuela secundaria. Por otro lado, también somos conscientes de la dimensión y la dificultad de los programas de contenidos de las materias de primer año de la facultad. Abordamos también esta problemática desde distintos ejes: la organización y posible ampliación del tiempo, la coordinación con materias de primer año, el acercamiento con los alumnos de sexto año y sus profesores de matemática.

Utilizamos variados materiales de trabajo para los cursos: módulos teórico-práctico producidos por profesores de nuestra facultad de años anteriores, materiales complementarios más centrados en la práctica, aplicaciones de GeoGebra con condiciones que permitan explorar el comportamiento de algunas funciones, resoluciones de ejercicios en forma de imágenes o de videos cortos explicativos, producidos por nuestro grupo. Todos los materiales se incluyen en la plataforma PIEXA y su acceso es libre y gratuito (http://moodle.exa.unicen.edu.ar/course/view.php?id=17).

En este contexto elaboramos materiales que integran recursos tecnológicos y pretenden potenciar la interacción virtual a partir de actividades presentadas en la plataforma Moodle, de esta manera extendemos el tiempo el trabajo compartido con los alumnos, posibilitamos que cada uno lo adapte a sus disponibilidades de tiempo personal y fundamentalmente les ofrecemos la oportunidad de aprender a partir de una relación personal con los materiales. Sostenemos que es central esta relación que se juega entre lo personal y lo colectivo en la interacción con los materiales de estudio. Intentamos promover el avance en el aprendizaje que respeta las necesidades y decisiones personales, que aportan a la autonomía en los aprendizajes, a su vez potenciados por el trabajo colectivo planteado en los cursos.

El espacio virtual del PIEXA en la plataforma Moodle

El programa tiene como principal soporte la plataforma MOODLE instalada en los servidores de la facultad de Cs. Exactas de la UNICEN.

Elaboramos un espacio para el ingreso en esta plataforma y buscamos adecuarlo progresivamente a las necesidades del programa y sus distintas modalidades.

La plataforma incluye secciones generales (últimas noticias, cronogramas, etc.) y otras específicas para cada una de las materias: Matemática, Resolución de problemas con computadora e Introducción a la vida universitaria. Los espacios de cada materia contienen los módulos y materiales complementarios, modelos de parciales y finales, actividades sugeridas, autoevaluaciones, foros, comentarios y recordatorios.

Este espacio virtual (la plataforma del PIEXA) va cobrando una importancia diferente a partir de constituirse en una herramienta de comunicación con los alumnos durante los cursos. La vinculación con este tipo de espacios de estudio es nueva y dificultosa para muchos alumnos y la teoría de la mediación instrumental, la diferenciación entre artefacto e instrumento (Rabardel, 2001) nos resulta interesante para pensar en estos procesos. El instrumento es la conjunción del artefacto y las habilidades cognitivas necesarias para construirlo. La génesis instrumental (Trouche, 2004), proceso de transformación de un artefacto en un instrumento, ocurre en dos direcciones, por un lado, las características del software influencian las estrategias de resolución y las concepciones del estudiante (proceso de instrumentación). Por otro lado, el proceso de instrumentalización, dirigido del estudiante al software, lleva a una

internalización del uso del artefacto. De esta manera, un mismo artefacto puede ser instrumentalizado de diferentes formas según el alumno y el problema propuesto.
Durante los cursos intentamos colaborar con este uso instrumental de la plataforma, o con este proceso progresivo de instrumentalización. Por ejemplo, proponemos actividades en los encuentros presenciales que impulsan a publicar en ella, invitamos a utilizarla a través de tareas concretas como la participación en el foro, la resolución de autoevaluaciones, subir a la plataforma ejercicios resueltos para compartir.
La autonomía para la organización de etapas de estudio cuando el estudiante tiene por delante todo el programa y un período de tiempo relativamente prolongado, es un aprendizaje que consideramos importante. En la escuela estas etapas están organizadas y decididas por los docentes, a modo de transición proponemos entonces un modelo intermedio: colaboramos con los estudiantes en el planteo de etapas con tiempos asignados que incluyan de a todo un bloque de contenidos por ejemplo, ellos deberán buscar su propia organización al interior de cada bloque.
Como dijimos este espacio se encuentra en construcción permanente y seguimos en la búsqueda de potenciar su uso de diferentes maneras.

¿Cómo pensamos las clases de matemática?
Nos proponemos una dinámica de trabajo que pretende ubicar a los estudiantes en una posición de acción. Pensamos las clases con tiempos dedicados a que resuelvan los ejercicios y problemas para que las dudas o preguntas surjan mayoritariamente de ellos mismos. Estos espacios pretenden "devolver" al alumno (en el sentido de Brousseau, 2007, 2015) la responsabilidad de enfrentar los problemas, de poner en juego sus conocimientos, de organizar esos conocimientos y transformarlos, de establecer relaciones nuevas y validarlas, como así también de identificar y de buscar lo que no saben. El rol de los docentes en estos espacios es el de proponer problemas para que los alumnos produzcan y acompañar la búsqueda con respuestas oportunas a las preguntas que surgen.
Esta dinámica implica una actitud de los docentes atenta a las necesidades del grupo y de cada alumno. Asumimos la responsabilidad de observar permanentemente la marcha del trabajo de los alumnos y en función de estas observaciones ofrecer orientaciones, ayudas, explicaciones y de diseñar materiales adaptados.
Introducimos las explicaciones teóricas en la clase de dos maneras diferentes. Por un lado, las fundamentaciones teóricas entran a la clase por el lado de las explicaciones y justificaciones que realizamos individual o colectivamente a propósito de algún problema o ejercicio estratégicamente elegido por el docente con este objetivo. Por otro lado, pedimos a los alumnos la lectura e interpretación de textos teóricos para luego compartir esas interpretaciones en forma colectiva: establecer ideas centrales, explicar las dudas, poner en relación las definiciones, notaciones y demostraciones como herramientas tecnológico-teóricas que justifican las tareas (tomamos la idea de praxeología de Chevallard *et al*, 1997, 2005).
De esta manera, pretendemos impulsar una relación de interacción entre docentes y alumnos, en la que se privilegia la construcción de relaciones matemáticas propias, a cargo del grupo y de cada alumno, y el docente ofrece explicaciones en momentos apropiados, es decir, cuando esas explicaciones tienen oportunidad de relacionarse con preguntas o ideas de los estudiantes.
La actividad de modelización matemática tiene, también en este contexto, un valor especial: es una oportunidad para aprender "con sentido". Modelizar implica identificar variables, datos y relaciones en un problema matemático o extramatemático; producir hipótesis, construir un modelo y probarlo. También requiere enfrentarse a problemas y matematizarlos; usar los

conocimientos matemáticos como herramientas para contestar preguntas del sistema matematizado, para luego poder objetivar y estudiar esos conocimientos matemáticos que antes emergieron como herramientas (Douady, 1984, Chevallard *et al*, 1997). Podemos pensar la modelización como una oportunidad para que los alumnos tengan una experiencia de producción de conocimientos, en el marco de un cierto dominio matemático, que permite enriquecer conceptualmente a quien la transita (Sadovsky, 2005).

¿Qué intenciones perseguimos al elaborar el material que presentamos?

Como mencionamos antes el PIEXA se desarrolla durante todo el año con distintas modalidades e incluye a alumnos en diferentes situaciones. También este programa pretende involucrar a los docentes de secundaria que en muchos casos acompañan a sus alumnos en este proceso de ingreso a la universidad.

En este contexto y a la hora de diseñar este material para los estudiantes, al que denominamos "wiki de funciones racionales", planteamos algunas directrices como las que esbozamos a continuación.

Se trata de un material que pretende

- abarcar algunos conceptos alrededor de la función racional partiendo de la función de proporcionalidad inversa, complejizando con la función homográfica para luego dar lugar a otras funciones racionales más complejas
- incluir problemas y ejercicios en contextos matemáticos y extramatemáticos que permitan acercarse a una mirada de la matemática como herramienta de modelización
- favorecer el uso de distintos marcos o registros de representación, buscar la articulación de resoluciones aritméticas, algebraicas y gráficas
- posibilitar la producción e interpretación de elementos teóricos bajo la forma de definiciones en lenguaje natural y simbólico
- incluir recursos multimediales que favorezcan los ítems anteriores, por ejemplo aplicaciones de GeoGebra que permitan interpretaciones de gráficos de coordenadas cartesianas, videos cortos que colaboren con la interpretación de algunas conclusiones teóricas.

¿Qué esperamos ofrecer a los alumnos que interactúen con esta wiki?

En principio pretendemos ofrecerles la oportunidad de asumir un rol protagónico en la actividad matemática que desarrollen. Esperamos que resuelvan los problemas, que comparen sus soluciones con otras, que produzcan sus propias hipótesis y conclusiones y luego las contrasten.

También pretendemos que decidan el recorrido que quieren o necesitan realizar a través del material. Por ejemplo, pueden saltear toda la primera parte (de función de proporcionalidad inversa) y dirigirse a otra si consideran que no necesitan repasarla. O al contrario, empezar por las últimas páginas de la wiki, encontrar contenidos que no conocen o no comprenden e ir a buscarlos en hojas anteriores. Sostenemos que estas posibilidades, de decidir caminos distintos en el material, pueden aportar a la autonomía en cuanto a las decisiones sobre sus propios aprendizajes o sus propias maneras de aprender y también pretenden incluir a un grupo heterogéneo de alumnos en cuanto a los conocimientos que disponen respecto de estas temáticas alrededor de función racional.

LA WIKI DE FUNCIONES RACIONALES: ALGUNOS EJEMPLOS Y JUSTIFICACIONES

A continuación esbozamos descripciones y análisis de algunos de los problemas de las secuencias que incluimos en el material multimedial que denominamos “wiki de funciones racionales”.

El primer problema

Se desea envasar 120 litros de aceite en botellas de igual capacidad. La cantidad de botellas que se necesitarán depende de la capacidad de cada botella. Completar la siguiente tabla:

Capacidad de cada botella (l)	Cantidad total de botellas	Total de litros de aceite
1	120	
2		
3		
5		
½		
3/2		

a) Encontrar una expresión que represente la cantidad total de botellas en función de la capacidad de las mismas.

b) Mostrar cómo varía la cantidad de botellas en función de la capacidad de cada una en un gráfico de coordenadas cartesianas.

Figura 1. Primer problema para introducir el estudio de una relación inversamente proporcional.

Este problema introductorio se propone focalizar el estudio de una relación entre dos variables inversamente proporcionales, contextualizada en un problema extramatemático. Se trata del caso más simple de una función racional, generalmente conocida por los alumnos.
Para empezar proponemos completar una tabla de valores a partir de los datos del problema. Decidimos incluir la tabla en el enunciado y con ella las variables del problema, también elegimos ofrecer una colección de valores para la capacidad de las botellas intentando favorecer la posibilidad de determinar cómo se comporta la función. Los últimos dos valores fraccionarios de la columna pretenden ubicar este tipo de números como posibles valores de capacidad de las botellas y también pretenden desafiar el orden de los valores de las dos variables e invitar a cuestionar o contrastar hipótesis sobre el comportamiento de la función si es que ya las han logrado. Por ejemplo es posible que estén pensando que si aumenta el valor de la capacidad disminuye la cantidad de botellas, que al doble de capacidad le corresponde la mitad en cantidad de botellas y recíprocamente, a la mitad de capacidad el doble.
Añadimos además la columna “cantidad total de litros” como un elemento de control de los cálculos y una posibilidad de interpretación de uno de los sentidos de la constante de proporcionalidad, en este caso el que se adapta al contexto del problema.
Pedimos la producción de una expresión algebraica y una gráfica de coordenadas cartesianas para establecer relaciones entre estos dos registros de representación y el registro numérico que se involucra para completar la tabla. Además estas representaciones permitirán discusiones sobre el dominio y la imagen de esta función, en el contexto dado.
A continuación, y secuenciada con el problema anterior, proponemos una tarea en la que incluimos dos tablas resueltas diferentes, una correcta y otra no. Son dos los objetivos de esta tarea: por un lado mostramos la manera de completar la tabla a aquel estudiante que no sabe cómo hacerlo y, por otro, pretendemos promover una discusión alrededor de una idea que encontramos muchas veces en las soluciones de los estudiantes, que consideran a todas las relaciones como directamente proporcionales.

Para comparar con tu tabla

Te proponemos dos tablas. ¿Alguna de ellas es correcta?¿o ninguna de las dos? Explicanos tu respuesta

Resolución A:

Capacidad de botella	Cantidad de botella	Total de litros
1	120	120
2	240	480
3	360	1080
5	600	3000
1/2	60	30
3/2	180	270

Resolución B:

capacidad de botellas	cantidad de botellas	Total de litros
1	120	120
2	60	120
3	40	120
5	24	120
1/2	240	120
3/2	80	120

Te ofrecemos una solución para que compares **Resolución Problema 1**

Figura 2. Una tarea que propone comparar soluciones al primer problema.

La inclusión de una resolución del problema a través de un link tiene el objetivo de invitar al alumno a decidir en qué momento recurrir a esta resolución, es decir, nuestra intención es que construya su propia solución y luego la contraste con la que ofrecemos pero le devolvemos esa responsabilidad de decidir.

La solución que ofrecemos es la siguiente:

Resolución Problema 1

Para completar la tabla, sólo basta con dividir el total de litros de aceite por la capacidad de cada botella que vamos a utilizar para envasar. Así la tabla quedaría de la siguiente manera:

Capacidad de Cada Botella (en litros)	Cantidad de Botellas	Total de litros de aceite
1	120	120
2	60	120
3	40	120
5	24	120
1/2	240	120
1,5	80	120

Podemos concluir entonces, que para calcular la cantidad de botellas que vamos a envasar, dependiendo de la capacidad de cada botella, podemos utilizar la fórmula: $f(x)=\frac{120}{x}$; *donde x representa la capacidad de cada botella*

Explorá esta gráfica en Geogebra y compará con la que vos construiste.

Figura 3. La resolución del problema 1.

Como mostramos en la imagen la resolución incluye la tabla completa, una expresión algebraica para la función y una aplicación de GeoGebra.

La integración del GeoGebra para explorar

Proponemos esta aplicación con dos intenciones: por un lado pretendemos que comiencen a familiarizarse con este software aquellos que aún no lo han usado y, por otro, queremos que lo utilicen como herramienta para explorar el gráfico de la función y obtengan (o recuerden) otros conocimientos que pueden ponerse en juego con esta interacción.

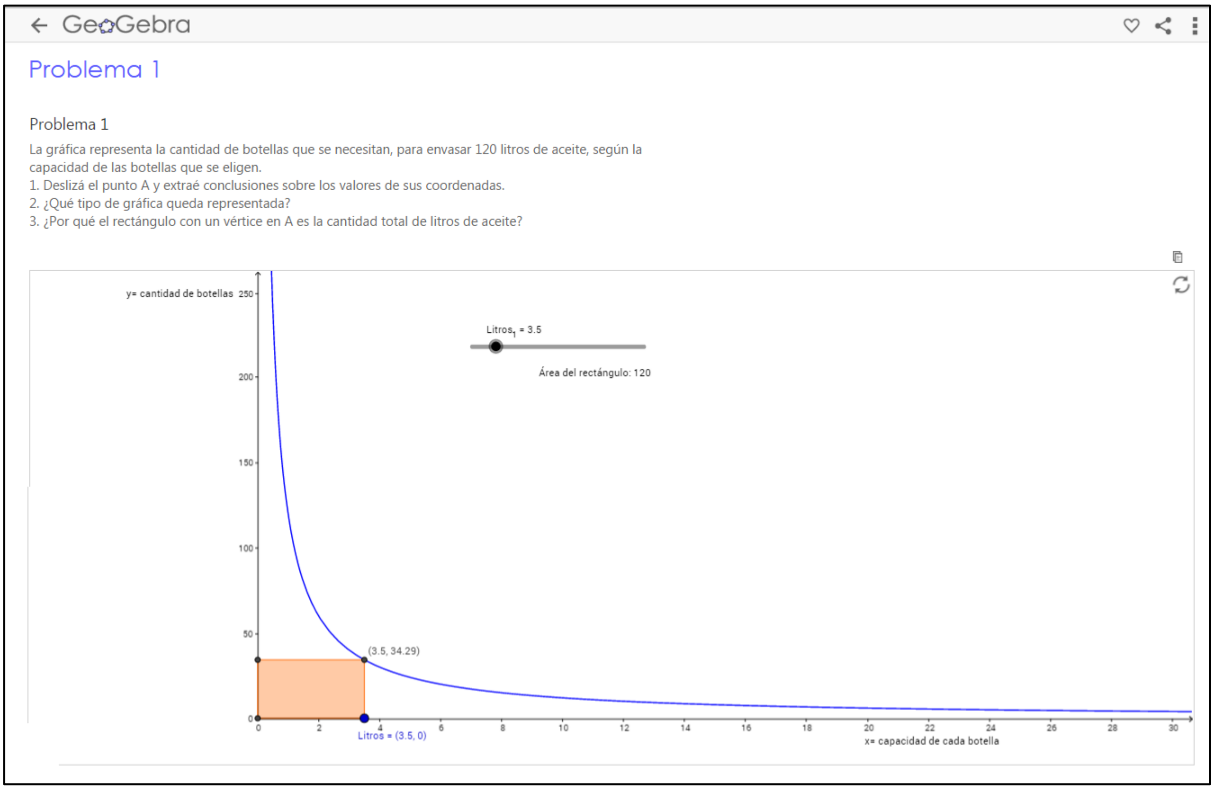

Figura 4. Una vista de la aplicación de GeoGebra para explorar la gráfica de la relación.

Por ejemplo:

- Puede permitir que reconozcan la forma de la curva, una rama de una hipérbola.
- Al deslizar el punto A van cambiando los valores de sus coordenadas y es posible contextualizar esos valores en el problema teniendo en cuenta que se trata de la variación de la cantidad de botellas en relación con capacidad de cada una. Esto permite considerar que algunos de esos valores no tienen sentido en el contexto del problema e iniciar una reflexión acerca del dominio de esta función en este contexto.
- Interpretar el rectángulo con un vértice en A también es interesante porque aporta otros sentidos para la constante de proporcionalidad. Implica reconocer que las medidas del rectángulo son las coordenadas del punto A, que su producto da la medida del área de ese rectángulo y que ese valor es justamente la cantidad total de litros de aceite o la constante de proporcionalidad de la relación porque cada uno de esos valores se obtiene dividiendo 120 por el otro. Es decir, cada punto de la curva es una "muestra" o una "concretización" de la relación que está en juego y esta es una de las ideas más difíciles de lograr en cuanto a la comprensión de las relaciones funcionales.

Luego que el alumno analice las tablas e interactúe con la aplicación de GeoGebra, podrá volver a la página en donde se encontraba y retomar el estudio.

Producir conclusiones y recontextualizarlas

A modo de conclusión, una vez analizada la resolución y la gráfica, presentamos la definición de la relación inversamente proporcional y una representación simbólica. Pretendemos trabajar la necesidad de acordar ciertas conclusiones sobre las ideas exploradas alrededor del problema y ciertos modos de expresarlas, incluyendo algunos elementos del lenguaje simbólico propio de la matemática.

Definición y conclusiones

Dos variables (una independiente ***x*** y una dependiente ***y***) son inversamente proporcionales si el producto de los valores respectivos de cada una de ellas es una constante diferente de cero

$$x \cdot y = k$$

Esta relación de proporcionalidad inversa, se puede representar mediante una función de la forma:

$$y = \frac{k}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{k}{x}$$

Figura 5. Planteo de algunas conclusiones teóricas sobre el problema 1.

Para ampliar y profundizar la interpretación de estas conclusiones proponemos a continuación dos ítems:

Ejercicios

1. ¿Cómo se relaciona esta definición (Las letras, las expresiones algebraicas) con el problema de las botellas? Explicar brevemente estas relaciones.
2. Si el producto entre las variables es una constante distinta de cero, ¿qué valores pueden tomar dichas variables?

Figura 6. Ejercicios para recontextualizar y ampliar la interpretación de las conclusiones.

El primer punto busca una recontextualización de este texto descontextualizado, una vuelta desde esta expresión hacia los sentidos que el estudiante pudo producir en el recorrido con el problema. El segundo punto, pretende ampliar la definición analizando las condiciones de validez a las dos variables, esto aporta a las nociones de dominio e imagen de la función (se oculta la respuesta bajo una ***i*** para aportar a las formas de escritura simbólicas), también impulsa a una nueva descontextualización permitiendo salirse del contexto extramatemático y situarse en uno matemático. Los ítems 3 y 4 proponen nuevas exploraciones descontextualizadas, amplían al estudio de expresiones de la forma $f(x) = \frac{k}{x}$, buscan caracterizar su gráfica, el dominio y la imagen, el comportamiento creciente o decreciente.

Para estudiar las asíntotas

Los últimos dos ítems de esta parte de la secuencia (ejercicios 5 y 6) pretenden estudiar el comportamiento asintótico de estas funciones y más precisamente las propias asíntotas.

También en estas actividades buscamos propiciar la interacción con herramientas multimediales, en este caso incluimos nuevamente una aplicación de GeoGebra y videos explicativos.

A continuación presentamos la actividad 5:

5. Responder las siguientes preguntas, basándose en la función $f(x) = \dfrac{2}{x}$

a. ¿Qué sucede si le asignás valores positivos a x cada vez más grandes? ¿y valores de x negativos cada vez más pequeños?

b. ¿Qué sucede si le asignás valores a x cada vez más cercanos a 0 "por la derecha" (por ejemplo 0,001) y "por la izquierda" (por ejemplo -0,001)?

Te invitamos a explorar con la siguiente aplicación:

Figura 7. Problemas para reflexionar sobre las asíntotas.

Como dijimos antes los incisos a y b de esta actividad tienen el objetivo de reflexionar alrededor de las nociones de asíntota horizontal y vertical, pero también se proponen un acercamiento al lenguaje del análisis matemático. Por ejemplo *"qué sucede si la x toma valores cada vez más grandes"*, o si *"la x toma valores más cercanos a cero por derecha o por izquierda"*.

Es posible que los estudiantes resuelvan estos ítems de diferentes maneras: que realicen cálculos probando distintos valores a la x; que infieran que si el divisor es más grande en valor absoluto el valor del cociente se hace cada vez más pequeño o se acerca a cero pero no puede tomar valor cero, o que si los valores de la x se acercan a cero los de la y crecen. También es posible que utilicen la aplicación de GeoGebra que ofrecemos, mostramos una vista abajo.

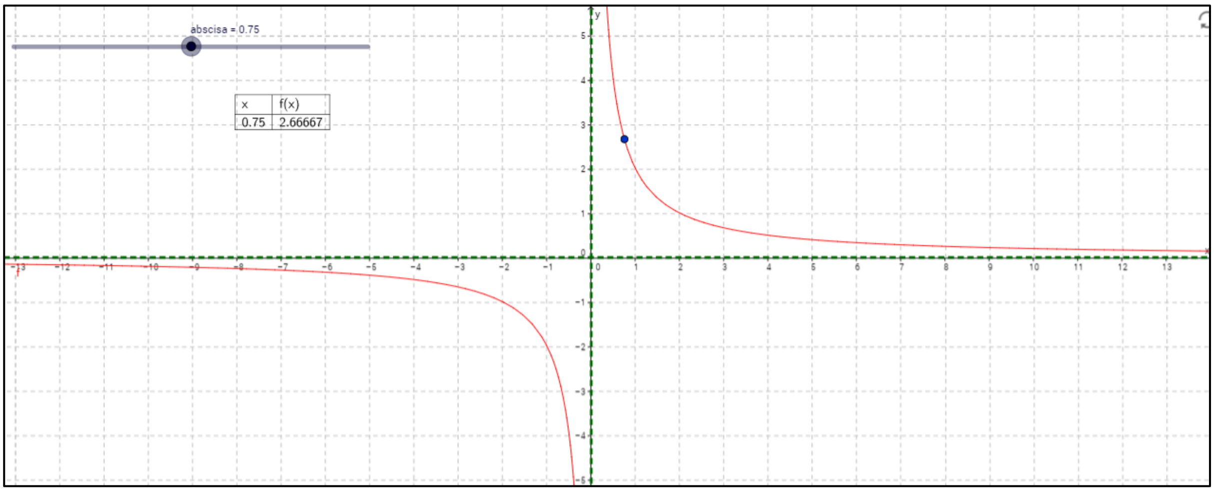

Figura 8. Una vista de la gráfica en aplicación de GeoGebra.

En esta aplicación también habilitamos, como en anteriores, que se deslice un punto sobre la curva reflejando el cambio en sus coordenadas cartesianas en un cuadrito ubicado a la izquierda. Este movimiento permite explorar qué pasa con los valores de la y cuando la coordenada x crece en valor absoluto o cuando se acerca a cero y permite también contrastar la observación con los cálculos o las hipótesis mencionadas. También en este caso es interesante discutir qué ocurre cuando el punto desaparece de la imagen por la derecha o

izquierda, y en el caso en que x toma el valor cero. Tomamos, como dicen Sessa y otros (2014), las limitaciones del programa como oportunidades para invitar al estudiante a poner en juego nuevas relaciones.
Como mencionamos antes esperamos que los alumnos obtengan sus propias conclusiones como actividad propia del trabajo matemático que pretendemos que desplieguen. Por eso, a continuación les proponemos el ejercicio 6 para que escriban y las analicen esas ideas. También les ofrecemos una ayuda, mediante videos cortos, para que las controlen y amplíen.
Finalmente dejamos escrito un recuadro teórico sobre el contenido en cuestión.

6. A partir de los ejercicios anteriores, elaborá conclusiones sobre el comportamiento de la función estudiada.

A partir de las conclusiones establecidas, podemos definir:

Las asíntotas son rectas a las cuales la función se aproxima.

Una recta vertical $x = a$ se llama asíntota vertical de la función $f(x)$ si $a \notin Dom(f)$ y a medida que x toma valores cada vez más cercanos a a, $|f(x)|$ toma valores cada vez mayores.

Una recta horizontal $y = b$ se llama asíntota horizontal de la función $f(x)$ si a medida que $|x|$ aumenta, $f(x)$ se acerca a b.

Figura 9. Ejercicio 6, link video explicativo y conclusiones escritas.

Luego dejamos un enlace para invitar a la siguiente etapa, la función homográfica es la que proponemos a continuación. Pero, como dijimos, una característica de esta wiki, es que permite al estudiante decidir realizar caminos distintos: pueden saltear o recorrer rápidamente la secuencia anterior y avanzar a la función homográfica propuesta a continuación, incluso pueden volver al índice y desde ahí dirigirse al tema que necesiten.

PALABRAS FINALES

Como dijimos, esta comunicación intenta mostrar algunos aspectos de un camino de búsqueda alrededor de la elaboración de materiales multimediales. Nos proponemos elaborar materiales que ofrezcan a los estudiantes oportunidades de repaso, aprendizaje o profundización de contenidos matemáticos de la escuela secundaria. Mostramos en este caso solo una parte de un material que se encuentra en elaboración.
Nos interesa en futuras exploraciones, estudiar el uso que es posible darle en manos de los estudiantes y también de sus profesores de escuela secundaria como de ingreso a la universidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BROUSSEAU G. 2007. Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Traducido por Dilma Fregona. Libros del Zorzal. Buenos Aires.

- BROUSSEAU G. 2015. Fundamentos y métodos de la Didáctica de la matemática. Serie B. Trabajos de Enseñanza. N°5/2015. Traducción realizada por Dilma Fregona sobre la versión publicada en 1993. Centro de Estudios Avanzados (CEA). Facultad de Matemática y Astronomía. Universidad Nacional de Córdoba.
- CHEVALLARD Y., BOSCH M., GASCÓN J. 1997. "*ESTUDIAR MATEMÁTICAS. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*". ICE - HORSORI. Universitat de Barcelona.
- CHEVALLARD Y. 2005. La didactique dans la cité avec les autres sciences. Symposium de Didactique Comparée. Montpellier. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr. Consultado el: 17 de agosto de 2015.
- DOUADY R. 1984. "Relación enseñanza-aprendizaje, Dialéctica Instrumento Objeto, Juego de marcos". *Cuaderno de Didáctica de la matemática Nro. 3*.-Univ. Paris 7. Francia.
- RABARDEL P. 2001. Instrument mediated activity in situations. In: Blandford, A., Vanderdonckt, J., Gray, P. (Eds.), *People and Computers XV—Interaction Without Frontiers,* Springer-Verlag.
- SADOVSKY P. 2005. *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Libros del Zorzal. Buenos Aires.
- TROUCHE L. 2004. Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. International Journal of Computers for Mathematical Learning.
- SESSA C., BORSANI V., CEDRÓN M., CICALA R., DI RICO E. y DUARTE B. 2014. La transformación del trabajo matemático en el aula del secundario a partir de la integración de las computadoras, en "Prácticas Pedagógicas y políticas educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense", Capítulo 2. La actividad docente mediada con tic. pp. 137-164. Buenos Aires.