CB18

LA MATEMÁTICA APLICADA EN CIENCIAS NATURALES. SITUACIONES PROBLEMÁTICAS QUE LA RESIGNIFIQUEN COMO HERRAMIENTA FUNDAMENTAL

Fabio Prieto, Matías Juárez, Silvia Martínez & Nydia Dal Bianco

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa
Uruguay 151, Santa Rosa, La Pampa, Argentina
prieto.fabio@gmail.com, matiasjuarez88@hotmail.com

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación:
Propuesta Didáctica, Educación Superior, Didáctica de la Matemática

Palabras claves: problemas, función exponencial, registros, cálculo

RESUMEN

En este trabajo se presenta una propuesta de situaciones problemáticas del campo de las Ciencias Naturales, donde es necesaria la aplicación de herramientas de la Matemática. Se propone abordar el contenido funciones, en particular la función exponencial, en los distintos ejes temáticos de la currícula de Matemática que se dicta en primer año para las carreras de Profesorado en Química y Ciencias Biológicas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa.

Se comienza caracterizando este tipo de funciones asociadas a fenómenos naturales y, siguiendo los fundamentos teóricos de Duval, se hace hincapié en la interacción entre diferentes registros de representación para lograr un aprendizaje significativo. Siendo la asignatura de régimen anual, en la segunda mitad del año, se planifica aplicar las herramientas del cálculo diferencial e integral al estudio de funciones exponenciales.

Incorporar algunos lineamientos de la enseñanza basada en resolución de problemas aplicados a fenómenos químicos y biológicos, tiene como objetivo resignificar el rol de los contenidos de la Matemática y desarrollar en los estudiantes ciertas habilidades como capacidad de argumentar, despertar el interés por la ciencia y razonamiento crítico.

INTRODUCCIÓN

Para los estudiantes universitarios de Química y Biología, Matemática es una asignatura del primer año de sus carreras, es así que los docentes tratan, y es conveniente mostrar desde un inicio, aplicaciones básicas y sencillas para responder a preguntas como “¿para qué nos sirve?”, “¿cuándo lo aplicamos?”, entre otras.

La experiencia de dictar las clases de esta disciplina en primer año, nos hace repensar la práctica docente, más aún cuando la deserción es importante por distintos motivos, en particular la ausencia de interés por no encontrarle sentido a la misma.

En algunas entrevistas realizadas a docentes de asignaturas de estas carreras sobre qué temas de Matemática consideran necesarios para desarrollar en sus respectivos espacios curriculares, mencionaron en general incrementar las actividades que involucren la operatoria

con números, expresiones algebraicas, funciones, como así también conceptos y temas del cálculo diferencial e integral.
Sobre la base de esta información, en esta propuesta abordaremos situaciones problemáticas significativas en las que sea necesaria la aplicación de objetos matemáticos, en respuesta a la solicitud de los docentes y estudiantes.

MARCO TEÓRICO

En el campo de la enseñanza de las Ciencias Naturales, uno de los objetivos es el de obtener modelos matemáticos que describan fenómenos y permitan comprender mejor la dependencia entre diferentes magnitudes.
El lenguaje tiene un papel muy importante en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, pues detrás del mismo, subyacen distintos objetos; en particular el concepto de función y en él, en forma implícita, aparecen otros, como variables, dependencia, transformación, dominio, imagen y paridad.
Las actividades matemáticas, según Duval, 1998, ocurren cuando realizamos trasformaciones sobre los registros de representación, estas representaciones externas, como enunciados en lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficos, entre otros, permiten a los individuos exteriorizar sus representaciones mentales y lograr que los objetos matemáticos se tornen accesibles. El éxito de la interacción entre los diferentes registros, es un indicador del logro del aprendizaje sobre objetos matemáticos en estudio.
Duval (1998) define las representaciones semióticas como producciones constituidas por el empleo de símbolos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significación y funcionamiento. Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

1. La formación de una representación en un registro dado.
2. El tratamiento de una representación, que es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna en un registro.
3. La conversión de una representación, que es la transformación de esta representación dentro de otro registro conservando la totalidad o una parte del contenido de la representación inicial.

En la actividad matemática es fundamental movilizar y coordinar varios registros de representación semiótica en una situación dada y seleccionar el registro más adecuado.
Duval llama semiosis a la aprehensión de las representaciones semióticas y noesis a la aprehensión conceptual. Afirma que no hay noesis sin semiosis, lo cual significa que no hay acceso al objeto matemático, sino a través de sus representaciones.
En relación al concepto de función se considera que las representaciones asociadas se pueden clasificar en cuatro grandes grupos: registro verbal, tabular, gráfico y algebraico. Cada uno de estos registros activa diferentes procesos cognitivos. La expresión algebraica se relaciona con la capacidad simbólica, la tabular se relaciona con el pensamiento numérico, la gráfica con las capacidades de visualización y se relaciona con el pensamiento geométrico, finalmente la expresión verbal se relaciona con la capacidad lingüística, fundamental tanto para interpretar y relacionar las otras representaciones como para desarrollar la capacidad de argumentación.
Cada una de estas representaciones pueden expresar un fenómeno de cambio, una dependencia entre variables como expresión de una función.
Aunque es deseable que los estudiantes interactúen entre las distintas representaciones, incluso dentro de un mismo registro, algunas de estas transformaciones se consideran más difíciles de llevar a cabo que otras (por ejemplo el paso de la representación gráfica a la algebraica), sin embargo en la actualidad el uso de software matemático como el GeoGebra

permite y facilita la interacción entre los diferentes registros de representación. Mediante el desarrollo de secuencias didácticas distintas a las tradicionales, propiciando un medio en el que el alumno pueda explorar, conjeturar, analizar, verificar ideas, así como desarrollar habilidades y estrategias que le servirán a la hora de resolver situaciones problemáticas.
Para facilitar el interés cognoscitivo de los estudiantes, pueden seleccionarse problemas que resulten significativos, de modo que muestren el porqué del funcionamiento de las cosas, y la necesidad de satisfacer condiciones dentro de una situación perteneciente a la aplicación práctica de conceptos y teorías.
En la resolución de problemas no solamente hacemos referencia a cálculos numéricos, lo importante es que haya algo que buscar o un enigma que aclarar dentro de un contexto bien planteado. Como requisito previo es importante enseñar el lenguaje o la nomenclatura usual en Matemática para poder efectuar los planteos en forma correcta. (García, 2003)

DESARROLLO

El desafío de la enseñanza de la Matemática para las carreras de Biología y Química, es vincularla con sus aplicaciones para darle significado, y no se convierta en una mera manipulación de símbolos sin sentido. Esta asignatura se dicta en primer año, es de régimen anual y los contenidos abarcan temas tales como conjuntos numéricos, expresiones algebraicas, funciones, ecuaciones, inecuaciones, matrices, vectores, como así también el cálculo diferencial e integral.
En este trabajo se propone presentar la función exponencial, la cual puede ser abordada en los distintos ejes temáticos de la currícula: en las primeras unidades se plantea trabajar con las representaciones tabulares y gráficas; luego formalizar utilizando el registro algebraico; y por último aplicar las herramientas del cálculo diferencial e integral para resolver problemas de mayor complejidad.
El objetivo es que el estudiante internalice este tipo de funciones, al mismo tiempo que identifique distintos fenómenos de las ciencias naturales que las mismas describen. Es por esto que se trabajará con problemas de aplicación tales como: Desintegración radiactiva, Crecimiento de un cultivo, Crecimiento bacteriano, Población, entre otros. Uno de los primeros problemas propuestos es el siguiente:

Problema 1: Desintegración radiactiva
El isótopo del Polonio ^{210}Po tiene una semivida aproximada de un período de 140 días, es decir, dada cualquier cantidad, la mitad de ella se desintegrará en 140 días. Si al principio hay 20 mg de $^{210}P_0$, completar la siguiente tabla con la cantidad de este isótopo que queda después de cierto tiempo y representar gráficamente.

Período	0	1	2	3	4
t (tiempo en días)	0				
Masa del isótopo restante	20				

La importancia de este problema es que, sin necesidad de trabajar con expresiones algebraicas, se pueden generar resultados y obtener predicciones. De esta forma se pretende que el estudiante tenga una primera aproximación al registro tabular y gráfico de una función exponencial. Mientras que la estructura en forma de tabla ayuda a organizar datos y mostrar la relación entre variables, los gráficos son un complemento importante para visualizar en forma global el comportamiento de las cantidades.

Período	0	1	2	3	4
t (tiempo en días)	0	140	280	420	560
Masa del isótopo restante	20	10	5	2.5	1.25

La gráfica de la función se visualiza con ayuda del software GeoGebra:

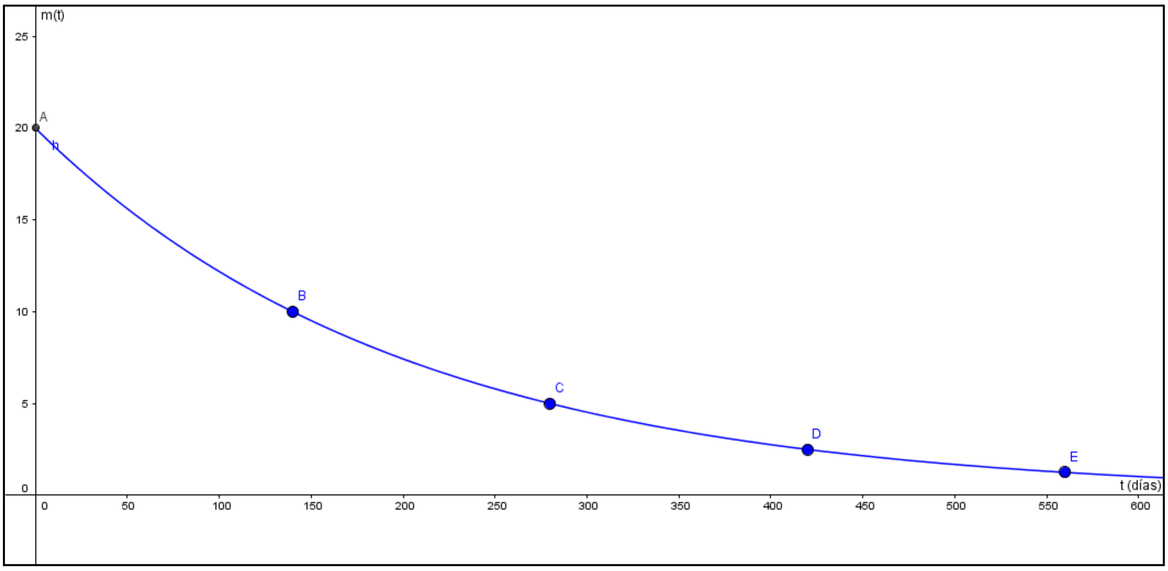

Gráfico Problema 1: Desintegración radiactiva

La propuesta debe continuar con la formalización en el registro algebraico del problema que corresponde a la función exponencial, como se muestra a continuación.

$Período\ n = 0 \qquad t = 0 \qquad m_0 = 20$

$Período\ n = 1 \qquad t = 140.1 = 140 \qquad m_1 = 20\,.\ \dfrac{1}{2} = 10$

$Período\ n = 2 \qquad t = 140.2 = 280 \qquad m_2 = 20\,.\ \dfrac{1}{2}\,.\ \dfrac{1}{2} = 20\,.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 5$

$Período\ n = 3 \qquad t = 140.3 = 420 \qquad m_3 = 20\,.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 .\dfrac{1}{2} = 20\,.\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = 2.5$

$Período\ n = 4 \qquad t = 140.4 = 560 \qquad m_4 = 20\,.\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 .\dfrac{1}{2} = 20\,.\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = 1.25$

Generalizando:

$Período\ n \qquad t = 140\,n \qquad m_n = 20\,.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Así se muestra al estudiante la expresión de la masa del isótopo restante luego de cada desintegración, que depende de la masa inicial del isótopo (20 mg) y de una potencia de base ½ (media desintegración) y exponente igual al período de tiempo *n*.

$$Como \quad n = \frac{t}{140} \qquad se\ puede\ expresar \qquad m_{(t)} = 20\,.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$$

Por ejemplo se puede verificar que luego de 420 días es decir t = 420 la masa se reduce a:
$m_{(420)} = 20\,.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{420}{140}} = 20\,.\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = 2.5$ mg

Luego de presentar un ejemplo de los tres registros de representación de una función exponencial en particular, se muestra que la forma general de éste tipo de funciones responde a la expresión:

$$f(x) = k\,.\,a^{x} \tag{1}$$

Siendo el parámetro *k* una constante real cualquiera, mientras que *a* debe ser mayor que cero.

Seguidamente, para que los estudiantes puedan aplicar esta función en situaciones similares se presenta otro problema:

Problema 2: Población de Moscas
Supóngase que una población experimental de moscas de la fruta aumenta de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Si hay cien moscas tras el segundo día de experimento y 400 tras el cuarto día

a) ¿Cuántas moscas había en la población original?
b) ¿Cuántos días deberán transcurrir para que la cantidad inicial se duplique?
c) ¿Cuántas moscas habrá 72 horas después del inicio del experimento?

En este tipo de problemas, es necesario primero que el alumno comprenda el significado explícito en el enunciado "…aumenta de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial", este dato es fundamental para poder encontrar la fórmula de la función exponencial la cual permitirá luego facilitar la tarea de cálculo. La expresión es hallada planteando un sistema de ecuaciones que surgen de reemplazar los datos del problema en la fórmula.

$$\begin{array}{l} (2{,}100) \rightarrow \\ (4{,}400) \rightarrow \end{array} \begin{cases} 100 = k\,.\,a^{2} \\ 400 = k\,.\,a^{4} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se hallan los valores de los parámetros *a* = 2 y *k* = 25
Obteniendo así la función exponencial: $f(x) = 25\,.\,2^{x}$

Se observa en estos problemas que las funciones exponenciales son de base ½ en el primero y 2 en el segundo, como consecuencia de fenómenos químicos y biológicos, que ocurren en la desintegración de sustancias radiactivas y en el crecimiento de ciertas poblaciones.
Una tercera base muy importante es el número *e*, que es la base de los logaritmos neperianos, introducida por el matemático John Napier (1550-1617). En biología es particularmente importante pues surge de la observación del crecimiento o decrecimiento de poblaciones de bacterias.
Las potencias de *e* son utilizadas en numerosos modelos matemáticos que se conocen como crecimientos o decrecimientos exponenciales. La función dependiente del tiempo t, de la

forma $f(t) = ke^{\alpha t}$, corresponde a un crecimiento exponencial y, $f(t) = ke^{-\alpha t}$ corresponde a un decrecimiento exponencial, siendo k una constante real cualquiera y α una constante positiva.

El siguiente problema es una aplicación a la química, de un decrecimiento exponencial:

Problema 3: Desintegración de elementos radiactivos
El Radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad presente según la ecuación $y = ke^{-\alpha t}$. Se ha comprobado además que en 1600 años desaparece la mitad de la cantidad inicial. Hallar:

a) La fórmula de la función que represente la desintegración del Radio como función del tiempo t.
b) La cantidad perdida al cabo de 100 años.

A continuación se muestra la resolución correspondiente:
Como el modelo de desintegración que representa el problema es $y = ke^{-\alpha t}$, se deben hallar los parámetros α y k.
Para t = 0 la cantidad inicial de Radio es $y_{(0)} = ke^{-\alpha 0} \rightarrow y_{(0)} = k$
Siendo que en 1600 años desaparece la mitad de la cantidad inicial, $y_{(1600)}$ será

$$y_{(1600)} = \frac{1}{2}y_{(0)} = \frac{1}{2}k \tag{2}$$

Considerando el modelo de decrecimiento exponencial, $y_{(1600)}$ se expresa:

$$y_{(1600)} = ke^{-1600\alpha} \tag{3}$$

Por igualación de (2) y (3)

$$\frac{1}{2}k = ke^{-1600\alpha} \tag{4}$$

Simplificando k

$$\frac{1}{2} = e^{-1600\alpha} \tag{5}$$

Aplicando logaritmo natural en la expresión anterior y la propiedad de la potenciación de los logaritmos

$$ln\frac{1}{2} = -1600\alpha.lne \tag{6}$$

Buscamos una expresión para α

$$\frac{ln\frac{1}{2}}{-1600} = \alpha \tag{7}$$

$$\frac{-1}{1600}ln\frac{1}{2} = \alpha \tag{8}$$

Multiplicando miembro a miembro por *t*

$$\frac{t}{1600} ln \frac{1}{2} = -\alpha t \tag{9}$$

Por propiedad del logaritmo de una potencia

$$ln \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} = -\alpha t \tag{10}$$

Reemplazando -α*t* en la ecuación inicial $y = ke^{-\alpha t}$ se obtiene

$$y = k. e^{ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}} \tag{11}$$

Teniendo presente que la función logaritmo natural y la función exponencial de base *e* son funciones inversas entre sí, se obtiene:

$$y = k \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} \tag{12}$$

Respondiendo a lo solicitado en el ítem a).

Para hallar la cantidad perdida al cabo de los 100 años, sustituimos en la ecuación anterior t por 100 entonces

$$y(100) = k \left(\frac{1}{2}\right)^{100/1600} \approx 0{,}9576\ k$$

Hasta esta instancia la intención es mostrar la función exponencial expresada en sus diferentes registros de representación, en el marco de distintos fenómenos químico-biológico.

Para el segundo cuatrimestre de la cursada de Matemática se propone seguir trabajando con este tipo de funciones aplicando el cálculo diferencial e integral. En un contexto de las Ciencias Naturales ejemplos concretos son la velocidad de crecimiento de un cultivo, de una población o decaimiento radiactivo, que se citan a continuación.

Problema 4: Crecimiento de cultivo
Una función exponencial W tal que $W_{(t)} = W_0 e^{kt}$ para $k > 0$, describe el primer mes de crecimiento de cultivos como maíz, algodón y soja. El valor de la función $W_{(t)}$ es el peso total en miligramos; W_0 es el peso en el día del brote y *t* es el tiempo en días.
a) Si *k* = 0.2 y $W_0 = 68$ *mg* para una especie de soja, predecir el peso al final de 30 días.
b) Para una especie de algodón, si *k* = 0.21 y el peso después de 10 días es de 575*mg* calcular W_0.
c) Hallar la razón de cambio del crecimiento de este tipo de cultivos con respecto al tiempo.

Los apartados a) y b) se resuelven aplicando los datos del problema en la función de crecimiento exponencial $W_{(t)}$.
Para obtener la razón de cambio que solicita el apartado c), se utiliza el concepto de derivada así como las reglas de derivación correspondientes.

La siguiente actividad, idéntica al problema 3, pero enunciada como aparece en los libros de Química, tiene por objeto aplicar conceptos teóricos apropiados como son los correspondientes al cálculo integral, revalorizando la relación entre derivada y antiderivada como operaciones inversas.

Problema 5: Desintegración de elementos radiactivos

El Radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Se ha comprobado además que en 1600 años desaparece la mitad de la cantidad inicial.
Si $y_{(t)}$ es la cantidad de Radio presente en un instante t, la velocidad de desintegración en t, $v_{(t)}$, se expresa:

$$v_{(t)} = \frac{dy_{(t)}}{dt} = -\alpha y_{(t)}$$

Donde el signo negativo indica que dicha velocidad es cada vez menor al haber menos cantidad de elemento a medida que transcurre el tiempo.
Hallar la ecuación de desintegración así como la cantidad perdida luego de 100 años.

A continuación se desarrolla la situación anterior para obtener la expresión de la función exponencial del problema 3.
Si bien el concepto de ecuación diferencial no está en la currícula de Matemática, los estudiantes pueden resolverla recurriendo a los conocimientos de derivada y antiderivada estudiados previamente.
Ya que la derivada de la función *ln(y)* es *1/y*, pueden inferir entonces que la antiderivada de la función *1/y* es *ln(y)* teniendo presente que $y>0$.
La ecuación presentada en el problema 5 puede reescribirse como:

$$\frac{dy_{(t)}}{y_{(t)}} = -\alpha\, dt \tag{13}$$

Aplicando los conocimientos correspondientes a derivada y antiderivada, y sabiendo que la expresión *y(t)* tiende a cero pero nunca llega a ese valor (por consiguiente es derivable para todo *y* mayor que cero), se obtiene:

$$\int \frac{dy_{(t)}}{y_{(t)}} = \int -\alpha\, dt \tag{14}$$

de lo que se deduce que:

$$ln\left|y_{(t)}\right| = -\alpha t + C \tag{15}$$

Es decir que la ecuación correspondiente a la desintegración de Radio es: $y_{(t)} = e^{-\alpha t + C}$ que puede escribirse como: $y_{(t)} = e^{-\alpha t}.e^{C}$ teniendo presente que e^{C} es una constante, digamos k se obtiene finalmente: $y_{(t)} = k.e^{-\alpha t}$. A partir de la expresión de $y_{(t)}$ se procede a resolver la situación como se mostró en el problema 3.

Con este problema se muestra un ejemplo de las ventajas que presentan ciertos contenidos de la currícula para ampliar el análisis de una situación problema en particular.

Se facilita el interés cognoscitivo de los estudiantes, al presentar este tipo de actividades que tienen un significado especial y los motiva a trabajar con mayor dedicación en temas específicos de sus respectivas carreras.

CONCLUSIONES

La propuesta presentada, consideramos orientará a los estudiantes a que asocien un tipo de función, en este caso la exponencial, a distintos fenómenos naturales y utilicen las herramientas matemáticas necesarias para resolverla**.**

El aprendizaje de la Matemática, mediante la resolución de problemas aplicados a fenómenos químicos-biológicos motiva a los estudiantes, teniendo en cuenta que pertenecen a carreras no matemáticas. Más aún, si en los problemas pueden integrar los contenidos que han aprendido en los distintos ejes temáticos, como así también los registros de representación de los objetos en cuestión.

Trabajar la función exponencial, como se propone en este artículo, contribuye a desarrollar este concepto desde una perspectiva cognitiva, que incorpore aspectos de visualización y representación en un primer momento, y luego una formación de significados matemáticos como los que aportan el cálculo diferencial e integral.

BIBLIOGRAFÍA

- AZCÁRATE, C.; DEULOFEU, J. (1990). *Funciones y Gráficas.* Editorial Síntesis. Madrid. España.
- CANTORAL, R.; MONTIEL, G. (2001). *Funciones: Visualización y pensamiento matemático.* Editorial Prentice Hall. México.
- DUVAL, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II.* Grupo Editorial Iberoamérica. México
- DUVAL, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Traducción al español por Myriam Vega. Colombia
- GARCÍA, J. (2003). *Didácticas de las Ciencias, resolución de problemas y desarrollo de la creatividad.* Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá. Colombia.
- LEITHOLD, L. (1988). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales.* Editorial Harla. México
- POLYA, G. (1997). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. México.
- VALDERRAMA BONNET, M. (1995). *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales.* Editorial Pirámide. Madrid. España