

**CB16****ALGUNAS DIFICULTADES DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN LA APLICACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN LAS CLASES DE FÍSICA**

Gilda Dima, Beatriz Follari & Luciana Baumann

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa.  
Uruguay 151. (6300) Santa Rosa, La Pampa  
dimascari@cpenet.com.ar

**Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación:**

Trabajo de investigación. Educación Superior.

**Palabras Clave:** análisis de funciones, significado de derivada, dificultades matemáticas en física, física básica universitaria

**RESUMEN**

Este estudio está orientado a relevar qué recursos conceptuales matemáticos utilizan estudiantes universitarios de las carreras de Licenciatura y Profesorado en Química y Licenciatura y Profesorado en Física, al momento de aplicarlos a situaciones físicas. El instrumento para la recolección de datos fue un cuestionario que indagó sobre aspectos de la ecuación de segundo grado y sobre la interpretación física de la primera y segunda derivada de esta función. Los resultados muestran que el estudio de la Cinemática brinda una oportunidad para la comprensión de conceptos matemáticos, lo cual contribuye a obtener mejores resultados en los estudiantes de las carreras Profesorado y Licenciatura en Física.

**INTRODUCCIÓN**

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que nos encontramos desarrollando en torno al uso de la Matemática en Física. Es sabido que las dos disciplinas se han retroalimentado mutuamente a lo largo del tiempo. Particularmente, es claro que Newton formuló su análisis matemático con el propósito de expresar adecuadamente sus ideas sobre la mecánica.

Los docentes de las asignaturas básicas de Física esperamos que nuestros estudiantes universitarios transfieran, apliquen e interpreten conceptos matemáticos en el marco de nuestra asignatura. Existen diversos trabajos que analizan las dificultades que ellos enfrentan para ésto (Pérez y Dibar Ure, 2012; Pocoví y Collivadino, 2012; Tuminaro and Redish, 2003; Bing and Redish, 2007).

Redish y Gupta (2009) sostienen que el significado de una ecuación en el contexto de la Matemática es conciso y preciso. Proponen como ejemplo una ecuación lineal y reconocen que no sólo se interpreta como una relación entre los elementos que aparecen en ella sino que se distingue entre variables y constantes y se asocia a una recta. En el contexto de la Física, una ecuación lineal, como puede ser la de velocidad en función del tiempo para un movimiento con aceleración constante, se relaciona con otra red de ideas sobre el movimiento. El uso de la Matemática en Física produce cambios en su interpretación. Hay diferentes maneras de hacerlo y los estudiantes mezclan Física, Matemática y Computación para construir un nuevo resultado (Bing y Redish, ob. cit. 2007). No basta con que sepan

Matemática, es necesario que puedan ampliar los significados y asociarlos a otro tipo de conceptos formando nuevas redes. Es preciso que los profesores de Física tomen conciencia de esta problemática y que diseñen sus estrategias de enseñanza teniéndola en cuenta.

Se ha observado que en el caso del concepto de derivada como razón de cambio de la función, los estudiantes son capaces de aplicar las reglas de derivación en forma correcta pero muestran dificultades para comprender su significado (Sánchez-Matamoros García et al, 2006).

Adoptaremos para nuestro análisis el marco teórico sobre la aplicación de Matemática en problemas de Física plasmado en Tuminaro (2003) y Tuminaro y Redish (2007). Los elementos considerados dentro de esta teoría son recursos, juegos epistémicos y marcos, los cuales constituyen una herramienta para analizar cómo resuelven problemas los estudiantes de Física Básica. Para llevar a cabo su estudio, estos investigadores registran diálogos durante las clases de resolución de problemas, en las tareas extra-clase y en entrevistas personales.

En este mismo sentido, concebimos que cualquier descripción del uso de la Matemática en Física debe empezar con un modelo que dé cuenta del conocimiento existente en los estudiantes: los recursos. Éstos son estructuras cognitivas, unidades de pensamiento o razonamiento con los que científicos cognitivos e investigadores en educación describen y entienden el pensamiento humano y el aprendizaje. En este modelo, los elementos cognitivos del conocimiento y la memoria son representados como redes de neuronas conectadas. Cuando se convoca o usa el conocimiento representado por una red particular, las neuronas de la red son activadas a través de estructuras de control. El aprendizaje ocurre como el resultado del crecimiento de nuevas sinapsis que cambian la topología de las redes existentes. En este marco teórico, para describir la forma en que los estudiantes se aproximan a la resolución de problemas de Física, se caracterizan las actividades en juegos epistémicos y marcos. Un juego epistémico es el conjunto de pasos que ejecutan los estudiantes al resolver un problema. El marco lo constituyen sus expectativas sobre los problemas de Física y como usar la Matemática en ellos. Los recursos, mencionados en el párrafo anterior, pueden ser activados o no durante la resolución.

En este artículo presentamos las respuestas, a un mismo test, de estudiantes de las carreras de Licenciatura y Profesorado en Química por un lado y estudiantes de la Licenciatura y Profesorado en Física por el otro. El cuestionario está orientado a relevar qué recursos conceptuales poseen y si pueden aplicarlos a una situación física en particular buscando establecer las similitudes y diferencias entre ambos grupos.

## **METODOLOGÍA**

Hemos llevado adelante una investigación exploratoria con estudiantes de distintas carreras de nuestra Facultad, para indagar cómo aplican los contenidos estudiados en las clases de cálculo en situaciones problemáticas de Física. Para ello elaboramos un cuestionario escrito que fue administrado a la totalidad de los estudiantes de Licenciatura y Profesorado en Física (Grupo A) y a la totalidad de los estudiantes de la Licenciatura y Profesorado en Química (Grupo B).

Quienes integraron el Grupo A (siete alumnos), habían cursado en primer año Análisis Matemático I y II, Álgebra y Física I y II. Cinemática es parte de los contenidos de Física I mientras que en Física II estudian Dinámica Newtoniana. Todos tenían aprobado Análisis I, cinco habían aprobado Análisis II, los restantes habían regularizado la cursada y debían rendir el examen final.

El Grupo B estaba integrado por los veintidós estudiantes que cursaban Física I durante el segundo año de sus carreras. El cuestionario se administró después de que rindieran el parcial

de Física I que incluía Cinemática. En primer año habían realizado los cursos de Cálculo I y Cálculo II y aprobado el primero.

Seleccionamos estos alumnos, dado que al momento de aplicar el test conocían el concepto de derivada y la interpretación de los gráficos de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo. El Grupo A cursa simultáneamente Análisis I y Física I, inclusive los temas derivada y cinemática se dictan en forma paralela. En cambio, para el Grupo B transcurre un año entre Cálculo I y Física I.

En las clases de Cinemática el concepto de velocidad media se inicia a partir de un gráfico de posición en función del tiempo, y se la define como razón de cambio de la posición respecto del tiempo. Luego se continúa con el concepto de velocidad instantánea relacionándolo con la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, secuencia ésta seguida en los textos habituales de Física Básica (Resnick et al, 2004, Tipler y Mosca, 2010, Serway y Jewett, 2009). Es en este punto de la enseñanza que el docente relaciona el concepto de derivada desde el punto de vista de la Física con lo ya estudiado en las clases de Matemática.

### Instrumento para la toma de datos

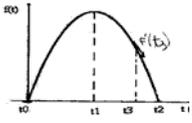
Escribimos el cuestionario basándonos en los contenidos de las materias ya cursadas, el material presentado en las clases teóricas de Cálculo I y de Análisis I, y en los textos utilizados (Leithold, 1982; Stewart, 1998). Fue validado tomándose a estudiantes de perfil similar y analizado por docentes de Física y Matemática. Sobre la base de las repuestas de los estudiantes y las sugerencias del grupo de profesionales, elaboramos la versión final del test (Anexo I).

El test consistía en dos partes. En la primera, buscábamos que los alumnos identificaran características de la función cuadrática. La segunda la planteamos de manera que relacionaran la función dada con el movimiento de una cajita que es lanzada hacia arriba sobre un plano inclinado.

### RESULTADOS

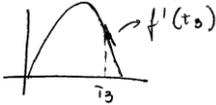
En las Tablas I y II transcribimos las respuestas más representativas dadas al cuestionario por cada uno de los grupos de trabajo. Indicamos, entre paréntesis, el número de respuestas para cada categoría. La cantidad faltante corresponde a la categoría “no responde”.

Preg.	inciso	correctas	incorrectas
1	Signo de A	Negativo. (4)	Positivo. (3)
	Información que nos da C	Donde la curva corta al eje y. Ordenada al origen. (4)	Nos da el punto de partida. (1)
2	$t_0$	Raíz de la función. La función se hace cero. (4)	Es el comienzo de la función. (2)
	$t_1$	X del punto más alto de la función. Coordenada t vértice. (2)	La altura máxima que tiene la función. Punto máximo del recorrido. (4)
	$t_2$	La segunda raíz. La función se hace cero. (3)	Es el final de la función. Tiempo en que el objeto se detiene. (3)
3	$t_0$	Instante en el que fue lanzada la cajita. (3)	Posición inicial. Posee una velocidad inicial que es la máxima. (3)

	$t_1$	Cuando llegó a la altura máxima. (3)	Punto máximo al que llega la cajita sobre el plano inclinado. Altura máxima. (3)
	$t_2$	Cuando vuelve al punto donde fue lanzada. (5)	Es la posición final a la que llega la cajita. (1)
4	$f'(t)$	$f'(t) = 2 A t + B$ (7)	Ninguno
	Significado físico de $f'(t)$	Es la función velocidad de la cajita. (4)	Ninguno
5	$f'(t_3)$	Se representa como la pendiente de la recta tangente en ese punto.  (5)	Está representada como un punto. (2)
	$f'(t_3)$ significado físico	$f'(t_3)$ sería la velocidad en la gráfica $f(t)$ . Viendo la gráfica de $f(t)$ la velocidad aumenta negativamente. Nos permite saber que la cajita está cayéndose. (5)	Me dice que va desacelerando (va perdiendo velocidad). La posición de la cajita. (2)
6	$f''(t)$	$f''(t) = 2 A$ $f''(t) = 2 A$ (7)	Ninguno
	Significado físico de $f''(t)$	Representa la aceleración de la cajita. (4)	Indica la concavidad. (2)

**Tabla I:** Resultados obtenidos en cada una de las preguntas del cuestionario GRUPO A

Preg.	inciso	correctas	Incorrectas
1	Signo de A	Negativo (10)	Positivo (12)
	Información que nos da C	Donde la curva corta al eje y Ordenada al origen. (15)	Variable independiente. (3)
2	$t_0$	Raíz de la función. La función se hace cero. (13)	Es el comienzo de la función. Vértice (9)
	$t_1$	X del vértice en y X del punto más alto de la función. (3)	Es la altura de la función (es decir) hasta qué punto llega en el eje de la x o y. La altura máxima que tiene la curva. Eje de simetría. (16)
	$t_2$	La segunda raíz. La función se hace cero. (13)	Es el final de la función. (7)
3	$t_0$	Instante en el que fue lanzada la cajita. (2)	Posición inicial. Punto de partida de la cajita. Que la cajita está en reposo. (19)
	$t_1$	Representa el instante de máxima altura de la cajita. Cuando llegó a la altura máxima. (5)	Altura máxima. Punto máximo al que llega la cajita. (14)
	$t_2$	Instante en que la cajita llega al suelo. Tiempo final (cuando la cajita cayó). (8)	El punto final donde se detiene la caja. Es la posición final a la que llega la cajita. (12)

4	$f'(t)$	$f'(t) = 2 A t + B$ (13)	$f'(t) = A t + B$ ; $f'(t) = 2 A t + t$ $f'(t) = 2 t + t$ (6)
	Significado físico de $f'(t)$	Es la velocidad de la cajita. (1)	Es la recta tangente a la curva. (3)
5	$f'(t_3)$	 Recta tangente en $t_3$ con pendiente negativa. (2)	$f'(t_3) = 0$ Está representada por un punto en la función lineal. (2)
	$f'(t_3)$ sig. físico	Movimiento descendente. Nos informa con qué velocidad se moverá la caja. (5)	Es lineal. Que la caja se encuentra en reposo. (3)
6	$f''(t)$	$f''(t) = 2 A$ (6)	$f''(t) = 2$ ; $f''(t) = A$ (6)
	Significado físico de $f''(t)$	La aceleración de la cajita. (1)	Ninguno

**Tabla II:** Resultados obtenidos en cada una de las preguntas del cuestionario GRUPO B

## DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En este ítem realizamos primero un análisis de los resultados alcanzados por cada uno de los grupos, para luego discutir similitudes y diferencias entre ellos.

De la Tabla I podemos inferir que los estudiantes del Profesorado y la Licenciatura en Física del Grupo A:

- Son capaces de establecer la correspondencia entre la función cuadrática y el movimiento de la cajita. Tienen más dificultad para analizar la función desde el campo matemático (más abstracto) que cuando deben hacerlo aplicado a una situación física concreta.
- Encuentran bien la primera y segunda derivada de la función  $f(t)$ . Un número importante reconoce que estas derivadas representan las funciones velocidad y aceleración, respectivamente. Quienes responden bien el apartado a) de la pregunta 5, lo hacen también para el apartado b).

De la Tabla II, donde se muestran algunas de las respuestas de los estudiantes del Profesorado y Licenciatura en Química, correspondientes al Grupo B, se desprende que:

- Con respecto a las características de la función  $f(t)$  (preguntas 1 y 2) cerca de la mitad de los alumnos indica que A es positivo.
- Reconocen las raíces en el gráfico y presentan problemas para expresar correctamente que  $t_1$  es la abscisa para la cual la función tiene su máximo. Tenemos sólo dos alumnos que contestan bien toda esta pregunta y catorce responden toda la pregunta 3 mal.
- Muy pocos hallan bien la primera y segunda derivada de  $f(t)$  y sólo un estudiante es capaz de asignar estas derivadas a la velocidad y aceleración de la cajita. Analizando las respuestas a las preguntas 4 y 5 podemos inferir que confunden la función derivada con la derivada en un punto.

Del análisis de los test individuales surge que aproximadamente la mitad de los integrantes del Grupo A es capaz de responder correctamente la pregunta 1 completa mientras que del Grupo B, sólo cinco responden toda esa pregunta correctamente.

Un análisis global de las respuestas muestra que el GRUPO A obtiene mejores resultados. En lo que hace a la función cuadrática, en ambos grupos se observa una dificultad en asociar el signo del coeficiente A con la concavidad de la curva, tal vez miran la expresión de la función sin prestar atención a la gráfica.

En ambos grupos se identifican las raíces de la ecuación cuadrática y el vértice. Sin embargo, la mayoría expresa que  $t_1$  es la altura máxima de la función en lugar de “es el instante para el cual la función tiene su máximo”, es decir, confunden el valor de la variable con la función en ese punto. Cuando deben asociar la función con el movimiento de la cajita, los alumnos del Profesorado y Licenciatura en Química muestran muchas dificultades mientras que los del Profesorado y Licenciatura en Física demuestran mayor habilidad que cuando analizaban la función en forma abstracta. El Grupo B confunde en mayor proporción instante de tiempo con posición (ver Tabla II).

Con respecto a las derivadas de la función, el Grupo A aplica sin problemas las reglas de derivación para encontrar la primera y segunda derivada. Además las asignan a la velocidad y a la aceleración, respectivamente, mientras que el otro grupo no lo logra. Teniendo en cuenta que todos han aprobado la asignatura de Matemática donde este tema se trata, la diferencia puede originarse en la utilización de la derivada en otros contextos.

## CONCLUSIONES

Creemos que las clases de Física, en particular el tema Cinemática, dictadas al mismo tiempo que se estudia derivada en Matemática, ofrece a los alumnos de Física una oportunidad para profundizar lo aprendido más allá de la resolución algorítmica de ejercicios. La aplicación inmediata de los conceptos de Matemática en un contexto diferente, como es la Física, refuerza y enriquece la red conceptual estableciendo conexiones que producen la activación de los recursos conceptuales asociados al movimiento simultáneamente con los de Análisis Matemático. Esto constituye una ventaja para los estudiantes del Profesorado y Licenciatura en Física sobre los del Profesorado y Licenciatura en Química; para estos últimos los conceptos como el de derivada no tienen conexiones inmediatas con temas de su interés. Al momento de estudiar Cinemática, los alumnos de Química no consiguen activar los recursos de Análisis Matemático que integran una red conceptual diferente.

El conocimiento de esta situación puede ser un insumo importante al momento de planificar la enseñanza de Física I para los docentes de ambas carreras, ya que deben construir los mismos conceptos a partir de dos realidades muy diferentes. Creemos también que conocer cómo es utilizado posteriormente un concepto puede ayudar a planificar actividades en Análisis Matemático I y en Cálculo I con el propósito de lograr mejores conceptualizaciones.

## REFERENCIAS

- BING, T. and REDISH, E. 2007. The Cognitive Blending of Mathematics and Physics Knowledge, AIP Conference Proceedings, V 883, 26-29.
- LEITHOLD, L. 1982. *Cálculo con Geometría Analítica*. (El Harla. México).
- PÉREZ, S. y DIBAR URE, C. 2012. Primeras apropiaciones de la matemática en la física: Resolviendo problemas de cinemática en el primer año de la universidad, Revista de Enseñanza de la Física, 25(1), pp. 25-33.

- POCOVÍ, M. C.; COLLIVADINO, C. 2012. Traducción entre lenguajes simbólicos de distintas áreas del conocimiento: el caso del flujo del campo eléctrico, Memorias en CD SIEF XII, Esquel, Argentina.
- REDISH, E y GUPTA, A. 2009. Making Meaning with Math in Physics: A Semantic Analysis, GIREP-EPEC & PHEC 2009 International Conference, 244-260.
- RESNICK, R., HALLIDAY, D. y KRANE, K. 2004. *Física*, Vol. I. (Compañía Editorial Continental. México).
- SÁNCHEZ-MATAMOROS GARCÍA, G, GARCÍA BLANCO, M. y LLINARES CISCAR, S. 2006. El desarrollo del esquema de derivada, Enseñanza de las Ciencias, 24 (1), 85-98.
- SERWAY, R. y JEWET, J. 2009. *Física para ciencias e ingeniería con Física Moderna*. Vol I. (Cengage Learning Editores. México).
- STEWART, J. 1998. *Cálculo de una Variable*. (International Thomson Editores. Méjico).
- TIPLER, P. y MOSCA, G. 2010. *Física para la ciencia y la tecnología*. Vol 1. (Reverté. España).
- TUMINARO; J. 2003. A Cognitive Framework for Analyzing and Describing Introductory Student's Use and Understanding of Mathematics in Physics, Ph.D dissertation, University of Maryland. <http://physics.umd.edu/perg/dissertations/Tuminaro/>
- TUMINARO; J. and REDISCH, E. 2003. Understanding students' poor performance on mathematical problem solving in physics, Physics Education Research, 113-116.
- TUMINARO, J. and REDISH, E. 2007. Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic games, Physical Review special topics- Physics Education Research 3, 020101.

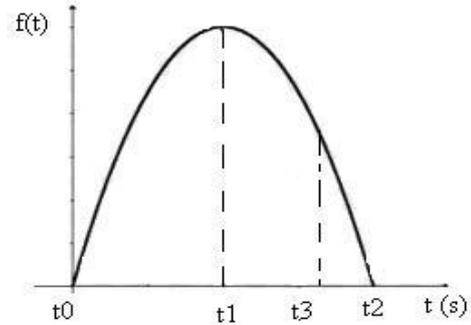
## ANEXO I

Apellido y Nombre: \_\_\_\_\_ fecha: \_\_\_\_\_

Carrera: \_\_\_\_\_ Año de la carrera \_\_\_\_\_

La gráfica de la figura corresponde a función:

$$f(t) = A t^2 + B t + C$$



1.- a) Marca la opción correcta: el coeficiente A es

positivo                       negativo

c) ¿Qué información nos da el coeficiente C?

2.- Observando la gráfica ¿Qué representan para la función  $f(t)$ . los instantes  $t_0$  ;  $t_1$  y  $t_2$ ?

$t_0$

$t_1$

$t_2$

3.- Pensemos ahora que la función anterior representa la posición en función del tiempo para una cajita que es lanzada hacia arriba sobre la superficie de un plano inclinado un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. ¿Qué información, sobre el movimiento de la cajita, nos dan los instantes  $t_0$  ;  $t_1$  y  $t_2$ , en la función  $f(t)$ . ?

$t_0$

$t_1$

$t_2$

4 a) Encuentra la expresión de  $f'(t)$

b) Indica cuál es el significado físico  $f'(t)$

5.- Para el instante  $t_3$ :

a) ¿cómo está representada  $f'(t_3)$  en el gráfico de  $f(t)$ ?

b) ¿Qué información, sobre el movimiento de la cajita, nos da  $f'(t_3)$  ?

6.-a) Encuentra  $f''(t)$

b) Indica qué representa  $f''(t)$  para el movimiento de la cajita.