

**CB12****ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA ESCUELA SECUNDARIA: UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN DOCENTE**Grupo Matemática CEDE<sup>1</sup>

Universidad Nacional de San Martín  
Martín de Irigoyen 3100. San Martín. Buenos Aires.  
cede@unsam.edu.ar

**Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación:**

Relatos de experiencias de enseñanza o capacitación, Educación Continua, Educación continua de los docentes en los distintos niveles.

**Palabras Clave:** *Enseñanza, Geometría, Nivel Secundario, Formación Docente*

**RESUMEN**

Este artículo recupera el producto de un curso que el Grupo Matemática CEDE (Centro de Estudios en Didácticas Específicas) coordinó en el marco de un proyecto del INFD y la Universidad Nacional de San Martín, con el objetivo de hacer un aporte a los docentes de matemática del nivel secundario que usan o quieren usar Software de Geometría Dinámica (SGD) para el desarrollo de secuencias de enseñanza en sus aulas (Fioriti y otros 2014a, 2014b, 2014c). Partimos de la convicción que resolver problema en el aula es el medio para que los alumnos aprendan matemática con significado y requiere que el docente organice la misma como una comunidad para el estudio de la matemática. Entendemos también que la incorporación de la tecnología como herramienta para hacer matemática constituye un aporte como forma de ampliar la cultura matemática y en consecuencia el conocimiento, y aprender a gestionarla se transforma en un problema profesional.

**INTRODUCCIÓN**

En las escuelas, como señalan Kuzniak y Richard (2014), la enseñanza que favorece el desarrollo del trabajo matemático del alumno, requiere de una organización que recaer en el profesor como agente responsable de su generación. Por ello, en el marco de su desarrollo profesional, nos parece necesario ofrecer a esos docentes:

- la oportunidad de trabajar los fundamentos de las redes de conceptos en las que se involucran los que deben enseñar,
- modelos de razonamiento que permitan validar sus afirmaciones y que puedan ser trasladados al aula en orden a lograr que los mismos sean producidos por sus alumnos,

---

<sup>1</sup> Grupo Matemática del Centro de Estudios en Didácticas Específicas está conformado por los siguientes investigadores: Gema Fioriti (coord.); Alejandra Almirón; Susana Ammann; Fernando Bifano; Rosa Ferragina; Leonardo Lupinacci; José Villella.

- lecturas en las que los contenidos aparezcan relacionados para fomentar la búsqueda de sus conexiones a lo largo de todo el diseño curricular,
- herramientas de lectura que les permitan criticar al software que seleccionan y usan para el trabajo con sus alumnos en las aulas.

En ese marco diseñamos un curso de capacitación que toma las siguientes, como sus ideas directrices:

- resolver requiere de una práctica en la que el aula se organice como una comunidad para el estudio de la matemática. Entendemos que los problemas son el motor del avance de la matemática y también del aprendizaje; que estos problemas podrán plantearse en contextos que hacen referencia a situaciones próximas a la vida de los alumnos de la escuela media considerados ciudadanos; podrán provenir de la matemática misma o de otras disciplinas;
- sostenemos que la producción de conjeturas y pruebas son tareas constitutivas de la actividad matemática, actividades centrales también en la formación del pensamiento matemático;
- la modelización es una parte importante de la matemática, entendiendo por tal la construcción de modelos de una situación que se quiere estudiar, para trabajar con ellos, producir resultados e interpretarlos.

Las ideas anteriores aportan al desarrollo profesional de los docentes; ellos hacen suyo el diseño de una gestión de la clase en la que los alumnos resuelvan problemas, decidiendo las formas de abordarlos en función de las relaciones más relevantes y discutiendo con sus compañeros la validez de las estrategias utilizadas en la resolución. Pensamos en un docente coordinador de ese grupo de estudio que selecciona los problemas, promueve interacciones entre los alumnos y con él y finalmente organiza las ideas y las ordena en una producción colectiva. Un docente, profesional de la enseñanza, que comparte la idea de que el conocimiento se produce por la interacción con el problema y con los pares (Fioriti, 2016).

Los problemas y actividades propuestos para el análisis didáctico durante el curso, buscan debatir con los docentes cómo gestionar la clase para alentar a los alumnos a ensayar, producir diferentes soluciones, discutir, argumentar en sus recorridos por las redes de conceptos que involucran el pasaje de la aritmética al álgebra, la entrada al razonamiento deductivo como forma de validar y la utilización de diferentes formas de representación equivalentes entre ellas como algunas de las actividades del hacer matemática que deben construir los alumnos que comienzan la escuela secundaria. Al mismo tiempo intentan animar al docente a organizar las interacciones en la clase para reflexionar sobre la validez, precisión, claridad, generalidad de lo que en ellas se produzca.

En este escenario, la incorporación de la tecnología de diferentes maneras: como herramienta para hacer matemática; como forma de ampliar la cultura matemática y en consecuencia el conocimiento, se constituye en constructo a analizar como parte de esa formación especializada que adquiere el profesor durante su desarrollo profesional.

La incorporación de las computadoras en la sociedad generó un cambio cultural que modificó las formas de ver y estar en el mundo; del mismo modo la incorporación de computadoras en el aula requiere un cambio cultural en la forma de estudiar y conocer. Este cambio afecta al conocimiento matemático, a los modos de estudiarlo, a la organización y gestión de la clase y es el docente quien está en las mejores condiciones de gestionarlo (Bifano y Vilella, 2012). Creemos que incluir la tecnología en la enseñanza es inevitable y nos pone frente a la oportunidad de repensar las actividades y los problemas que dan sentido a los conocimientos, sabiendo que tenemos herramientas potentes para resolver las técnicas. Proponemos entonces la utilización de calculadoras científicas o no tomando en cuenta alcances y limitaciones de

cada una de ellas y el uso de un Software de Geometría Dinámica (SGD) para el aprendizaje de algunos temas de geometría y funciones.

### **Un modelo de gestión para enseñar geometría**

La propuesta que describimos presenta los temas que componen el eje de la geometría caracterizándola como la rama de la matemática que: *se “ve”* (porque sus objetos de estudio pueden dibujarse o construirse); *permite jugar* (porque con la manipulación de objetos concretos es posible desarrollar sus contenidos conceptuales); *mejor se vincula con la realidad* (porque los modelos que analiza, figuras en 3D y 2D, pueden observarse en objetos de uso cotidiano); *se aplican los conceptos de álgebra* (porque su lenguaje y símbolos se emplean en los contenidos geométricos); *ayuda a razonar* (porque su estructura desarrolla el pensamiento y colabora en el uso del razonamiento deductivo) (Vilella, 2008).

Las actividades están focalizadas en la vinculación de la geometría con situaciones de la realidad. Toma de allí elementos para caracterizar a los propios objetos geométricos. En el estudio de esos elementos se construye un modelo y cobra sentido la aparición de desarrollos teóricos y las propiedades que los mismos tienen en función de cómo se relacionan con la situación que les da origen.

Los conceptos geométricos a desarrollar se presentan en actividades que llevan el nombre genérico de estudio. Elegimos esta manera de identificación porque consideramos que al resolverlas, el aula asume las cualidades de una comunidad de aprendizaje que se caracteriza por estar formada por un grupo de alumnos coordinado por el docente que busca, como colectivo de personas que estudian, la solución al problema planteado usando datos conocidos vehiculizados en propiedades trabajadas en otros años de escolaridad así como el descubrimiento de ciertas regularidades que aparecen por primera vez en el discurso que conforma el corpus de la respuesta discutida grupalmente. Esta disposición del aula desde sus actores, así como el uso que se hace en ella de los contenidos que se estudian, genera una ecología que hace aparecer distintos tipos de métodos, cualidades de los modelos usados y justificaciones de los pasos seguidos que le otorga una dinámica particular.

Los temas así planteados generan en los resolutores la necesidad de poner en juego las redes conceptuales que los sustentan para hacer prevalecer la propiedad geométrica que da razón a una familia de figuras por sobre su apariencia, su representación, su dibujo (Ferragina y Lupinacci, 2012). Así se genera un ambiente de aula en el que el debate, la argumentación, el uso de propiedades para dar cuenta de decisiones tomadas priman por sobre la autoridad que la figura suele tener para algunos alumnos como prueba de la demostración geométrica; permite el libre discurrir de ideas acerca de qué hacer y con qué; genera la aparición, junto con la justificación de qué se elige y porqué, de la competencia comunicativa en el aula de matemática (Vilella y Ammann, 2012).

### **La tecnología como recurso para la enseñanza de la geometría.**

Afirmamos que la mayoría de los conceptos básicos de la geometría que se enseña en la escuela, puede describirse como una conjunción de las propiedades que poseen mediante la utilización de los atributos relevantes y los irrelevantes (Vinner;1982) que los caracterizan. En esta identificación o construcción de un concepto geométrico podemos distinguir al menos cuatro elementos:

- a. La imagen del concepto: se refiere al concepto tal como aparece en la mente de quien lo estudia. Incluye todo lo que puede venir a la mente en relación con el concepto, todo lo que se evoca cuando se escucha la palabra que lo nombra o cuando se ve un dibujo o una representación del mismo.

- b. La definición del concepto: se refiere a la forma verbal que con la que se expresa cierta noción y no siempre, cuando existe, recoge todo lo que quien aprende sabe respecto del objeto geométrico en cuestión. Esta definición no es necesariamente la matemática.
- c. Un grupo de operaciones mentales o físicas, como ciertas operaciones lógicas, que orientan para que una comparación con el dibujo mental sea más fácil.
- d. La tecnología: se refiere, en sentido amplio, como un producto sociocultural que sirve además, como herramienta física y simbólica para vincularse y comprender el mundo que nos rodea.

La construcción de la imagen de un concepto geométrico resulta entonces de una mezcla de procesos visuales y analíticos que se concreta en dos direcciones: por un lado, la interpretación y la comprensión de modelos visuales y, por el otro, la habilidad para traducir a imagen visual una información recibida en forma simbólica haciendo uso de determinada tecnología. Los juicios que a partir de ella pueden hacerse son producto de procesos visuales donde los atributos irrelevantes del componente visual se logran primero y actúan como distractores generando una fuerte concesión entre construcciones internas y lo que llega a aportar el uso de los sentidos.

Creemos que desde su misma concepción en la geometría subyace una cierta tecnología y nos preguntamos: ¿Cómo incide en la definición del concepto geométrico el empleo de la tecnología que se usa para su construcción? ¿Qué aspectos hay que considerar cuando la traducción a imagen visual se realiza mediada a través de un SGD? Damos una respuesta cuando pensamos que de la misma forma en que la escritura ha reestructurado la conciencia y la mente humana generando operaciones cognitivas que antes de su existencia no estaban desarrolladas, las nuevas tecnologías transforman subjetividades, capacidades y prácticas. Hay quienes creen que con la incorporación de las TIC en la escuela se corre el riesgo de vaciar la enseñanza: en el caso específico que nos ocupa el riesgo está en limitarse a mostrar solo lo que se ve en la pantalla, los dibujos geométricos, las representaciones gráficas de las funciones, los resultados de los cálculos, etc.

En la enseñanza clásica de la matemática, en la que muchos docentes han sido y siguen siendo formados, las técnicas tienen un papel preponderante; están generalmente antes que los problemas que le dan sentido o crean su necesidad. El software matemático y las calculadoras son herramientas que resuelven las técnicas sin esfuerzo y en el caso de los gráficos permiten ver algunas propiedades. Se hace necesario entonces modificar el trabajo en el aula, para comenzar resolviendo problemas que permitan a los alumnos construir el sentido de un conocimiento para luego trabajar las técnicas y su razón de ser. Ese es el desafío que proponemos.

Así como en la cultura oral era imposible manejar conceptos asociados con figuras geométricas; en la cultura del texto impreso es imposible pensar en objetos de geometría dinámicos, lo que nos pone a pensar en:

- una tecnología con la cual se hace geometría dinámica que se constituye un nuevo sistema de representación de los objetos geométricos al utilizar nuevos objetos ostensivos, los dibujos computarizados, que se diferencian de los dibujos sobre papel precisamente por su dinamismo: pueden ser arrastrados y deformados en la pantalla, conservando las propiedades geométricas que se les ha asignado por el procedimiento de construcción,
- un medio de producción que utiliza un dispositivo (la computadora) como requisito fundamental para su empleo,
- un lenguaje particular que integra no sólo la especificidad del lenguaje geométrico sino su articulación con el lenguaje informático,

- una herramienta semiótica con características particulares que combina diferentes modelos, el modelo de la geometría subyacente en el software integrado al modelo informático que se caracteriza por las limitaciones de lo digital.

Emplear un SGD nos ubica frente a un medio nuevo de producción de conocimiento, con un lenguaje específico que debe conocerse. Los aprendizajes que así se construyen se fomentan mediante el diseño de procesos de enseñanza, entre cuyas metas se busca que el alumno:

- Interprete* lo que se le propone
- Comprenda* la información dada y establezca relaciones con los comandos que provee el programa.
- Formule y compruebe conjeturas* acerca de los conceptos que está aprendiendo
- Diseñe* estrategias para confirmar o refutar sus conjeturas
- Resuma* la información incorporada
- Comunique* los resultados de sus hallazgos intentando definir aquello que logró construir.

### Un ejemplo para el espacio del desarrollo profesional del docente

Ejemplificaremos lo que propusimos en líneas anteriores a través del análisis de una actividad que permite caracterizar la gestión de la clase, así como el sentido que cobran los contenidos en la mediación tecnológica.

Partimos del siguiente enunciado que remite a una situación de la realidad:

*En un campo se quiere instalar un tanque de agua para abastecer a la casa principal, a la de los caseros y a un galpón de trabajo. Conviene que el tanque esté lo más cerca posible de la casa principal pero, por la frondosa arboleda que está a su alrededor y que no se quiere tocar, sólo puede instalarse a 500 m de la misma. La idea además, es que el tanque quede equidistante de la casa de los caseros y del galpón de trabajo. ¿Cuál es el modelo que se puede utilizar para tomar la decisión respecto de la construcción?*

Figura 1: Actividad de la guía de trabajo

El aula del curso de capacitación en el que un SGD (en nuestro caso, GeoGebra) hace su irrupción adquiere las cualidades de un taller y los docentes, en situación de participantes activos, la dotan de sentido cuando asumen una actitud proactiva que coadyuva a su formación profesional. Así, la primera decisión a tomar para resolver el problema y todavía no pensarse en el aula de la escuela secundaria sino como productor de conocimiento en su propio espacio específico de formación, es la de construir en la pantalla las representaciones que pueden aceptarse como modelo de las dos condiciones que el problema plantea: a) la distancia del tanque a la casa principal debe ser de 500m y b) el tanque debe estar a igual distancia de la casa de los caseros y del galpón. Para ello habrá que usar escalas y dar nombres a los puntos que representan a cada uno de los elementos nombrados (figura 2).

Esto supone establecer cuáles son los pasos de la construcción que deben darse; qué herramientas disponibles del software utilizar, qué condiciones ocultas a la vista se están dando por ciertas al entender la lógica del software: todas éstas, actividades que requieren de justificación (la circunferencia tiene un centro y un radio dado; el segmento puede tener cualquier longitud pero la recta que se pide sólo puede ser su mediatriz; aunque no se vea el sistema de ejes el software asume la lógica del sistema de referencia ortogonal con el que trabaja...).

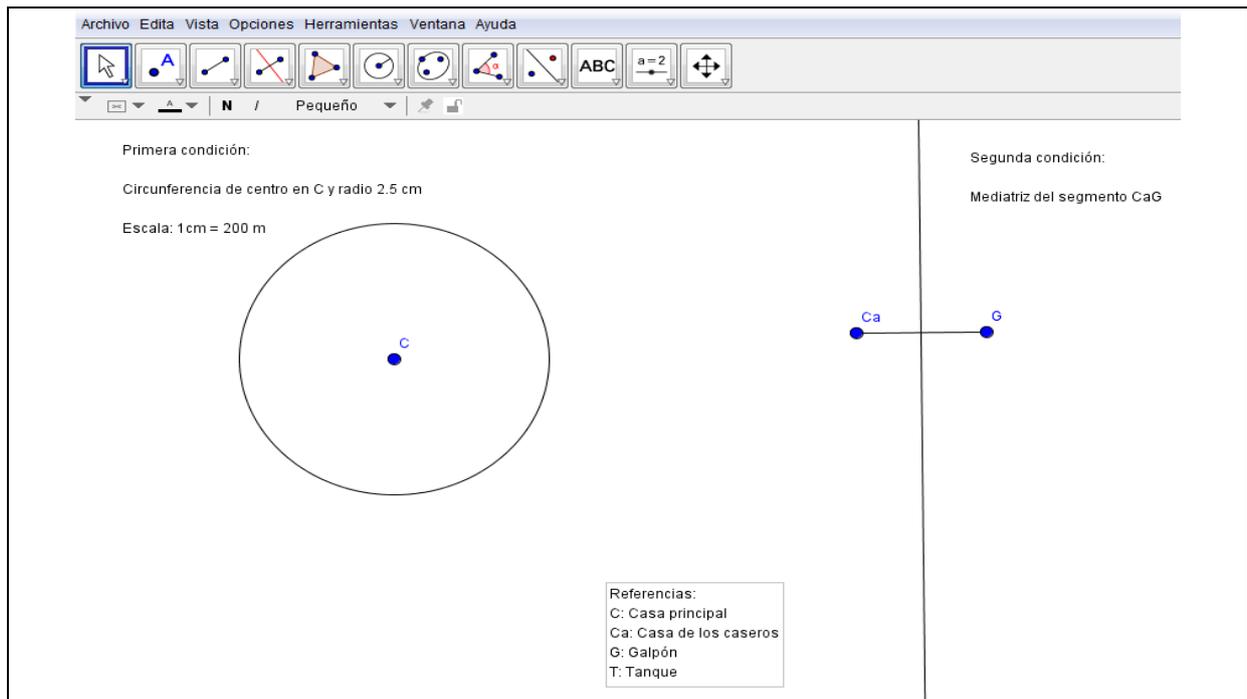


Figura 2: Posible intento de respuesta

El conflicto cognitivo para el que resuelve se establece al pedir que las dos condiciones se cumplan simultáneamente. Esto determina que la pantalla original debe dar lugar a una en la que ambos modelos den paso a uno solo del que se puedan extraer algunas conclusiones. La pantalla puede arrojar distintas figuras de análisis, en función del dinamismo que adquiere alguno de los puntos o de sus figuras. Si, por ejemplo, movemos el segmento  $C_aG$ , una posible figura de análisis es:

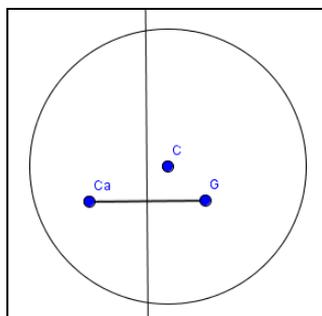


Figura 3: Estudio dinámico de la figura (caso 1)

El intercambio de ideas, la discusión, las argumentaciones basadas en propiedades surgen cuando se pide reflexionar sobre las respuestas a estas preguntas: ¿Cumple lo obtenido con el modelo que se está buscando? ¿Y si la figura que se mueve es otra y se obtiene esta pantalla?

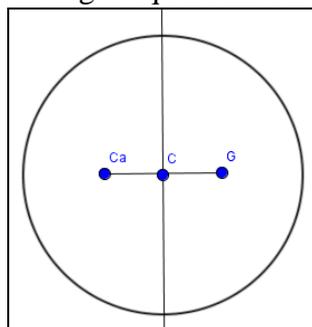


Figura 4: Estudio dinámico de la figura (caso 2)

La percepción de la figura puede hacer cambiar la respuesta por parte del resolutor. El dinamismo del punto que se desplaza por la pantalla y la aparición de otras, muchas, infinitas figuras, puede hacer cambiar la respuesta, aunque los argumentos lógicos que permitieron hallarla siguen siendo válidos y las conclusiones verdaderas: la circunferencia de centro en  $C$  y radio 5cm es el lugar geométrico de los puntos que modelizan la primera de las condiciones del problema y, la mediatriz del segmento  $C_aG$ , es el lugar geométrico de los puntos que lo hacen con la segunda de las condiciones.

La figura de análisis se convierte en objeto de conocimiento y sus atributos, elementos componentes de afirmaciones irrefutables: esta figura ya no es suficiente para resolver el problema en tanto la pantalla muta al plano de la argumentación y es sólo en el dominio de las propiedades que definen el lugar geométrico, donde la respuesta puede ser hallada.

El estudio de estas respuestas lleva a la construcción del modelo que cumple con las dos condiciones, que es aquel que muestra la intersección de ambos lugares geométricos y requiere de otra decisión: ¿cuál de los dos puntos de intersección  $P_1$  y  $P_2$  es el que se tomará como el punto  $T$  (ubicación del tanque)? ¿Es necesario tomar esta decisión? ¿Lo pide el enunciado de la situación que dio origen a este estudio?

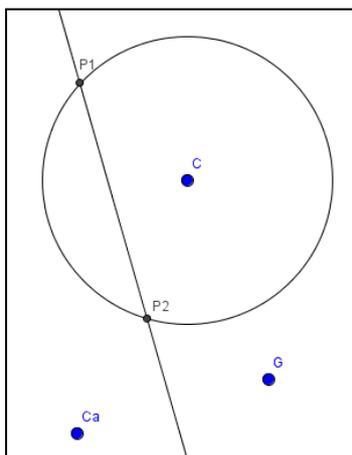


Figura 5: Estudio dinámico de la figura (caso 3)

Cuando la actividad finaliza con estas nuevas preguntas, surgen otras que vertebran el análisis didáctico y conforman el conocimiento específico que el docente debe construir como parte de su formación. Nuestro interés en interpelar el uso del recurso radica en reflexionar colaborativamente con el docente cómo se puede, en una situación de aula de escuela secundaria, gestionar la construcción de un saber geométrico por parte de los alumnos. Intentamos incorporar a ese conocimiento específico estrategias de desarrollo de las cualidades del trabajo matemático de los alumnos de la escuela secundaria cuando estudian y resuelven situaciones referidas a la geometría tales como:

- Diseñar modelos
- Emplear metáforas para comunicar hallazgos
- Organizar explicaciones e informes para comunicar descubrimientos y comprobaciones
- Diseñar estrategias para hallar soluciones justificando los pasos seguidos y la selección de los materiales elegidos para su concreción, así como los tiempos empleados
- Valorar su trabajo y del de sus compañeros
- Aceptar los errores y los mecanismos usados para su corrección

- Transferir lo aprendido a otros contextos de aprendizaje analizando: las ideas erróneas que se construyen a partir de las propias representaciones físicas de los objetos; el doble estatus de los objetos geométricos dado que el dibujo del objeto algunas veces es tomado como el objeto en sí mismo; la necesidad de una descripción discursiva que caracteriza al objeto para eliminar las ambigüedades inherentes a su representación

## CONCLUSIONES

En nuestra propuesta, los contenidos matemáticos a aprender aparecen mediados por problemas, para generar en los alumnos la necesidad de diseñar proyectos de solución y allí el SGD se constituye en una herramienta potente: deja de ser el protagonista de la argumentación para pasar a ser su sustento en tanto recurso, genera importantes variables en las condiciones a analizar que permiten barrerlas en menos tiempo y con mayor nivel de precisión.

La gestión de clase asumida como el proceso de diseño, ejecución, evaluación y generalización de las estrategias de enseñanza desplegadas por el docente, trae a un primer plano un proceso de negociación entre los intereses de los alumnos y los del docente. Los primeros se basan en la significatividad de los contenidos a desarrollar y en la naturalización en el uso de los SGD como nativos en un mundo tecnologizado y en los segundos en la epistemología subyacente a los contenidos que se presentan (Almirón, Bifano y Lupinacci; 2015). En esta negociación, el docente es el mediador natural entre los contenidos y los alumnos y mientras aquél diseña y formula problemas, éstos desarrollan estrategias de solución que en su conjunto determinan un proyecto de actividad en el aula.

El uso de SGD genera en las escenas de la matemática escolar la aparición de diferentes formas de introducir la prueba como elemento insoslayable de las redes conceptuales que sustentan las secuencias de enseñanza. En este espacio escolar, los alumnos pueden probar a través de la investigación gráfica y dinámica, analizando el comportamiento de objetos geométricos y de las relaciones existentes entre ellos pudiendo comprender conceptos y procedimientos matemáticos y a sentir la necesidad de realizar justificaciones y pruebas más formales. Los SGD ayudan al docente a conducir el proceso de enseñanza poniendo de manifiesto contradicciones y a usarlos para que se produzca en los alumnos un acercamiento al proceso de demostración formal. De esta forma los acerca a explicar por qué un resultado es matemáticamente cierto; a comunicar y transmitir las relaciones y propiedades matemáticas usadas y descubiertas al manipular los objetos dinámicos; a desarrollar el pensamiento lógico y abstracto; a sistematizar, organizando los resultados en un sistema deductivo de axiomas y teoremas y a descubrir y construir conocimiento matemático.

En nuestra propuesta, la herramienta tecnológica es utilizada como un medio para explorar de forma interactiva diferentes tipos de representaciones gráficas generando un escenario caracterizado por un ambiente que provee un rango de herramientas para construir objetos geométricos con una variedad de objetos primitivos (puntos, segmentos, líneas, etc.) que acompañan el guion de la clase pensada por el docente como un profesional de la enseñanza de la matemática.

## REFERENCIAS

- ALMIRÓN, A., BIFANO, F. y LUPINACCI, L. 2015. An approach to the study of systems of equations with GeoGebra: Learning opportunities provided by the integration of CAS View. Story of a workshop experience with teachers. *The international journal for technology in mathematics education*. V22 (4).

- BIFANO, F. y VILLELLA, J. 2012. Saberes contruidos con (en) problemas dinámicos: ¿otros objetos del saber? *Didactique des mathématiques. Approches et enjeux*. <http://www.colloqueartigue2012.fr>
- CEDE (2015) *¿Va de retro lápiz y papel? Estrategias para el uso de Software de Geometría Dinámica en el aula de matemática*. Material de trabajo del curso INFD Nuestra Escuela. Buenos Aires: UNSAM.
- FERRAGINA, R. Y LUPINACCI L. 2012. Los puntos en su lugar, en: FERRAGINA, R (ed) *GeoGebra entra al aula de Matemática*. (Miño y Dávila. Buenos Aires).
- FIORITI, G. y OTROS. 2014a. *Matemática 1/2*. (Ediciones SM. Buenos Aires).
- FIORITI, G. y OTROS. 2014b. *Matemática 2/3*. (Ediciones SM. Buenos Aires).
- FIORITI, G. y OTROS. 2014c. *Matemática 7/1*. (Ediciones SM. Buenos Aires).
- FIORITI, G. (comp). 2016. *Recursos tecnológicos para la enseñanza de matemática*. (Miño y Dávila-UNSAM Edita. Buenos Aires). (en prensa)
- KUZNIAK, A. y RICHARD, P. 2014. Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, México, v. 17, 4-I, 5-15.
- VILLELLA, J. 2008. *Uno, dos, tres... Geometría otra vez*. (Aique. Buenos Aires).
- VILLELLA, J. y AMMANN, S. 2012. Una interpelación al rol docente- la incorporación de Tic en la enseñanza de la matemática. *Didactique des mathématiques. Approches et enjeux*. <http://www.colloqueartigue2012.fr>
- VINNER, S. (1982) Concept definition, concept image and the notions of function *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, n° 14, 239-305.