CB11

ESTUDIANDO EL CAMBIO: UNA PROPUESTA PARA LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL EN EL NIVEL SECUNDARIO

Fernanda Viola & Estela Nieto

FAMAF-Universidad Nacional de Córdoba
Av. Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria- Córdoba
Colegio Alemán Córdoba
Av. Recta Martinoli 6150- Córdoba
fviola@famaf.unc.edu.ar; estela.nieto@gmail.com

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación: Relato de experiencia de enseñanza, Educación Secundaria

Palabras Clave: cambio acumulado, integral, razón de cambio, TIC, resolución de problemas

RESUMEN

El presente trabajo muestra los resultados de una experiencia para la introducción al estudio del cálculo realizada en un curso de 6º año de una escuela secundaria de la ciudad de Córdoba.
A diferencia de lo que se enseña tradicionalmente en la escuela, la propuesta comienza con el estudio del cambio acumulado y la razón de cambio para introducir las nociones de integral y derivada desde las intuiciones de los estudiantes sobre variación, cambio y movimiento. Las actividades estuvieron mediadas y sustentadas por el uso de TIC, las que posibilitaron una construcción de sentido de las nociones trabajadas. En particular, en este trabajo presentaremos las actividades en relación al estudio del concepto de integral.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del cálculo diferencial e integral está ampliamente reconocida. Es frecuente ver una secuencia de enseñanza que comienza con conceptos de Números Reales para luego trabajar Límites, Derivadas y finalmente Integrales. Este orden en la presentación de los conceptos también es común en los libros de textos usuales. Ahora bien, ¿qué vinculación existe entre este modo de aproximación al estudio del cálculo y los modos de describir matemáticamente la variación de los procesos que modelizan el mundo físico y material?
De acuerdo a varios autores (Dolores, 2000; Salinas and Alanis, 2009), el cálculo se introduce hoy en las aulas desde una aproximación abstracta que provoca una importante descontextualización. Esta axiomatización del cálculo dotada de rigor matemático, muy presente en la enseñanza, se alejó en cierta forma de las interpretaciones de los problemas de variación y cambio que dan sentido a los conceptos a estudiar.

RELATO DE LA EXPERIENCIA: UN CAMINO POSIBLE

Todo el cálculo diferencial se puede reducir a un concepto fundamental: la razón de cambio. Determinar razones de cambio de procesos continuos es muchas veces más importante que estudiar estos procesos. En este sentido, se comenzó a partir de una situación en un contexto físico con referencia a una semirrealidad. El problema que se plantea inicialmente consiste en obtener datos sobre la distancia recorrida por un automóvil, contando solamente con datos sobre su velocidad.

Actividad 1

Física Forense: En un lugar de la ruta 56, exactamente a 1600 metros de la estación de peaje, se encontró un auto con el cadáver de Juan Pérez. La policía averiguó que un único automóvil pasó por esa estación, y era conducido por Mario López. Este conductor afirma que cuando él pasó por la ruta, no vio ningún automóvil. Una filmación muestra que a las 12:56 hay un auto junto al de Juan Pérez. El ticket de peaje de Mario López muestra que pasó por allí a las 12:54. La policía dispone de los datos de la velocidad del auto de López en esos dos minutos, y observa que a las 12:56 la velocidad es cero y averiguó que se desplazó siempre en línea recta y en el mismo sentido, por lo que necesita determinar con la mayor precisión posible si López se detuvo a las 12:56 junto al auto de Pérez.

Tiempo (en segundos)	Velocidad (en m/s)
15	11.11
28	18.6
32	20
34	20
56	10.56
110	17.22
120	0

No se propone ningún recurso particular para abordar el trabajo, es decir, solo se da la consigna en formato papel. Entre las variables didácticas planteadas para esta primera actividad, consideramos:

- No tomar intervalos regulares para evitar que pretendan encontrar alguna regularidad.
- Proporcionar pocos pares de datos.
- No informar la velocidad para el tiempo inicial 0.
- Determinar que el móvil se desplaza siguiendo un movimiento rectilíneo en un solo sentido.
- Dar como condición una distancia puntual que implique, en el contexto del problema, un dato a comparar con los resultados posibles.
- Utilizar como unidad de velocidad m/s.

A partir de algunas nociones de cinemática, los alumnos fueron calculando la distancia recorrida para cada intervalo. Se plantearon dudas respecto de la velocidad en el tiempo t=0, y se los alentaba a tomar decisiones al respecto. Así, algunos consideraron que era nula, otros que era de 11,11m/s. Todos consideraron la velocidad constante en cada intervalo de tiempo, sin embargo, tenían que decidir qué velocidad tomaban en cada uno: algunos consideraron la velocidad que adoptaba en el extremo izquierdo del intervalo, otro grupo en el extremo derecho de cada intervalo, y un grupo trabajó la velocidad promedio de cada intervalo;

algunos consideraron que la velocidad en el tiempo 0 era nula, y otros que era la misma que a los 15 seg. El hecho de que apareciera el valor 0 (como velocidad o como tiempo inicial) provocaba ciertas discusiones:

Alumno 1 (A1): Cuando el auto está en el peaje está parado, entonces ahí la velocidad es cero.

A2: Pero a lo mejor tiene el CUIS entonces no para, pasa más despacio. Desde que pasa por el peaje hasta el segundo 15 va a 11,11 m/s.

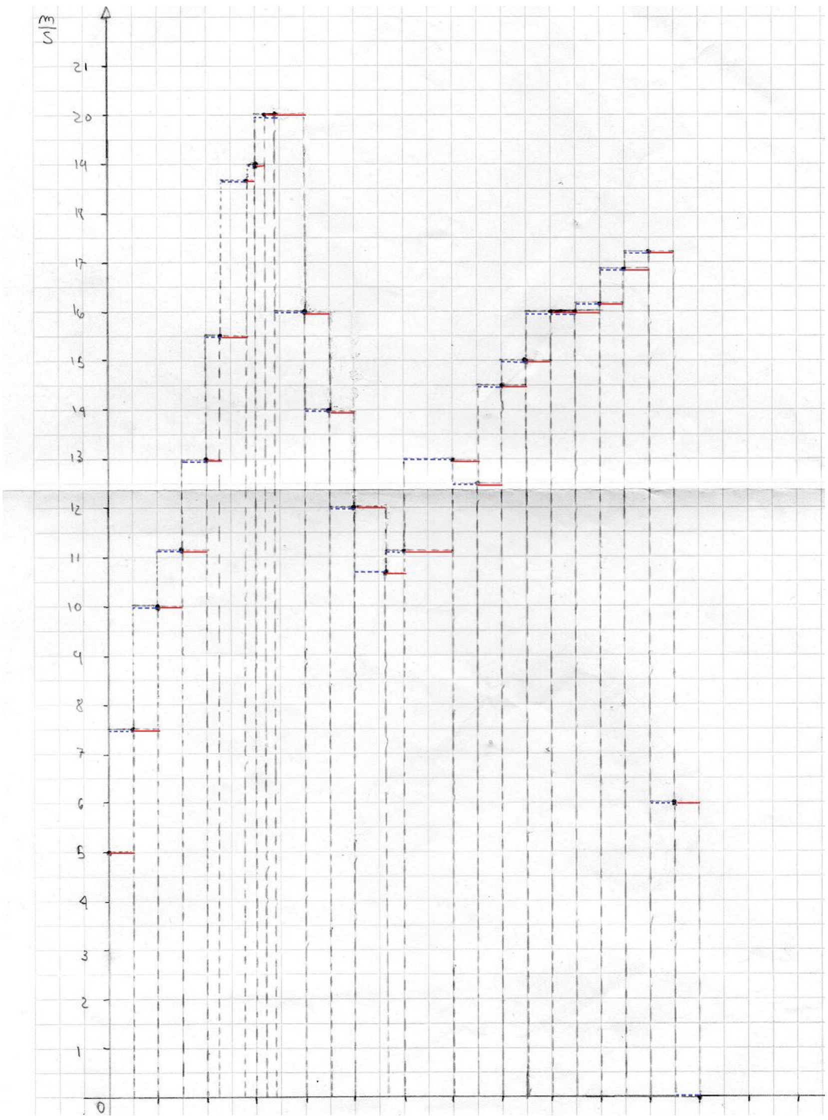
En otro grupo, que había tomado la velocidad del extremo derecho del intervalo, se encontró con dificultades al considerar la v=0 para el último intervalo.

A3: No puede ser que en 10 segundos esté parado. Vamos a usar la velocidad 17,22 m/s porque que esté en cero significa que está parado y eso pasa en el segundo 120 no antes.

Luego de consensuar qué valor de velocidad tomar en cada intervalo, sumaban las distancias recorridas en cada intervalo.

Con estas respuestas, se inició una discusión colectiva. Los distintos grupos presentaban sus resultados y notaron que las diferencias entre las respuestas eran notables: se “pasaban” del punto donde se encontraba el auto de Pérez o no llegaban al mismo. La distancia dependía entonces de los valores de velocidad que tomaran en cada intervalo.

Un alumno propuso recurrir a un gráfico, donde reflejaba el producto entre velocidad y tiempo en términos de áreas de rectángulos:



Analizan el gráfico entre todos los alumnos. Allí reconocen el área de los distintos rectángulos y que el dato que buscan es la suma de estas áreas. Además, el alumno consideró que la velocidad para t=0 es v=5.

En este gráfico remarcamos con segmento completo rojo los lados de los rectángulos tomando como velocidad del intervalo el dato a izquierda; y con segmento punteado azul, los lados de los rectángulos tomando como velocidad del intervalo el dato a la derecha del intervalo. Se puede notar que, al tomar los valores de velocidad correspondientes a uno de los extremos del intervalo, la suma de las áreas no corresponden ni a la suma inferior ni a la suma superior.

A partir de esta observación, la profesora interviene para que surja la noción de suma inferior y superior.

Profesora (P): ¿Cómo podríamos calcular la distancia mínima?

A3: Y… en el primer intervalo tomamos v=0.

P: ¿Y en el segundo intervalo?

A3: Ahí la v=11,11.

A4: Tomamos siempre la velocidad menor del intervalo.

P: ¿Y si queremos calcular la distancia máxima recorrida?

A5: Tomamos la velocidad máxima en cada intervalo.

Los cálculos quedaron en el pizarrón:

Velocidad mínima:

[0;15) → v=0	d=0x15=0
[15;28) → v=11,11	d=11,11x13=144,43
[28;32) → v=18,6	d=18,6x4=74,4
[32;34) → v=20	d=20x2=40
[34;56) → v=10,56	d=10,56x22=232,32
[56;110) → v=10,56	d=10,56x54=570,24
[110:120) → v=0	d=0x10=0
	Distancia total: 1061,39 m

Velocidad máxima:

[0;15) → v=11,11	d=11,11x15=166,65
[15;28) → v=18,6	d=18,6x13=241,8
[28;32) → v=20	d=20x4=80
[32;34) → v=20	d=20x2=40
[34;56) → v=20	d=20x22=440
[56;110) → v=17,22	d=17,22x54=929,88
[110:120) → v=17,22	d=17,22x10=172,2
	Distancia total: 2070,53 m

A3: Si tomamos las velocidades mínimas López entonces paró mucho antes de donde estaba el auto de Pérez. Pero si tomamos las velocidades máximas, López pasó por al lado del auto, si dijo que no vio nada ¡está mintiendo!

A4: ¿Cuál es la respuesta correcta Profe?

A1: ¡Cómo lo vamos a saber con este puñadito no más de datos!

P: ¿Qué les parece que necesitan para poder dar una respuesta más aproximada?

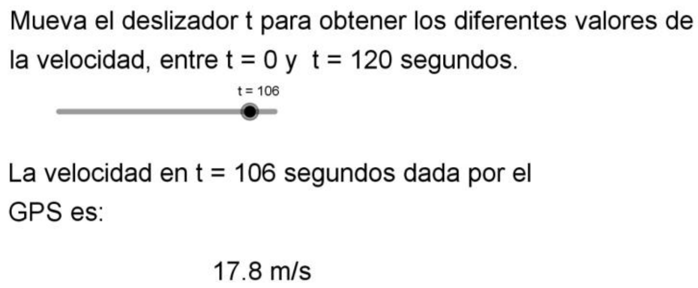
A1: Y, necesitamos más datos…

En la segunda clase, recuperamos el trabajo anterior y aportamos los datos que se obtienen con el deslizador.

Actividad 2

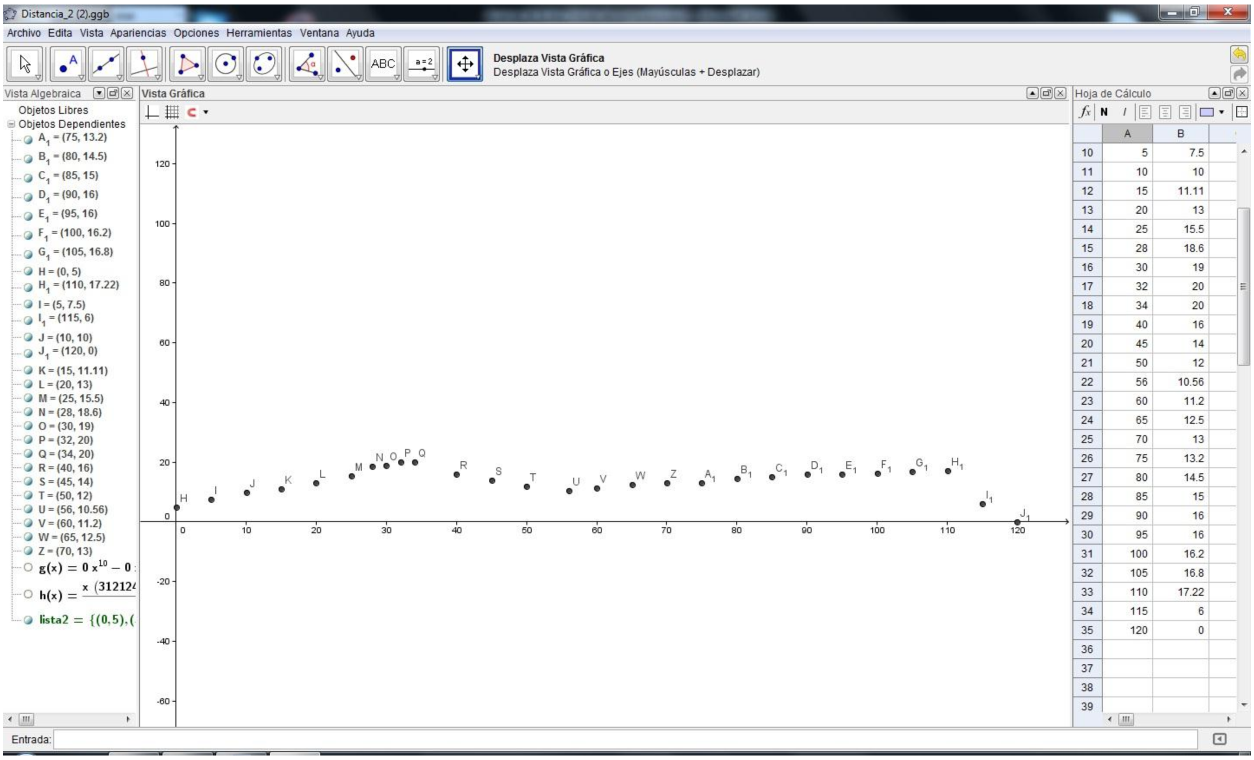
Debido a la discrepancia entre los resultados obtenidos por los forenses, se vio la necesidad de disponer de mayor cantidad de datos. En la plantilla Geogebra encontrarán un deslizador que les permite acceder a los datos que consideren necesarios dentro de ese período de tiempo. Determinen la distancia recorrida por el móvil.

Introducimos aquí una vista gráfica de la plantilla: el deslizador permite obtener una lectura de la velocidad en todo momento (para una cierta discretización de la recta con 2 decimales).

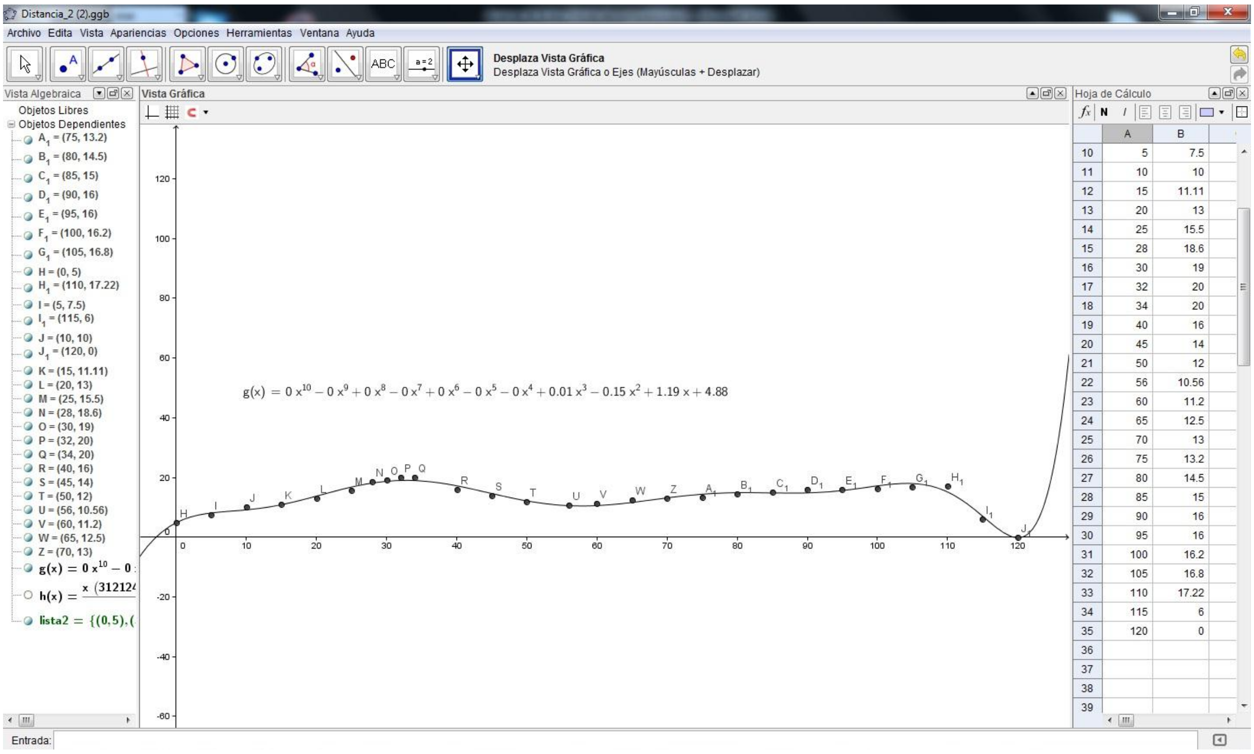


Con esta información, intentan completar la tabla que tienen en la actividad 1, para luego realizar los cálculos d=v.t con estos nuevos datos.
A3: Veamos en t=0
A6: ¿Y si tomamos valores exactos?
P: ¿A qué te referís con exactos?
A2: Que no tengan decimales.
A1: Busquemos en los huecos que teníamos en la tabla.
A7: Veamos en 90 segundos.

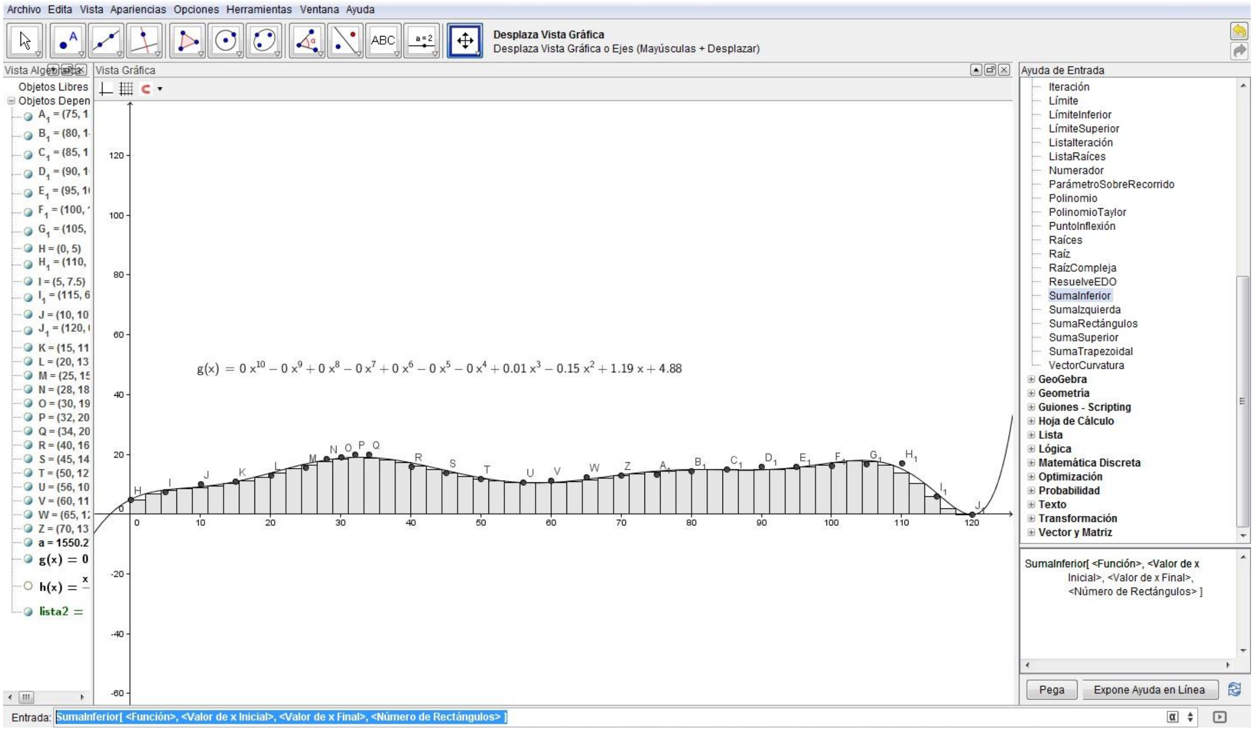
Cuando no logran ubicar el deslizador exactamente en el t buscado, toman un valor aproximado.
A4: Lo mejor sería hacerlo de 0 a 120 cada segundo para ser más preciso.
A1: Pero es mucho trabajo, sería mejor cada 5 segundos.
P: ¿Es necesario que los intervalos tengan la misma amplitud?
A1: A mí me gustaría que fueran iguales así hay algo constante.
A partir de esta discusión, deciden mantener la amplitud del intervalo y consideran que con intervalos más pequeños se consigue mayor precisión.
Decidieron tomar datos de la velocidad segundo a segundo, comienzan a completar la tabla… al llegar a t=20 se dieron cuenta de que debían considerar 120 pares ordenados, entonces cambiaron y tomaron cada 5 segundos.
La profesora les propone graficar los rectángulos tal como había hecho uno de los alumnos la clase anterior. Como son muchos datos, arman la tabla en una hoja de cálculo de GeoGebra y grafican los puntos en la vista gráfica.



A diferencia de lo que se trabajó en la actividad anterior (con el recurso lápiz y papel), para utilizar SumaInferior o SumaSuperior, GeoGebra demanda la expresión de la función. Es así como es necesario introducir algún ajuste de curva apropiado. Para no desviar el foco de la discusión se va a trabajar con un ajuste determinado, tomando un orden 10 para mayor precisión.



Para hacer los “rectangulitos”, hacemos uso primero de la función de GeoGebra: SumaInferior[<Función>,<Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>,<Número de Rectángulos>]
La función es g(x), el valor inicial es el t=0 y el valor final es t=120. Respecto al número de rectángulos, si tomaron intervalos de 5 segundos de amplitud, entonces tienen 120/5 intervalos, es decir, 24 rectángulos.



De la misma manera, usan la función “SumaSuperior”.
A1: Con 24 rectangulitos quedan partes en blanco. Tomemos 120 rectangulitos, de a un segundo.
Eligen 120 rectángulos y observan nuevamente el gráfico. Luego proponen tomar 1200 y 12000 rectángulos. Vamos anotando los resultados en el pizarrón:

n: cant. de rectángulos	SI	SS
24	1482,32	1722,89
120	1580,75	1629,29
1200	1602,69	1607,54
12000	1604,82	1605,41

A2: Las sumas inferiores cada vez son más grandes y las sumas superiores cada vez son más chicas, en algún momento se van a chocar, van a ser iguales[1].
P. ¿Por qué les parece que van a igualarse los valores? Noten que cada suma inferior va aumentando y cada suma superior va disminuyendo:
La profesora escribe en el pizarrón:

$$s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < \ldots < S_4 < S_3 < S_2 < S_1$$

[1] Este grupo en particular, ya había trabajado una aproximación al concepto de límite, por lo que algunos alumnos identificaron este “choque” como un límite al que tienden la suma inferior y la suma superior. En otro grupo, sin el trabajo anterior sobre la noción de límite, el concepto se admitió con naturalidad.

Llegado a este punto, se introduce la noción de integral definida en un intervalo, con su notación. Esto nos trajo un problema... a salvar en la marcha. Mientras el problema plantea una función v(t), GeoGebra siempre muestra una función g(x), así que tuvimos que "traducir" el lenguaje.
P: Las sumas inferiores y las superiores tienden a un valor que llamaremos integral de g(x) entre 0 y 120. La notación es

$$\int_0^{120} g(x)\,dx \tag{1}$$

P: En el caso de nuestro problema, sería

$$\int_0^{120} v(t)\,dt \tag{2}$$

A2: ¿Qué es dt?
P: dt es la amplitud de cada intervalo, que primero era de 5 seg, después de 1 seg y cada vez se hacía más pequeño. Calculemos la integral con GeoGebra. Para ello usamos el comando Integral[<Función>,<Extremo inferior del intervalo>,<Extremo superior del intervalo>]
Los alumnos calculan la integral y la profesora escribe el resultado en el pizarrón:

$$\int_0^{120} v(t)\,dt = 1605{,}11 \tag{3}$$

P: ¿Qué podemos concluir ahora en relación a lo que nos pedía el problema?
A8: El auto de López entonces paró al lado del de Pérez.
A3: ¡Yo sabía que López estaba mintiendo!

Profundizando conceptos

A partir de esas primeras actividades introductorias, se trabajaron problemas y ejercicios de profundización; algunas de ellas para cuestionar la relación entre el valor de la integral y el área bajo la curva. En todas las actividades se proponía el uso de GeoGebra para su resolución. En particular, presentaremos una de los problemas propuestos ya que, a partir de las discusiones que se generaron al resolver el mismo, pudimos avanzar en el concepto de integral indefinida.

Actividad

Para un móvil que parte del reposo, la función v(t)=9t permite determinar su velocidad v medida en km/h, respecto del tiempo de marcha t, medido en horas.

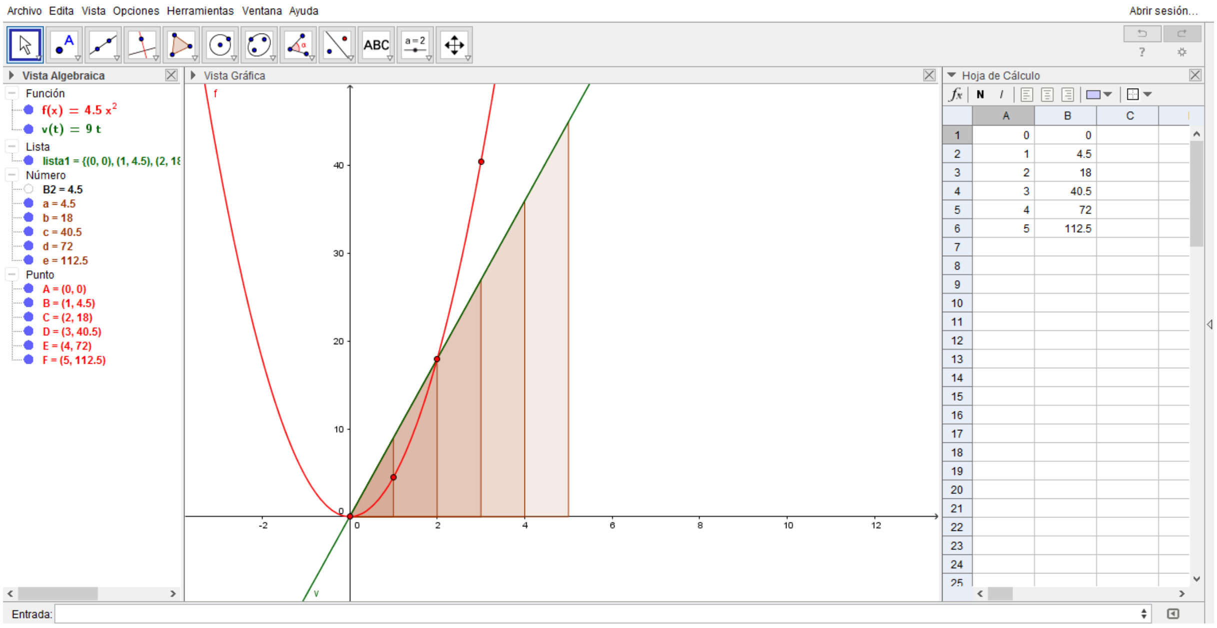
a. *Encuentren una función que permita calcular el espacio recorrido por el móvil después de t horas de marcha.*
b. *¿Cuántos km recorre el móvil después de 15 hs de estar en continuo movimiento?*

Para responder el primer ítem, al no tener el valor del extremo superior, los alumnos fueron calculando el valor de la integral para intervalos (0;t) con distintos valores de t. Fueron realizando los gráficos y buscando alguna regularidad en los resultados obtenidos. Así notaron que el valor 4,5 se multiplicaba por el cuadrado del valor de t, siendo 4,5 la mitad de 9 que era el valor del coeficiente de t en la función que estaban integrando.

Colocando los valores hallados en una tabla tenemos:

t	$\int_0^t v(t)\,dt$
0	0
1	4,5
2	18
3	40,5
4	72
5	112,5

Ubicando los pares de puntos en el sistema de ejes cartesianos y con el comando ajuste polinómico encontraron la función de grado 2.



La curva que ajusta los puntos obtenidos es:

$$f(t) = \frac{9}{2}t^2 \qquad (4)$$

Esta es la respuesta al primer ítem del problema. Pero la docente agregó otra:
P: ¿Podemos decir que es esta la función posición del móvil?[2]
A3: No!, porque no sabemos de dónde sale…por ejemplo, si sale de Córdoba y recorre 30 km, no es está en la misma posición que si sale de Carlos Paz y recorre 30 km.
P: Si quisiéramos escribir la función posición, ¿qué dato deberíamos tener?
A1: La posición inicial…
A3: …entonces hay infinitas posibilidades…

[2] Este grupo de alumnos había cursado "Física" el año anterior, y podrían diferenciar "distancia recorrida" y "función posición".

A partir de esta observación, los alumnos proponen como función:

$$f(t) = \frac{9}{2}t^2 + c \tag{5}$$

Llegaron como conclusión a que el espacio recorrido por el móvil para un cierto tiempo t se puede definir como:

$$\int 9t\,dt = \frac{9}{2}t^2 + c \tag{6}$$

CONCLUSIONES

A partir de esta experiencia, evidenciamos que los alumnos arribaron al concepto de integral desde su intuición, construyendo el sentido del cambio acumulado, el área bajo una curva y la relación entre ambas ideas. Estas relaciones fueron surgiendo a partir del trabajo con el software dinámico GeoGebra, el cual permitía observar distintas aproximaciones. El modelo dinámico que sustenta esta experiencia permite no solo explorar las relaciones emergentes, sino que también es una vía para entender el concepto matemático que está en juego. En este sentido, coincidimos con lo que plantea Moreno-Armella (2011): "las herramientas y artefactos que median la cognición humana no son epistemológicamente neutros", ellos nos permiten aproximarnos a nociones y conceptos desde una perspectiva diferente.

El uso de TIC implicó también una modificación en el tipo de tareas a proponer a los alumnos. En este sentido, el GeoGebra no sirvió para validar ciertas operaciones sino que las actividades diseñadas necesitaban de un recurso que permitiera su abordaje. Estas tareas implicaban además el análisis, la reflexión y la discusión, por lo que se propuso a los alumnos trabajar en grupos.

> "Como premisa básica, se asume que las nuevas tecnologías incorporadas en las clases de Matemática no tienen simplemente un papel de suplementación sino de reorganización, que constituyen (…) un colectivo pensante, un sistema constituido por seres humanos y dispositivos tecnológicos de diversa naturaleza (...) que generan, en conjunto, conocimientos matemáticos." (Villarreal, 2004)

Observamos, por otro lado, que los alumnos construyeron los conceptos matemáticos a partir de situaciones que le permitían encontrar sentido a estas nuevas herramientas. Incluso alumnos que normalmente no participan en la clase, mostraron una actitud de mayor compromiso con la tarea, involucrándose con el trabajo matemático. Luego, la formalización de los conceptos puestos en juego resultó natural, como así también su generalización.

Nos resta ahora seguir analizando la propuesta y pensar en la continuidad de la misma, incursionando en la enseñanza de la derivada desde las intuiciones de los estudiantes sobre variación, cambio y movimiento.

REFERENCIAS

- DÁVILA-ARAIZA, M. T. & MORENO-ARMELLA, L. 2014. Intuición y movimiento: hacia una redescripción de las ideas intuitivas del cálculo. En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak& P. Richard (Eds.), Proc. Fourth ETM Symposium, Madrid, España, 353-369.

- DOLORES C. 2000. Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (coord), *El futuro del cálculo infinitesimal*. *Capítulo V: ICME-8* (Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F.) , 155-181.
- MORENO ARMELLA, L. 2011. ¿Cómo impactan las tecnologías los currículos de la Educación Matemática?, Resúmenes de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife, Brasil.
- SALINAS, P. & ALANIS, J. A. 2009. Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12(3), 355-382.
- VILLARREAL, M. 2004. Transformaciones que las tecnologías de la información y la comunicación traen para la educación matemática. Yupana. Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral, 1, 41-55.