CB08

CÓMO UTILIZAN LOS ESTUDIANTES DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA A LA DEMOSTRACIÓN COMO HERRAMIENTA DE PRUEBA. ESTUDIO DE UN CASO AL CARACTERIZAR FAMILIAS DE POLIEDROS.

Cruz María Florencia, Mántica Ana María & Götte Marcela

Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral,
Ciudad Universitaria s/n, Santa Fe, Argentina.
ma.florenciacruz@gmail.com, ana.mantica@gmail.com, marcelagotte@gmail.com

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación:
Trabajo de Investigación**,** Educación Superior y Educación Matemática en la formación de Profesores. Metodología de investigación cualitativa.

Palabras Clave: futuros profesores, familias de poliedros, tipos de pruebas

RESUMEN

Se presenta el análisis de lo realizado por un binomio de estudiantes del Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral en el proceso de fundamentar características particulares que reúnen grupos de poliedros para pertenecer a una familia determinada. Estos alumnos participan de un trabajo previo que tiene como objetivo estudiar las características que tienen en cuenta para formar familias de figuras poliédricas las que se clasificaron en tres tipos: particionales, inclusivas y solapadas.
Se reflexiona sobre las interacciones del binomio, al validar sus afirmaciones cuando se les presenta una familia de tipo solapada, sobre un universo dado de poliedros. Se dispone para el análisis de grabaciones de audio y video y artefactos escritos. En función de estas interacciones, se realiza una categorización del tipo de pruebas empleado durante el proceso, considerando como marco de referencia el estudio realizado por Balacheff (2000). El binomio analizado sólo utiliza pruebas pragmáticas (empirisismo ingenuo, experimento crucial y ejemplo genérico). Si bien los estudiantes están habituados a realizar demostraciones formales consideramos que el material empleado para representar los poliedros pudo haber influenciado en el tipo de pruebas realizadas.

INTRODUCCIÓN

La investigación que presentamos se lleva a cabo con alumnos de tercer año del Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral. Al momento de realizar la indagación los estudiantes que participan cursan Taller de Geometría, materia de tercer año correspondiente al plan de estudio, previamente han cursado, entre otras asignaturas, Geometría Euclídea Plana (GEP) y Geometría Euclídea Espacial (GEE). En el Taller de Geometría se trabajan problemas de síntesis y profundización de los contenidos de GEP y GEE, generando espacios que permiten a los alumnos elaborar sus propias conjeturas y analizar su validez para luego demostrar.
El objetivo de nuestra propuesta no es lograr el aprendizaje de una noción matemática determinada, sino crear las condiciones de un debate de prueba para analizar los tipos de pruebas

que utilizan los estudiantes al validar sus afirmaciones. Los alumnos que intervienen en la propuesta participan de un trabajo previo en el marco de esta investigación durante el cursado de la cátedra GEE. El propósito de la misma es conocer las características que tienen en cuenta los estudiantes para formar familias de figuras poliédricas y observar el tipo de clasificaciones que realizan. La clasificación que se utiliza en el análisis del trabajo que elaboran once estudiantes del Profesorado de Matemática, se determina teniendo en cuenta el análisis previo realizado considerando el universo de diez poliedros con el que se trabaja y los resultados de las investigaciones de los autores De Villiers (1994) y Guillén (1991, 2005), las clasificaciones determinadas son las siguientes:
Clasificaciones particionales: las familias que los forman no tienen poliedros en común.
Clasificaciones inclusivas: existe una relación de inclusión entre todas las familias determinadas. Cada familia excepto el universo está incluida en otra.
Clasificaciones solapadas: son las no inclusivas ni particionales.
La propuesta que presentamos en este trabajo se lleva a cabo con cuatro estudiantes, reunidos en binomios, del grupo que participa de la experiencia mencionada anteriormente. En el presente trabajo se analizan las interacciones de uno de los dos binomios y se clasifican los tipos de pruebas que utilizan para validar sus afirmaciones. Balacheff (2000) considera que la característica principal de esta situación es que los estudiantes tienen como tarea resolver juntos un problema.

MARCO DE REFERENCIA

Respecto a las interacciones entre los estudiantes al resolver una situación determinada Quaranta y Wolman (2003) sostienen que los intercambios, las explicitaciones, las confrontaciones y las justificaciones entre alumnos son un factor de progreso. Esto permite construir el camino para validar el trabajo que se hace. El trabajo conjunto entre alumnos es positivo porque "facilita coelaboraciones en el proceso de buscar juntos soluciones, mediante la coordinación de los procedimientos para alcanzar un objetivo determinado" (p.195). Las autoras consideran que el proceso de buscar soluciones conjuntas demanda considerar lo que dice el otro, las sugerencias que realiza, justificar las elecciones propuestas. Esto provoca intercambios que permiten tomar conciencia sobre algún aspecto del problema que no ha sido considerado y descubrir nuevos aspectos, cuestionar otros, etc.
Quaranta y Wolman (2003) indican que la interacción entre estudiantes encuentra determinadas limitaciones como por ejemplo que alguno de ellos asuma la dirección de la solución y que los otros la acepten sin cuestionamiento, por considerar que ese alumno es "bueno" en matemática, o que algún participante se oponga sistemáticamente a las propuestas del resto sin utilizar argumento de orden matemático.
Balacheff (2000) considera que utilizar situaciones de interacción social tiene como propósito que los alumnos compartan el significado del problema, y no que solamente se apropien del mismo; una situación de interacción y de comunicación permite un acceso eficaz a las concepciones de los estudiantes y los procedimientos que ellos utilizan. El autor sostiene que proponer problemas y copilar las condiciones que se consideran más favorables no es suficiente para que los alumnos lleven a cabo procesos de validación y que ellos dispongan como herramienta de prueba a la demostración no es suficiente para garantizar que la utilicen. También afirma que una situación que reúna las características de situación social no es condición necesaria ni suficiente para asegurar la producción de pruebas.
El autor realiza clasificaciones referidas a tipos de pruebas con estudiantes de 4° y 5° grado reunidos en binomios que consideraremos para este análisis. Previo a la clasificación el investigador precisa los términos explicación, prueba, demostración y razonamiento.

Considera que explicación no es necesariamente una cadena deductiva, se asienta en los conocimientos del locutor y en su racionalidad para establecer y garantizar la validez de una proposición, es decir, en sus propias reglas de decisión de la verdad. La prueba es una explicación reconocida y aceptada por una comunidad, hace referencia a un proceso social ya que el discurso que asegura la validez de la proposición deja de ser solo posición del individuo que lo afirma; la posición no es definitiva puede evolucionar con el avance de los saberes en los que se sostiene, una prueba puede ser aceptada por una comunidad y rechazada por otra. La demostración es un tipo de prueba preponderante en matemáticas, constituida por una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto determinado de reglas definidas en el seno de la comunidad matemática; los procesos sociales en el seno de esta comunidad juegan un importante papel, la comunidad matemática se caracteriza por la elección de los axiomas lógicos con los que trabaja. El razonamiento es una actividad intelectual que tiene por objetivo producir una nueva información a partir de la dada o adquirida, esta actividad no es completamente explícita; se considera proceso de validación cuando tenga como fin asegurar la validez de una proposición. (Balacheff, 2000).

Balacheff (2000) sostiene que los tipos de pruebas que producen los estudiantes son diversos. Considera por un lado pruebas pragmáticas que son prácticas y recurren a la acción real o a la ostensión y por otro lado pruebas intelectuales que son teóricas y la justificación de la actividad se apoya en la formulación de propiedades.

Balacheff (2000) diferencia dos tipos de pruebas pragmáticas:

- empiricismo ingenuo, en el cual se verifica una proposición para cierto número de casos y se establece la conjetura.
- experiencia crucial, se utiliza este término cuando el estudiante verifica una proposición para un caso que considera tan poco particular como le es posible, es decir, reconoce explícitamente el problema de la generalización. El autor considera también como una acepción particular de este tipo de prueba lo que propone Francis Bacon, quien sostiene que es una experiencia que permite optar entre dos hipótesis, siendo sólo una verdadera.

Un caso especial es el tipo de prueba que denomina ejemplo genérico, puede considerarse en la categoría de las pruebas pragmáticas cuando el alumno hace explícitas las razones de verdad de una conjetura mediante operaciones o transformaciones de un ejemplo particular que considera representante de su clase y puede considerarse en la categoría de las pruebas intelectuales cuando el estudiante utiliza un ejemplo como un medio para lograr expresar su prueba.

El autor distingue dos tipos de pruebas intelectuales:

- experiencia mental, en la que se interioriza la acción y se separa de un ejemplo particular, aparece como un medio para fundamentar la solución planteada;
- cálculo sobre enunciados, aparecen cuando el estudiante realiza un cálculo inferencial sobre enunciados, estas prueban no pueden reconocerse verdaderamente como demostraciones.

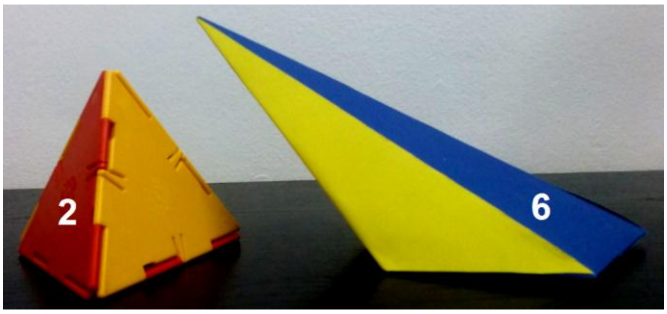
METODOLOGÍA Y DISEÑO DE ACTIVIDADES

La presente investigación es cualitativa y se utiliza una metodología exploratoria de estudio de casos. Los sujetos seleccionados para este trabajo no constituyen una muestra representativa, pues no pretendemos llegar al establecimiento de leyes generales ni ampliar el conocimiento teórico, sino que a partir de los datos obtenidos realizamos el análisis detallado de las actuaciones de los estudiantes. (Cohen y Manion, 1990).

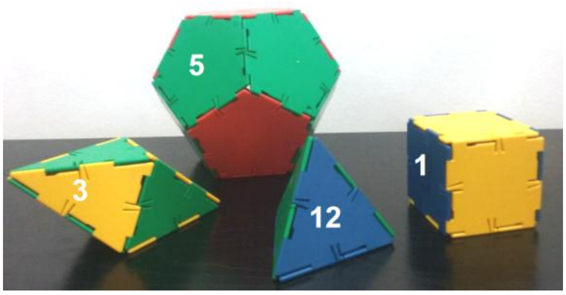
Se implementan entrevistas no estructuradas que se realizan en forma personal, promoviendo una interacción directa entre estudiantes y entrevistador. Registramos la información obtenida

a través de artefactos escritos y de grabaciones en audio y video, de modo que los audios e imágenes constituyan un insumo de análisis y permitan estimar la fiabilidad del estudio (Cohen y Manion, 1990).
Las entrevistas se realizan con cuatro alumnos mientras cursan la cátedra Taller de Geometría, reunidos en binomios, cada uno de ellos constituido por un alumno que ha acreditado la asignatura GEE y otro que no, pero ha finalizado su cursado. La muestra seleccionada es intencional y se toma teniendo en cuenta que las interacciones, entre alumnos en igualdad de condiciones en relación con su conocimiento, permiten la exteriorización de las concepciones, de los proyectos y de la toma de decisiones (Balacheff, 2000). Durante esta instancia los entrevistados cuentan con el material bibliográfico utilizado en las geometrías euclídeas del plan de estudio.
En la implementación de las entrevistas se presentan a los estudiantes cuatro familias de poliedros, cuyo universo son diez poliedros. Para el desarrollo de la propuesta se construyen modelos de dichos poliedros en materiales manipulativos, ocho construidos con Polydron[1], y dos construidos en cartulina dado que el material utilizado no permite realizar estos poliedros que nos interesa formen parte del universo objeto de clasificación (pirámide y prisma oblicuos).
Las familias que se presentan son las siguientes:

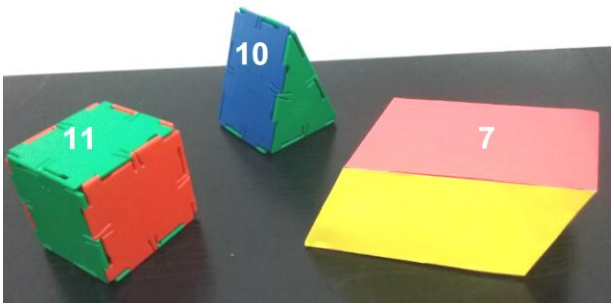
Familia 1



Familia 2



Familia 3



Familia 4

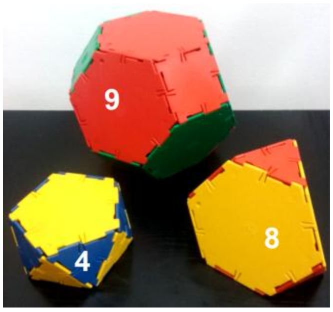


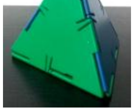
Imagen uno: Familias presentadas para la resolución de la tarea.

A continuación mostramos cada uno de los modelos de poliedros que se entregan a los estudiantes para resolver la tarea dada.

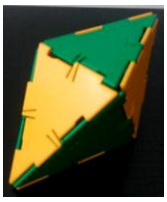
[1] Polydron consiste en un conjunto de polígonos realizado en plástico que poseen bisagras para unirse y formar poliedros. Los tipos de polígonos que lo forman son: triángulos equiláteros (dos tamaños), triángulos isósceles acutángulos, triángulos isósceles rectángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos regulares, hexágonos regulares y octógonos regulares.

1 y 11. Cubo

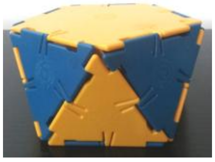
2 y 12. Tetraedro regular o pirámide recta base triangular



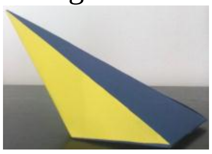
3. Octaedro o antiprisma base triángulo isósceles.



4- Antiprisma base pentágono regular.



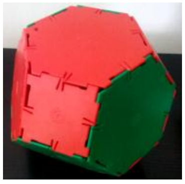
6- Pirámide oblicua, base pentágono regular[2]



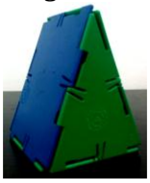
5- Dodecaedro regular

8- Tetraedro regular truncado[3]

9- Octaedro regular truncado[4]



10- Prisma recto, base triangular



7- Prisma oblicuo, base trapezoide[5]

Imagen dos: poliedros que se utilizan en la resolución de la tarea.

Realizamos una descripción de los poliedros, que su sola denominación no permite determinar los polígonos que los forman:
Poliedro (3) sus caras son triángulos isósceles iguales.
Poliedro (4) sus bases son pentágonos regulares y sus caras laterales triángulos equiláteros.
Poliedro (6), es una pirámide oblicua, sus caras laterales son triángulos no congruentes y su base es un pentágono regular.
Poliedro (7), es un prisma oblicuo, sus caras laterales son paralelogramos y sus bases trapezoides incluidos en planos paralelos.
Poliedro (8), sus caras son hexágonos regulares y triángulos equiláteros y concurren dos hexágonos y un triángulo en cada vértice.
Poliedro (9), sus caras son cuadrados y hexágonos regulares y concurren dos hexágonos y un cuadrado por vértice.
Poliedros (10), prisma con bases triángulos isósceles y caras laterales dos rectángulos congruentes y un cuadrado.
Destacamos que no entregamos los nombres que identifican los poliedros a los estudiantes para no direccionar las posibles familias, los presentamos de este modo para utilizar un lenguaje específico en el presente trabajo. En la implementación de la propuesta identificamos los modelos de los poliedros con números para una mejor comunicación entre estudiantes y posterior transcripción de audio.
En un primer momento se les presenta, por escrito, la tarea que se muestra debajo a los estudiantes sin interrupciones del entrevistador. A medida que los estudiantes avanzan en sus respuestas se realizan las preguntas que el entrevistador considera necesarias para complementar la información proporcionada por los estudiantes en sus respuestas, tratando de no direccionarlas. Durante esta instancia los entrevistados cuentan con el material bibliográfico utilizado en las cátedras de del plan de estudio, al cual pueden recurrir en el momento que lo consideren necesario.

---

[2] Poliedro construido con cartulina.
[3] Denominación tomada de Guillén (1991).
[4] Denominación tomada de Guillén (1991).
[5] Poliedro construido con cartulina.

Tarea: Cada uno de los siguientes grupos de poliedros determina una familia, el universo son los poliedros dados. Determinar las características que permiten que dichos poliedros se agrupen así. ¿Qué nombre le pondrías a cada familia? Justifica cada decisión que tomes.

ESTUDIO DE RESPUESTAS

Presentamos en este trabajo el análisis de los procedimientos de prueba llevado a cabo por uno de los grupos entrevistados que denominaremos grupo **G-C**, constituidos por los alumnos **G** y **C**. Destacamos que el entrevistador se denota con **F** en el presente trabajo.

En algunos momentos los estudiantes realizan una mirada parcializada sobre las figuras que conforman la familia de poliedros, poniendo su atención especialmente en, por ejemplo, las formas de caras del poliedro, si los polígonos que lo conforman son regulares, si son rectos u oblicuos, en general, en algunos momentos no realizan una mirada global de los poliedros, llamaremos a estos casos como empiricismo ingenuo, a pesar de no responder estrictamente a lo que considera como tal Balacheff (2000). Éste sostiene que "Empiricismo ingenuo aparece como un estado en el cual ellos se encuentran y permanecen debido a razones ligadas a la situación o a sus relaciones con el conocimiento mismo" (p. 55).

Se organiza la exposición considerando el análisis que realizan los estudiantes de cada una de las familias poliedros.

Análisis de la familia 4

La familia, como se muestra anteriormente, está formada por octaedro truncado, tetraedro truncado y antiprisma de base pentágono regular. Los alumnos al comienzo de la interacción ponen atención en los polígonos que conforman a los tres poliedros, en particular a su regularidad, no logran considerar el poliedro de manera global, es decir, examinando todos los elementos del mismo (caras, ángulos poliedros, etc.), por lo cual consideramos este momento del diálogo dentro de la categoría "Empiricismo Ingenuo". Se presenta a continuación la transcripción del audio de dicho momento.

G: la 4 son semirregulares.

F: vos decís que son semirregulares, ¿a qué te referís con poliedros semirregulares?

G: Porque las caras son regulares pero son distintas. Y algo más pero no se…

Más adelante, en la interacción, utilizan la experiencia crucial. Los estudiantes tienen dos hipótesis, por un lado se plantean que los poliedros 4, 8, 9 son semirregulares y consideran que esta característica puede atribuirse a la familia, por otro, tienen la hipótesis que si hay algún poliedro semirregular en otra familia, esta característica no puede atribuirse a la familia 4. A partir de lo anterior los alumnos analizan si se presenta algún poliedro semirregular en otra familia, como no encuentran esta característica común en las familias 1, 2 y 3 afirman que la familia cuatro está constituida por poliedros semirregulares. Es decir, la negación de una hipótesis permite la aceptación de otra.

C: ¿No hay ningún otro semirregular? Porque sino no sería la familia semirregular.

G: No hay ninguno.

C: Entonces sí.

Análisis de la familia 2

La familia dos está constituida por cubo, octaedro o antiprisma base triángulo isósceles, dodecaedro regular y tetraedro regular. Los estudiantes comienzan la discusión sobre la familia considerando los poliedros globalmente, analizan caras y ángulos, no miran estas características de forma aislada, sino que la acción para fundamentar la conjetura es tomarlo como un todo, podríamos decir que estamos frente a un ejemplo genérico.

G: Estos son regulares.

F: ¿Por qué decís que son regulares?

G: Porque tienen las caras iguales… y… los ángulos.

Consideramos al ejemplo genérico utilizado en este caso dentro de una categoría de las pruebas pragmáticas dado que cuando hacen explícitas las razones para argumentar la verdad de su conjetura lo hacen sobre cada ejemplo en particular (1, 5 y 12) que consideran como representante de la clase de poliedros regulares, no logran considerar la definición de poliedros regulares y tomar a estos en función de las características requeridas. Por esta razón el poliedro 3 les genera duda y se preguntan ¿es regular o no?

Para descartar una de las hipótesis que se plantean los estudiantes, si son poliedros regulares o no lo son, toman los dos tetraedros regulares (2 de la familia uno, 12 de la familia dos) y los unen por una base, de este modo el alumno **G** puede afirmar que el 3 no es regular. Este poliedro que logran construir, una bipirámide, lo utilizan como una experiencia crucial, que les sirve para descartar la hipótesis que la característica común a esos poliedros es que son regulares. Lo anterior se refleja en el diálogo que se transcribe a continuación.

G: (Observa el octaedro, y dice) Este es un coso, no sé como se dice la definición de poliedro regular, es un coso, o no es, ¡es verdad este es!... Este es un octaedro (con duda), no sería este así (y coloca los dos tetraedros unidos), me falta un pedazo, es ese nada más que… tendrían que ser equiláteros.

C: Tendrían que ser equiláteros.

Para finalizar el análisis de la familia 2 los alumnos utilizan el empiricismo ingenuo como una forma resistente de generalización. Por un lado no logran reflexionar que cualquier pirámide triangular es un tetraedro, consideran que para ser tetraedro debe ser regular, esto tiene que ver con su concepción de tetraedro; por otro lado no pueden explicar por qué lo consideran regular. Cuando se trabajan esos conceptos en las cátedras de geometría se prueba en primer instancia que "los únicos poliedros eulerianos posibles cuyas caras son polígonos de igual número de lados y cuyos ángulos poliedros tienen entre sí el mismo número de aristas son cinco" y se determina que el poliedro con cuatro caras triangulares, cuatro vértices y seis aristas se denomina tetraedro (Puig Adam, 1980, p. 240). Más adelante se define poliedro regular de la siguiente manera: "Llámese poliedro regular a todo poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas" (Puig Adam, 1980, p. 282). Luego se prueba la existencia de los cinco poliedros regulares y se concluye que el poliedro formado por 4 triángulos equiláteros iguales en el que concurren tres de ellos en cada vértice es un tetraedro regular.

A continuación se transcribe la interacción de los estudiantes.

G: ¿El 12 es tetraedro o no?

F: ¿A qué llamás tetraedro?

G: A un poliedro regular… esto es un cubo (señala el cubo), y esto es un dodecaedro.

F: ¿Pero a que te referís con tetraedro?

G: Es un poliedro regular.

Según Vinner (1991) cuando un estudiante menciona el nombre de un concepto conocido, en este caso tetraedro, evoca imágenes, impresiones o experiencias que el autor denomina "imagen del concepto" y raramente la definición del mismo. En este caso el tetraedro regular puede ser el representante que consideran los estudiantes como ejemplo representativo de los tetraedros en general, en términos de Vinner una imagen de un concepto es correcta cuando le permite al alumno discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto. En general en los libros de textos de la escolaridad obligatoria cuando se hace referencia al tetraedro se presenta la imagen de un tetraedro regular y por otro lado se presentan las imágenes de las pirámides. (Mántica, 1999)

Análisis de la familia 1:

La familia está formada por tetraedro regular y pirámide oblicua base pentágono regular como se mostró en el marco metodológico. Los estudiantes utilizan una prueba del tipo ejemplo genérico que la consideramos en la categoría de las pruebas pragmáticas, como en el caso de la familia dos. Las alumnas utilizan erróneamente el concepto de eje confundiéndolo con el de altura, a pesar que en GEE se define altura de una pirámide como la distancia del vértice V del anguloide que define la pirámide al plano de la base. (Puig Adam, 1980). Esto puede deberse a que tienen imágenes conceptuales muy pobres basadas en ejemplos prototípicos que no incluyen el dibujo de alturas de pirámides oblicuas No atienden a las características propias de las pirámides, hacen alusión a los modelos de poliedros particulares que conforman la familia. Destacamos que los estudiantes llaman prismas a las pirámides, en ningún momento recurren a la definición a pesar de tenerla disponible. Se presenta a continuación la transcripción del audio.

G: La familia 1, son… Pirámides… mmm ¿Cómo se llaman? Noo, prismas, sí prismas. Este es regular (señalando el tetraedro) o no sé cómo se llamaba y este oblicuo (señalando la pirámide oblicua).

C: Este es recto y este no es oblicuo. Recto porque el eje esta perpendicular a la base.

G: prisma de base pentagonal y prisma de base triangular.

Análisis de la familia 3:

La familia 3 está constituida por cubo, prisma triangular y prisma oblicuo de base trapezoide. Los estudiantes comienzan el análisis de la familia tres con un empiricismo ingenuo, dado que plantean que los prismas que conforman la familia son rectos u oblicuos, pero sin hacer referencia a los conceptos que trabajan estas características de los poliedros. Transcribimos lo que expresa el alumno **G.**

G: El 7 (prisma oblicuo) es raro, ¿esto está torcido o es así ?... digamos que no es derechito.

Los estudiantes al continuar su interacción no logran avanzar en el tipo de prueba aunque, al tratar de buscar una característica de la familia ponen su atención en la forma de los polígonos y el número de caras que tienen los poliedros. Finalizan su análisis determinando como característica de la familia que todos los poliedros que la componen tienen al menos un cuadrilátero como cara. Con esta característica no queda delimitada la familia dado que el poliedro 8, de la familia 4, también cumple esta condición. Transcribimos el audio.

C: Vamos a ponerle que sus caras son cuadriláteros pero no pentágonos.

G: Que son de 4 o menos, y aquel no porque son 6.

C: Ese tiene 6, ese tiene 6 y ese tiene 6. Estos son todos de 6 caras. ¿No hay ninguno que tenga 6 caras a parte de estos?

G: No este tiene 5 (prisma base triangular). Esta complicado. Pero las caras tienen 4 y 3 lados.

C: ¡Pero no! ¿Este cuenta como el mismo? (cubo)

G: Este tiene sólo 3. Entonces ya esta, este tiene 4, tiene 4 y tiene 3.

G: Si tiene 3 tiene que tener al menos uno de 4.

REFLEXIONES FINALES

Sinterizamos en el siguiente cuadro el análisis correspondiente al binomio analizado. En el mismo se enumeran en el orden que fueron utilizados los diferentes tipos de prueba en la interacción de los estudiantes.

Familia	*Tipo de prueba*	*Criterios*
1	1. Ejemplo Genérico	Prismas
2	1. Ejemplo Genérico	Regulares
	2. Experiencia crucial	Bipirámide
	3. Empiricismo Ingenuo	Tetraedro
3	1. Empiricismo Ingenuo	Inclinación
	2. Emiricismo ingenuo	Polígonos que forman las caras
4	1. Empiricismo ingenuo	Número de lados y regularidad de las caras
	2. Experiencia crucial	Comparan los poliedros con las otras familia

Tabla 1: Síntesis del análisis

Los alumnos al considerar la familia 2 comienzan con una prueba de ejemplo genérico este no es examinado "en sí mismo, sino para hacer explícito un modelo de acción que fundamente la conjetura" (Balacheff, 2000, p. 68). Logran considerar globalmente a los poliedros, como poliedros regulares, sin embargo solo tres de los cuatros poliedros que conforman la familia cumplen la característica mencionada. Los estudiantes afirman que el poliedro tres no es poliedro regular utilizando una experiencia crucial, en este caso el tipo de prueba utilizada "es más para rechazar la conjetura, que para establecerla" (Balacheff, 2000, p.68). Terminan categorizando la familia con un empiricismo ingenuo, realizan una mirada parcial sobre sus caras.

En la familia 4 los alumnos logran avanzar pasando de un tipo de prueba de empiricismo ingenuo a una experiencia crucial mediado por la interacción, "estos intercambios obligan al alumno a descentrar su pensamiento, su propio punto de vista, le abren el ámbito de posibilidades hasta llegar, a veces a perturbar la propia posición". (Quaranta, 2003, p.198)

En las familias 1 y 3 encontramos en cada una un solo tipo de prueba, es decir que la interacción en este caso no les permitió avanzar ni en la formulación de conjetura, ni en el tipo de pruebas, la discusión realizada entre las estudiantes no posibilita "que se explicite y se argumente sobre lo realizado". (Quaranta, 2003, p.197)

En el análisis de las entrevistas del binomio que se presenta se manifiesta que sólo realizan pruebas pragmáticas a pesar de ser alumnos avanzados del profesorado de matemática y estar habituados a realizar demostraciones matemáticas. Como plantea Balacheff (2000), que los estudiantes dispongan como herramienta de prueba a la demostración no es suficiente para garantizar su uso.

Consideramos que esto último puede deberse al tipo de tarea solicitada y al material en el que se realizan los modelos del universo de los diez poliedros. No obstante se esperaba que los estudiantes pudieran utilizar las propiedades de los poliedros para fundamentar sus afirmaciones.

REFERENCIAS

- BALACHEFF, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Bogotá. Una empresa docente.
- COHEN, L & MANION, L. (1990). Métodos de investigación educativa. Madrid. La muralla.

- CRUZ, M.F. MÁNTICA, A. & GÖTTE, M. (2015) *Clasificaciones de poliedros en estudiantes del profesorado de matemática. Análisis de una experiencia*. Actas de las IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata. Recuperado de http://jornadasceyn.fahce.unlp.edu.ar/convocatoria/actas-2015/trabajos-matematica/Cruz.pdf/view
- DE VILLIERS, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. For the Learning of Mathematics 14(1) 11-18. Disponible en http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/classify.pdf
- GUILLÉN SOLER, G. (1991). *El mundo de los poliedros.* Madrid. Síntesis.
- GUILLÉN SOLER, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. Educación Matemática, 17 (2) 117-152
- MÁNTICA, A. (1999). Las relaciones entre diversas representaciones de las formas tridimensionales en la enseñanza de los poliedros. Tesis de maestría no publicada, Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL. Santa Fe, Argentina.
- PUIG ADAM, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica*. Tomo I. Fundamentos. Euler, G. Madrid: Puig Ediciones.
- QUARANTA, M. & WOLMAN, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática: qué, para qué y cómo se discute. En M, Panizza, (comp), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas.* (pp. 189-243). Paidós. Buenos Aires.
- VINNER, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematics, en Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking* pp. 65-81. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.