CB07

MODELIZACIÓN CON GEOGEBRA: "UN PROCEDIMIENTO INSTRUMENTADO"

Rodolfo Murúa

Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS)
Juan M. Gutierrez 1150, Los Polvorines, Provincia de Buenos Aires
rmurua@ungs.edu.ar

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación: Relatos de experiencias de enseñanza o capacitación. Educación superior. Nuevas tecnologías y su impacto en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

Palabras clave: Modelización, GeoGebra, Procedimientos instrumentados, Gráficos dinámicos

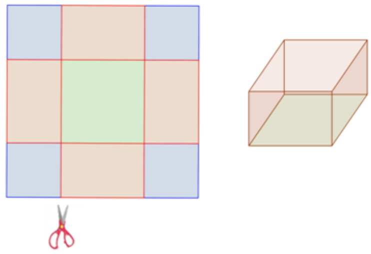
RESUMEN

Se presenta el relato de una experiencia realizada sobre el tema "Modelización" basada en una secuencia de problemas[1] con la mediación del software GeoGebra.
Esta secuencia fue puesta en aula durante el mes de mayo del 2015 en el curso de ingreso de la UNGS (Curso de Aprestamiento Universitario, CAU), en la asignatura Taller de Matemática. El CAU es la vía de acceso que la universidad ofrece para todos los aspirantes a cursar sus carreras de grado (licenciaturas o profesorados) o pregrado (tecnicaturas), por lo tanto los estudiantes que lo cursan siguen trayectorias de distintas orientaciones.
En este trabajo se pone el foco en un "procedimiento instrumentado" con GeoGebra que utilizó un grupo de alumnos para resolver una actividad propuesta por el docente.

INTRODUCCIÓN

La experiencia de aula abarcó 4 clases (un total de 10 horas reloj), con 35 alumnos. La edad promedio de este grupo de estudiantes rondaba entre los 18 y 20 años. Había disponibles entre 5 y 7 computadoras, con lo cual se trabajó con cinco grupos bastantes numerosos en donde ninguno de los alumnos tenía manejo del GeoGebra. Se dispuso de un proyector para llevar adelante las discusiones colectivas y fueron grabadas tanto las conversaciones del trabajo en grupos como estos momentos de intercambio para luego ser analizadas.
En la experiencia se les planteó a los alumnos la siguiente situación:
Se quieren construir cajas de cartón utilizando "planchas" de 10 cm x 10 cm. Para lo cual se tienen que recortar cuatro cuadraditos iguales en las esquinas. Una vez recortados los cuadrados se pliegan los bordes para armar las cajas.

[1] La elaboración de la secuencia, su análisis a priori y a posteriori y la puesta en aula fueron llevados a cabo por el autor de esta comunicación en el marco del Trabajo Final Integrador de la carrera "Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria" de la Universidad Pegagógica, cuya tutora fue Betina Duarte.



En el CAU esta situación se presenta en un entorno de lápiz y papel. La principal diferencia con esta propuesta es que la misma fue estudiada con un modelo prediseñado por el docente con GeoGebra. Por otro lado, otra diferencia, no menor, es que en el problema original se indica el estudio de la relación “Área de la base-Longitud de cada lado de los cuadraditos recordados”. En cambio, en nuestra propuesta estuvo del lado de los alumnos identificar y elegir variables en juego para ser estudiadas antes de analizar algunas que sí propuso el docente.

En este sentido, el principal objetivo de la secuencia fue "romper" con esta idea de que dada una situación existe una **única** función que la modeliza. Para ello, se aprovecharon las virtudes del GeoGebra para que los alumnos identifiquen distintas variables que están involucradas en la situación presentada.

El nacimiento de una conjetura y una decisión docente

En la primera actividad de la secuencia los alumnos tenían que identificar qué magnitudes variaban al mover el deslizador “recorte” y luego reconocer (y justificar) qué figuras geométricas adoptan las caras de las cajas. (Para descargar el archivo clickear aquí y luego en “descargar”)

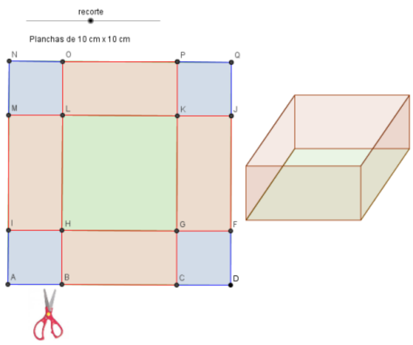


Imagen 1: captura de pantalla de lo que ve el alumno al abrir el archivo. Al mover el deslizador recorte se pueden visualizar distintas cajas armadas con una plancha de 10 cm x 10 cm.

En la segunda actividad se propuso estudiar algunas relaciones:

Actividad 2. *Explorando el archivo anterior decidan cuál o cuáles de las siguientes frases son verdaderas o falsas. Puede haber más de una opción correcta.* *Al aumentar la longitud del lado de cada cuadradito recortado…* *a)....el área de la base de la caja va disminuyendo.* *b).... el área de cada uno de los cuadraditos recortados va aumentando* *c).... el área de cada una de las paredes va aumentando.* *d).... el volumen[2] de las cajas va aumentando.* *Justifiquen las elecciones anteriores. Pueden usar herramientas que utilicen medidas, pueden justificar con palabras u otros argumentos que se les ocurran.*

[2] Formalmente habría que hablar de capacidad de la caja pero se optó por este término para que los alumnos puedan utilizar la fórmula que calcula el volumen de un prisma cuadrangular.

Gracias a varias exploraciones, en el ítem c) uno de los grupos llegó a la siguiente conclusión:

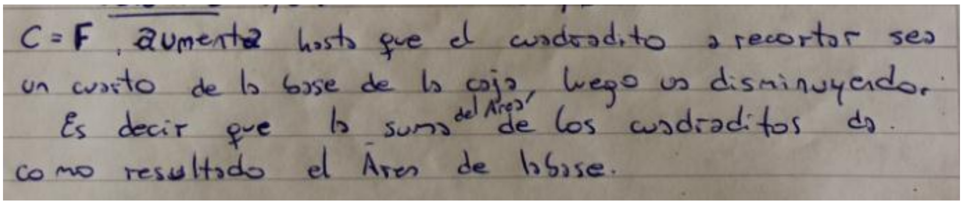

C=F, aumenta hasta que el cuadradito a recortar sea un cuarto de la base de la caja, luego va disminuyendo.
Es decir que la suma del Área de los cuadraditos da como resultado el Área de la base.

Imagen 2: escrito del grupo.

Nótese que aquí este grupo fue más allá de la consigna ya que compararon simultáneamente tres áreas: el área de la base, el área de los cuadraditos recortados y el área de las paredes.

El docente decidió tomar esta "propiedad" descubierta por los alumnos y modificando la planificación original la incorporó en una actividad posterior:

> ***Actividad 5.*** *En la fase 1 estudiamos varias relaciones sin disponer de un gráfico. Las relaciones fueron las siguientes:*
> *Relación 1. Área de la base de la caja en función de la longitud del lado de cada cuadradito recortado.*
> *Relación 2. Área de cada cuadradito recortado en función de la longitud del lado de cada cuadradito recortado.*
> *Relación 3. Área de cada una de las paredes de la caja en función de la longitud del lado de cada cuadradito recortado.*
> *Relación 4. Volumen de la caja en función de la longitud del lado de cada cuadradito recortado.*
>
> a. *Ingresen los puntos genéricos de cada relación y activen sus trazos.*
> b. *En la primera clase un grupo encontró la siguiente "propiedad"[3]: cuando el área de cada cuadradito recortado es un cuarto del área de la base de la caja, el área de cada una de las paredes alcanza su máximo valor. ¿Pueden confirmar/o refutar esta propiedad viendo algún gráfico? ¿Cuál es el área máxima de cada pared?*
> c. *Decidan si es cierta la siguiente afirmación: si el área de cada cuadradito recortado es un cuarto del área de la base de la caja, entonces el volumen de la caja alcanza su máximo valor. Justificar.*
> d. *En la primera clase un alumno propuso estudiar el perímetro de un cuadradito recortado en función de la longitud de su lado. Grafiquen esta relación con el GeoGebra y discutan las características de su gráfico.*

Llamamos "punto genérico" a un punto ingresado en la barra de entrada de GeoGebra cuyas coordenadas son variables. Por ejemplo, (*a*, *Área[L,K,G,H]*), donde "*a*" es la longitud del lado de cada cuadradito recortado y L,K,G y H son los vértices del cuadrado de la base. En esta actividad 5, los alumnos tenían que ingresar los puntos genéricos de cada relación deduciendo cuáles son las variables involucradas en cada coordenada. Cabe destacar que en una actividad anterior se había trabajado la noción de punto genérico y su relación con el modelo geométrico presentado en la Vista Gráfica 1[4]. En esta actividad mencionada, previamente al estudio del punto genérico, los alumnos tenían que ingresar en la barra de entrada algunos puntos de la relación "Área de la base-Longitud de cada lado de los cuadraditos recordados", por ejemplo, (1,64), (2,36), etc. Luego se pedía ingresar el punto (*a*, *Área[L,K,G,H]*) y se formulaban las preguntas: *¿por qué se mueve el punto al mover el*

[3] La palabra propiedad está entrecomillada porque en la primera clase no se le dio ese status, sino que quedó a modo de conjetura. Pero como los alumnos no estaban habituados a este término el docente decidió llamarla propiedad.
[4] El GeoGebra tiene dos "Vistas Gráficas", la "Vista Gráfica" y la "Vista Gráfica 2". A la primera la denominaremos "Vista Gráfica 1".

deslizador? ¿Qué relación pueden establecer entre el punto y las cajas? ¿El trazo del punto pasa por todos los puntos marcados anteriormente? ¿Por qué?

UN PROCEDIMIENTO INSTRUMENTADO

Antes de mostrar y analizar algunos diálogos acontecidos en las clases, vamos a explicar a qué nos referimos cuando hablamos de procedimientos instrumentados. Para lo cual creemos necesario presentar la noción de técnica tomada de la Teoría Antropológica de lo Didáctico:

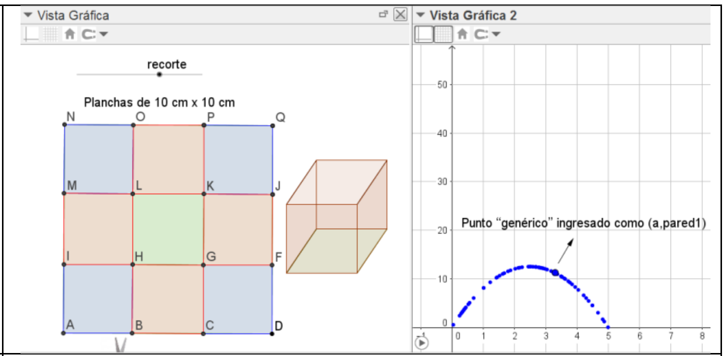
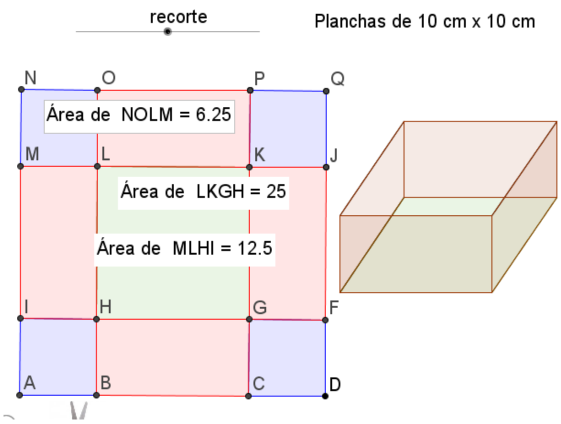
> "Una técnica es una manera de resolver una tarea y, tan pronto como vaya más allá del conjunto de tareas rutinarias, para una institución dada, cada técnica es un conglomerado complejo de razonamientos y de tareas alternas rutinarias. Las técnicas no solamente tienen un valor pragmático que les permite que produzcan resultados, tienen también un valor epistémico puesto que se componen en parte de la comprensión de los objetos, y son también una fuente de nuevas preguntas." (Artigue, 2003, p.248).

A las técnicas utilizadas en un ambiente computarizado Michelle Artigue las llama "**técnicas instrumentadas**". Al igual que en un entorno de lápiz y papel, una técnica instrumentada resulta interesante si contiene un valor pragmático y uno epistémico. Cuando se trabaja con un problema en un ambiente computarizado es esperable que surjan por parte de los alumnos procedimientos propios de ese entorno. Luego esas estrategias serán discutidas y el docente determinará cuáles son valiosas por sus valores epistémicos y pragmáticos para luego sistematizarlas y darles el "status" de técnicas. A esos primeros procedimientos los llamaremos "**procedimientos instrumentados**".

Diálogo con toda la clase: interacción entre las "Vistas Gráficas"

En la discusión colectiva del ítem b) se produjo el siguiente diálogo:

Diálogo	Observaciones
Docente (D): La frase del ítem b), ¿es cierta o falsa?	
Paula: Cierta.	
D: ¿Por qué? ¿Cómo lo justificaron?	
Paula: Miramos en el gráfico.	
D: Miraron en el gráfico azul. ¿Qué analizaron de ese gráfico?	El docente aquí hace referencia al gráfico que genera el trazo del punto genérico:

	
Melina: No, primero buscamos en qué medida el cuadradito recortado es un cuarto de la base.	Melina y Paula eran integrantes del mismo grupo.
D: Ah, usaron las herramientas de área y de distancia. ¿Y cuánto les dio?	El docente se refiere a las herramientas “Distancia” y “Área” que tiene el GeoGebra en la barra de herramientas.
Melina: De área, que el cuadradito recortado es 6,25, que es el cuarto del verde.	El grupo de Melina utilizó solamente la herramienta “Área”.
D: Pero estoy pensando, cómo identificaron el 6,25, porque se mueve todo acá.	
Melina: Fuimos moviendo y haciendo cálculos. Fuimos buscando hasta que el área del cuadradito recortado sea un cuarto de lo que mostraba la base, y lo que mostraba era 25.	 Al mover el deslizador cambian las tres áreas analizadas. Las alumnas iban multiplicando por 4 el valor del área de NOLM e iban viendo si el resultado era igual al valor del área de LKGH. Esta igualdad se obtiene cuando el área de cada cuadradito recortado es de 6,25.
Melina: Entonces ahí la propiedad se cumple, 6,25 es un cuarto de 25. Y ahí nos fijamos cuánto mostraba en el área de la pared, que es 12,5.	
D: No usaron el gráfico entonces.	
Melina: **Sí, al mismo tiempo fuimos viendo si el punto del azul estaba arriba.**	Las alumnas iban moviendo el deslizador y mirando simultáneamente el valor de las áreas mostradas en la Vista Gráfica 1 y que el punto genérico de la Vista Gráfica 2 esté cerca del máximo de la función.

A partir de las intervenciones de Melina podemos analizar el “juego” entre las dos “Vistas Gráficas” de este procedimiento instrumentado (este grupo había activado la cuadrícula de la “Vista Gráfica 2”). Primero se utilizó la herramienta “Área” en el modelo geométrico de la “Vista Gráfica 1” y luego al mover el deslizador las alumnas iban viendo el movimiento del punto genérico previamente ingresado. Al hacer esto deducimos que no fueron multiplicando “ciegamente” por 4 a todos los valores del área del cuadrado NOLM, sino que tomaron valores dentro de cierto rango, cuando el punto genérico estaba cerca del punto máximo.

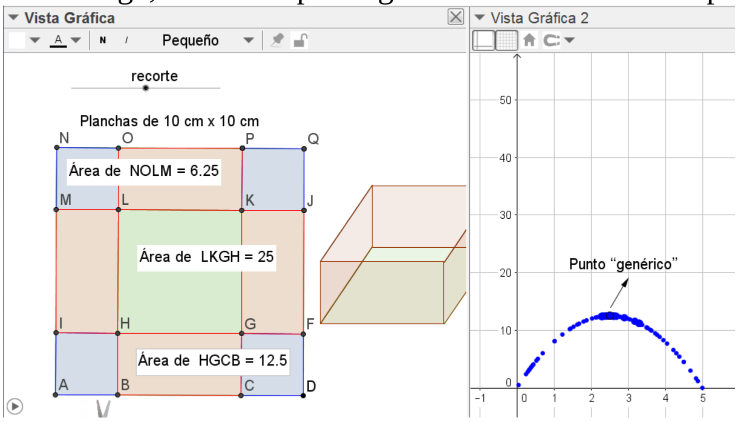


Imagen 3: En la “Vista Gráfica 1” se cumple la propiedad y en la “Vista Gráfica 2” el punto genérico pareciera estar en el punto máximo del gráfico generado.

Luego continuó el diálogo de la siguiente forma:

Diálogo	Observaciones
Alan: Pero acá decía usando solamente el gráfico. Usando el gráfico no se puede confirmar.	Alan leía muy en detalle los enunciados y trataba de respetarlos.
D: Bien, mirando sólo el gráfico no sé en donde está el “pico” del gráfico azul. Si lo que sé es que está cerca del 2. Pero usando juntas las dos Vistas Gráficas, si engancho justo el 6,25, se ve en el gráfico que el punto está en el tope. El tema es que hasta ahora no hicimos una argumentación, usamos el programa.	El se “ve” es muy subjetivo, ningún alumno puso en duda esta cuestión.
Carlos: ¿Pero cómo sabés que el área de las paredes ahí es la máxima?	
Paula: Yo todo eso lo vi usando el programa.	
D: Es una buena pregunta la de Carlos, ¿cómo sabemos que el máximo está acá? En las próximas clases vamos a estudiar este tipo de funciones, y eso nos va a dar herramientas para argumentarlo.	El docente en esta intervención hacía referencia a la función cuadrática. Los alumnos hasta aquí no tenían las herramientas para validar esta conjetura.

Luego de este fragmento del diálogo se continuó con el ítem c).

Hasta aquí vimos cómo este procedimiento instrumentado sirvió para brindar evidencia a favor de que la conjetura era cierta. Pero no nos permitió asegurar que cuando el área de cada cuadradito recortado es un cuarto del área de la base, entonces el área de cada pared es máxima.
En cuanto a la evidencia a favor de la conjetura para hallar el conjunto imagen de la función, en la última clase Nicolás utilizó un procedimiento instrumentado que había utilizado anteriormente para "asegurarse" que efectivamente la coordenada *y* del punto máximo sea 12,5. Allí se le asignó a los valores del eje *y* una distancia de 0,5 y luego se hizo zoom de acercamiento para verificar que el punto nunca "esté arriba" de 12,5.

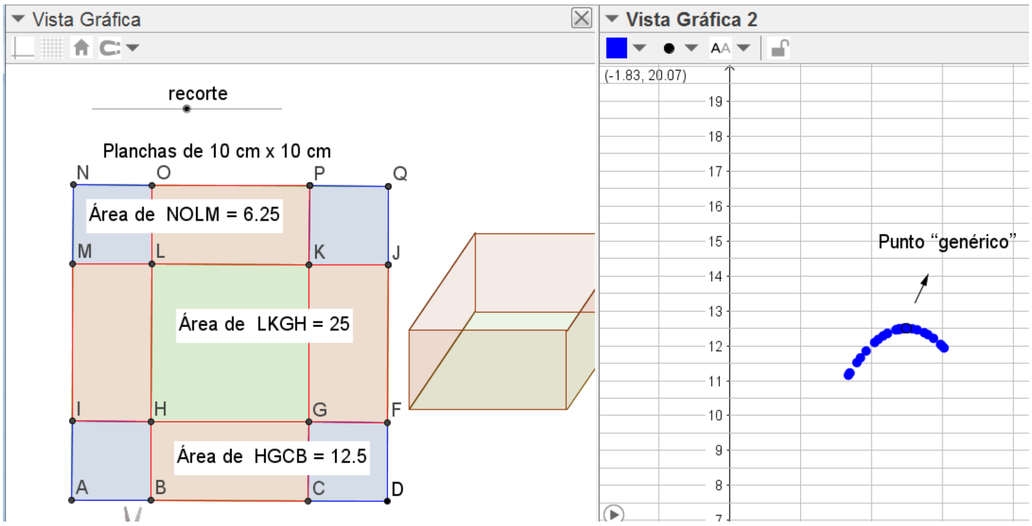
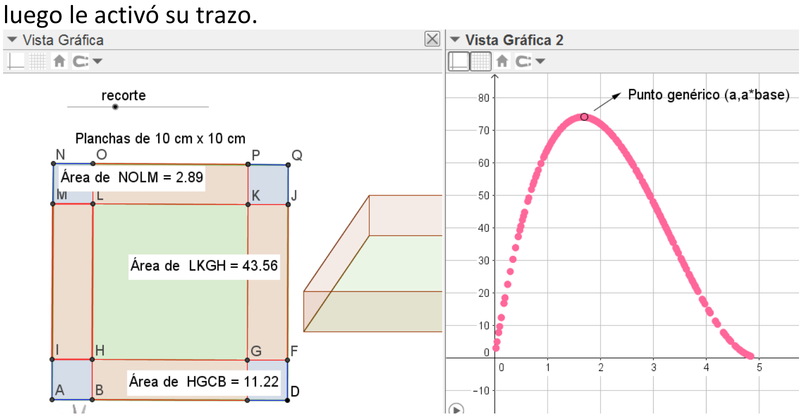


Imagen 4: la coordenada *y* del punto genérico está siempre en 12,5 por más zoom de acercamiento que se haga.

En este caso, la búsqueda de una certeza movilizó otro recurso para la validación.
A continuación veremos un ejemplo en donde el mismo procedimiento puede ser utilizado para rechazar una conjetura.

El uso del procedimiento instrumentado para rechazar una conjetura

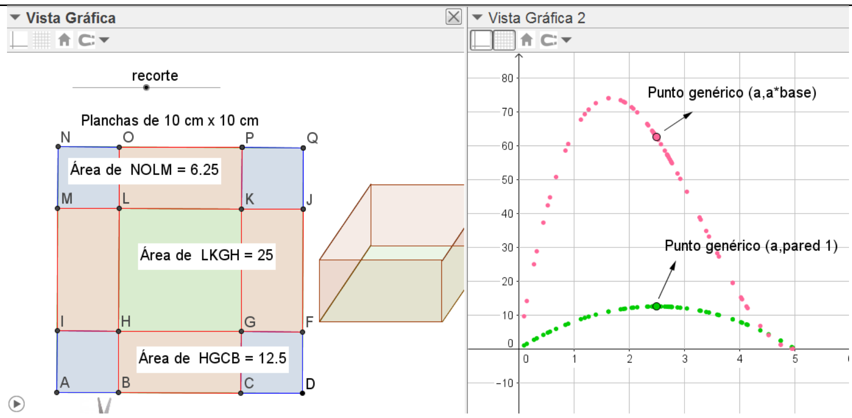
Alan, en el momento de trabajo en grupos, utilizó el mismo procedimiento instrumentado detallado anteriormente para responder el ítem c):

Diálogo	Observaciones
Alan: La c) es mentira, porque esta es la curva del volumen. Si el punto está acá en el máximo, el área azul no es un cuarto del área de la base.	Para obtener el punto genérico Alan ingreso en la barra de entrada (a,a*base) y luego le activó su trazo.  Moviendo el deslizador ubicó "a ojo" el punto genérico en el máximo del gráfico generado por su trazo. No sabemos si identificó que el área azul (área de NOLM) no era un cuarto de la verde (área de LKGH) visualmente o si hizo alguna cuenta.

Aquí queremos aclarar que formalmente con esta estrategia Alan no estaría invalidando la conjetura ya que la misma está formulada como una implicación, recordemos que era "*si el área de cada cuadradito recortado es un cuarto del área de la base de la caja, entonces el volumen de la caja alcanza su máximo valor.*" El alumno llegó a la conclusión de que si el punto está en el máximo, el área de cada cuadradito recortado no es un cuarto del área de la base de la caja.

El docente en ese momento no se percató de esta cuestión pero luego del análisis posterior de la clase creemos fue apropiado aceptar este argumento "incompleto" ya que no era pertinente abrir esta discusión con Alan porque recién los alumnos estaban entrando en el "juego" de la argumentación.

Luego el diálogo continuó así:

Diálogo	Observaciones
Javier: El rosa es el volumen, ¿y en dónde ves si el volumen de los recortes es un cuarto?	Javier hace referencia al gráfico de color rosa mostrado anteriormente. Creemos que con esta pregunta no estaba comprendiendo el enunciado.
Alan: Para, para, lo voy a leer de nuevo. Este es el valor máximo de las paredes. La c) es falsa porque ahí tengo un cuarto de todo pero el volumen no es el punto máximo.	 Alan estaba viendo los dos gráficos mostrados en la imagen de arriba a la vez. Aquí hizo un cambio respecto a la estrategia mencionada anteriormente ya que movió el deslizador hasta que el área de NOLM sea un cuarto del área de LKGH y luego vio la ubicación de los puntos genéricos. En este caso sí se puede asegurar que la afirmación del ítem c) es falsa pues el área de cada cuadradito recortado es un cuarto del área de la base y sin embargo allí no se produce el volumen máximo de la caja.
Alan: Profe, no sabemos cómo justificarlo. Cuando es un cuarto del área de la base no es el pico máximo del volumen. El punto máximo es más o menos por ahí, pero cuando es un cuarto está por acá, no es.	El alumno le está mostrando al docente sus dos estrategias para argumentar que la afirmación del ítem c) es falsa. Primero mueve el deslizador hasta que el punto genérico rosa está en el máximo del gráfico y luego lo vuelve a mover hasta que el área de cada cuadradito recortado es un cuarto del área de la base de la caja.

Luego el docente fue trabajando junto a los alumnos cómo escribir en palabras lo que Alan había visualizado.

Mostramos este diálogo porque es un ejemplo en donde el procedimiento instrumentado sirvió para rechazar una afirmación a discutir y además nos resultó interesante el hecho de que Alán haya elaborado dos estrategias para refutarla. Finalmente la respuesta del grupo de Alan fue:

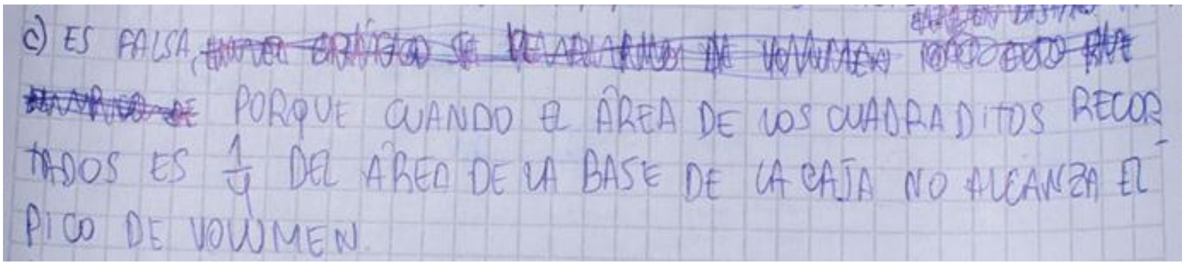


Imagen 5: producción original del grupo de Alan

ALGUNAS CONSIDERACIONES FINALES

A pesar de que los alumnos no vivenciaron un proceso de modelización completo, creemos que se cumplió con el objetivo principal de esta secuencia, el cual era "romper" con la idea de que dada una situación hay una sola función que la modeliza. Para esto el aporte del software GeoGebra fue fundamental tanto para la identificación de distintas magnitudes que variaban como para el análisis posterior de las funciones estudiadas.

Un aspecto a destacar de la etapa de experimentación al trabajar en ambientes computarizados dinámicos es la formulación de conjeturas. En esta experiencia pudimos identificar la importancia del GeoGebra en esta etapa cuando en la primera clase un grupo arribó a la conjetura que relaciona tres áreas del modelo presentado. Si la situación de las cajas se hubiera analizado en un entorno de lápiz y papel creemos que esta relación no habría surgido. Luego por una decisión docente la misma estuvo presente en clases posteriores lo que permitió estudiar una cuestión transversal de la matemática como es el estudio de cuándo una conjetura está validada, cuándo se obtiene información a favor y cuándo se puede descartar. Aquí también el GeoGebra hizo su aporte: como vimos, hubieron casos en donde un procedimiento instrumentado les brindó a los alumnos información a favor de una conjetura y otras veces les permitió rechazarla.

Esperamos que el relato de esta experiencia ayude a los docentes a reflexionar acerca de la complejidad que puede traer el uso del GeoGebra en el aula a la hora de analizar un gráfico. Como vimos anteriormente, el GeoGebra puede "salvar" algunas limitaciones que se presentan en los gráficos estáticos. En los **gráficos dinámicos**[5], por ejemplo, se puede cambiar la escala, poner o sacar los ejes y hacer zoom. Los gráficos estáticos y los gráficos dinámicos son distintos objetos, por lo tanto, su estudio debe diferenciarse. **Es por esto que creemos que en el "mundo" GeoGebra (particularmente en este tipo de problemas), ya no se puede hablar de "lectura de gráfico" solamente porque además de lo mencionado anteriormente, hay un juego de pantallas interactivo e instantáneo.**

Con respecto a los valores pragmáticos y epistémicos, el valor pragmático del procedimiento instrumentado analizado quedó reflejado en este análisis, ya que a través del mismo los alumnos pudieron reafirmar una propiedad y desechar una conjetura. En cuanto a su valor epistémico podemos mencionar que al producirse un "ida y vuelta" entre el modelo geométrico presentado en la Vista Gráfica 1 y los gráficos que generan los puntos genéricos de la Vista Gráfica 2, creemos que esta interacción ayuda a los alumnos a comprender las características del punto genérico, su trazo y la relación entre ellos y el modelo mencionado.

[5] Llamamos "gráfico dinámico" a un gráfico realizado con GeoGebra.

También se puso en juego la noción de escala, que además cada eje puede tener una propia y se trabajó la lectura de un gráfico (en este caso dinámico). **Es interesante remarcar que como los procedimientos son instrumentados, algunos de sus valores epistémicos tienen que ver con conocimientos del entorno dinámico.**

Por último, queremos mencionar que todos los procedimientos instrumentados que surgieron en las cuatro clases quedaron en un estado "artesanal" y no llegaron a tener un status de técnicas. La razón de esta cuestión es institucional: en el CAU no se trabaja con computadoras, por lo tanto, carecía de sentido institucionalizar estos procedimientos cuando no se iban a trabajar más allá de esta breve experiencia. En caso de realizar un trabajo sostenido en el tiempo dentro de un entorno dinámico, al igual que en un trabajo en "lápiz y papel", el docente es el que tiene el conocimiento y la formación pedagógica para decidir cuáles de los procedimientos deben ser destacados por su valor pragmático y/o epistémico. También deberá decidir cuáles son pertinentes que pasen al status de técnicas teniendo en cuenta los contenidos que se quieren enseñar y las actividades futuras que permiten abordarlos. Estas técnicas instrumentadas construidas a partir del trabajo de los alumnos, se irán aplicando, sistematizando, perfeccionando con el desarrollo de nuevos problemas y también servirán de apoyo para la construcción de nuevas técnicas.

REFERENCIAS

- Artigue M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. Conferencia llevada a cabo en la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, México.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS enviorment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, en: *International Journal Of Computers for Mathematical Learning* nº 7, Netherlands, 245-274.