CB06

ENTRE LA CONTINUIDAD Y LA CONTINUIDAD UNIFORME

Diego Francisco Vilotta & Julieta Lucía Zaninovich

Universidad Nacional de Nordeste, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura
Avda. Libertad 5600, Corrientes Capital
dfvilotta@gmail.com, jlzaninovich@hotmail.com

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación: Relatos de experiencias de enseñanza o capacitación. Educación Superior. Educación Matemática en la formación de Profesores.

Palabras Clave: funciones, continuidad, continuidad uniforme

RESUMEN

En esta comunicación se presenta un trabajo sobre continuidad uniforme realizado en el marco de una adscripción como ayudante alumna en la Asignatura Análisis Matemático III del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNNE.
En el desarrollo del trabajo se analiza el estrecho vínculo que existe entre la continuidad y la continuidad uniforme de una función mediante el estudio de ejemplos en los que se va modificando de forma gradual el dominio, la fórmula y en consecuencia la imagen de las funciones en busca de identificar y caracterizar los rasgos que permiten determinar si una función continua es también uniformemente continua.
Estas relaciones se establecen en muchas organizaciones matemáticas sin una verdadera razón de ser, en donde se enuncian los teoremas de continuidad y acotación de una función, sin plantear preguntas previas o sin la necesidad de conocer estas relaciones para responder a alguna situación problemática.
Un trabajo donde las diferentes características que posee una función uniformemente continua, surjan a partir de interrogantes y conjeturas desarrolladas ayudaría a que los alumnos aborden dicho estudio con mayor grado de significación.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca en una adscripción como ayudante alumno de Julieta Lucía Zaninovich en la Asignatura Análisis Matemático III del Profesorado y Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste en el año 2013, siendo el director de adscripción el Profesor Diego Francisco Vilotta. El trabajo final de la misma consistió en el estudio de dos temas presentes en el programa de la asignatura: conjuntos bien ordenados y continuidad uniforme. En esta comunicación nos abocaremos a presentar partes del trabajo realizado sobre continuidad uniforme.
La motivación inicial por estudiar este tema surgió por una ruptura producida en clase de análisis al analizar la continuidad de una función por partes que "pegaba un salto". Luego de ver que la función no es continua el profesor propuso analizar la continuidad de la misma al sacar del dominio de la función el punto de discontinuidad. Con este cambio, la función pasa

a ser continua en todo su dominio, lo cual rompe la idea intuitiva de continuidad que la mayoría de los alumnos posee. Esto conllevó a la adscripta a cuestionarse sobre qué concepto atraparía globalmente esa idea intuitiva de que "una función es continua si no pega saltos". En diálogo con el profesor responsable surgió la idea de estudiar la continuidad uniforme en contraposición o complementándola con la de continuidad de una función.

En el desarrollo de esta comunicación se podrá observar, sin haberlo anticipado en toda su dimensión al comienzo de este estudio, que cuando se analiza detalladamente la relación existente entre continuidad en un punto, continuidad en el dominio de la función y continuidad uniforme al considerar distintas funciones, se produce un movimiento entre el comportamiento local y global de cada función.[1]

Para analizar en forma gradual la estrecha relación existente entre la continuidad, la continuidad uniforme y el dominio donde está definida una función presentamos distintos ejemplos que posibilitan analizar diversos aspectos del concepto en cuestión.

Muchas veces en el análisis matemático se presentan ejercicios que consisten en probar que una función es uniformemente continua, sin haber realizado previamente un análisis del comportamiento de la misma. Este trabajo consiste en una etapa previa al desarrollo de una secuencia didáctica a cargo de un profesor; por medio del mismo se intenta problematizar el concepto de continuidad uniforme y realizar preguntas que permitan comprender y enriquecerlo. Con esta idea el trabajo toma definiciones de continuidad y continuidad uniforme utilizadas habitualmente en el espacio métrico real con la métrica usual y, a partir de su interpretación se busca diferenciar los dos conceptos, realizar un análisis del comportamiento de las funciones previo a demostrar la continuidad y continuidad uniforme de las mismas.

Uno de los objetivos de este trabajo es lograr caracterizar las funciones uniformemente continuas, analizar qué condiciones debe cumplir una función para ser uniformemente continua preguntándonos: ¿Se pueden obtener conclusiones a partir de su fórmula, de su gráfico, de su dominio? ¿Qué papel juega el crecimiento de una función en la continuidad uniforme? Se busca realizar un análisis que permita decidir y justificar, anticipar, previamente a una demostración, si una función es uniformemente continua o no y esto se realizará planteando preguntas que surgen a partir del análisis de las funciones y sus características. Igualmente, en el trabajo se incluyen demostraciones de continuidad y continuidad uniforme donde se analizan las razones de ser de cada uno de los pasos realizados.

Bosch y Gascón (2009) afirman: *"Además de las praxeologías matemáticas a enseñar, el profesor debe activar muchos otros tipos de praxeologías para la enseñanza. Algunas son, por supuesto, también matemáticas: el equipamiento praxeológico matemático del profesor no puede reducirse a aquello que debe enseñar."* Un profesor debe poder realizar preguntas y analizar el conocimiento más allá de lo que va a enseñar en las clases, debe poder hacer matemática que le permita enriquecer el conocimiento a enseñar. Creemos que las preguntas planteadas en el desarrollo de este trabajo, son parte de las actividades matemáticas que un profesor tendría que hacer y, que para un alumno del profesorado en Matemática deberían ser objeto de aprendizaje.

DESARROLLO

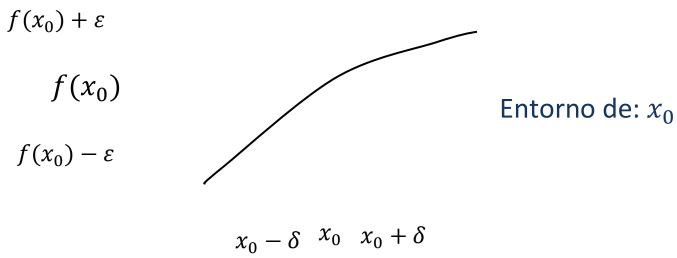
Como se explicitó anteriormente, iniciamos este trabajo con las definiciones de continuidad de una función en un punto, continuidad de una función en un conjunto y continuidad

[1]Varios autores hacen referencia a nociones de índole global y local. Se puede consultar Delgado Pineda, M. (2013)

uniforme en el espacio métrico real con la métrica usual. A partir de estas definiciones se realizará un análisis de las mismas buscando problematizar y desnaturalizar estos conceptos para una mejor interpretación y comprensión.
En general la definición de continuidad y de continuidad uniforme de una función se presenta simbólicamente de la siguiente manera:
La función f es **continua** en un punto x_0 del dominio sii:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

La misma suele estar acompañada de un gráfico como el siguiente:



Se dice que una función es continua cuando lo es en todo el dominio.

La función $f: A \to B$ es **uniformemente continua** en B sii:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

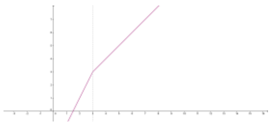
Diferencias que se pueden notar al observar la definición

La continuidad uniforme se estudia analizando las imágenes de cada uno de los puntos x del dominio, en un entorno de su imagen y en entornos que tengan la misma amplitud para todos los elementos del dominio a analizar. Veamos que la misma se diferencia de la continuidad de una función en que: para determinar esta última hay que analizar si la función es continua en cada uno de sus puntos; en cambio, para analizar la continuidad uniforme se debe analizar pares de valores que se mueven en intervalos donde se fija su amplitud pero no se fija ninguno de los puntos.
Es decir que, para la continuidad uniforme se debe analizar cómo se va comportando la función analizando entornos cuyos extremos son puntos de su dominio; es muy importante tener en cuenta que una vez que se elige la amplitud del intervalo, dicha amplitud debe servir para todo el dominio de la función. Luego, si la diferencia de las imágenes es tan pequeña como se quiera para cualquier par de valores que se encuentren en intervalos cuya amplitud sólo depende de lo pequeño que se quiere que sea esa diferencia, la función será uniformemente continua. Se puede pensar que ésta y otras cuestiones salen de observar atentamente la definición pero es necesario considerar al menos que: no se puede dejar a cargo de la "agudeza" de cada alumno poder entender estas sutilezas y por otra parte, tener en cuenta que el experto al leer la definición la está cargando de ejemplos y experiencias previas que un alumno no tiene respecto a estas definiciones.
A continuación se presentan diferentes funciones e interrogantes para profundizar, interpretar y comprender este concepto.

UNA FUNCIÓN CONTINUA Y UNIFORMEMENTE CONTINUA

La siguiente función es una función por partes, con punto crítico en x=3, continua en todos sus puntos y uniformemente continua.

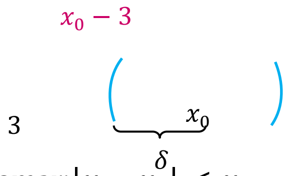
Sea $d: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / d(x) = \begin{cases} 2x - 3 & si\ x \leq 3 \\ \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 9} & si\ x > 3 \end{cases}$



A continuación se demostrará la continuidad y la continuidad uniforme de esta función y, a partir del análisis de las demostraciones, se verán las cuestiones que podrían "fallar" si se cambian algunas de las condiciones de la función.

Análisis previo: hay que analizar el δ que se toma, porque si se trabaja un entorno del punto x_0 cercano a 3, puede que se considere las dos partes de la función. Si $x_0 \neq 3$ la elección de delta permitirá trabajar con sólo una de las dos expresiones de la función. Acentuándose de esta manera, que el concepto de continuidad en un punto es una cuestión local de la función.

Veamos el entorno de $x_0 > 3$:



Por lo dicho anteriormente se debe tomar: $|x - x_0| < x_0 - 3 = \delta$

Veamos si es posible tomar este δ:

$$|x - x_0| < x_0 - 3 \xRightarrow[prop.valor\ abs]{} -x_0 + 3 < x - x_0 < x_0 - 3 \xRightarrow[monot\ de\ la\ suma, op\ y\ neutro]{} \Rightarrow 3 < x < 2x_0 - 3$$

Como se cumple que $3 < x$, se puede tomar $x_0 - 3 = \delta$, ya que de esta manera todos los puntos del entorno de x_0 serán mayores que 3 y para determinar su imagen se considerará la misma parte de la función. **Además, se puede elegir el delta a tomar porque la definición dice que para todo épsilon existe un delta, lo cual no significa que para cada épsilon existe un único delta, sino que para cada épsilon existe al menos un delta que permite analizar el entorno del punto en cuestión. Siguiendo esta idea, se toma un delta suficientemente chico que asegure trabajar solo esta parte de la función.**

Sea: $|d(x) - d(x_0)| =_{\text{def}\,d} \left| \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 9} - \frac{{x_0}^3 - 9x_0}{{x_0}^2 - 9} \right| = \left| \frac{x(x^2 - 9)}{x^2 - 9} - \frac{x_0({x_0}^2 - 9)}{{x_0}^2 - 9} \right| =_{x_0 > 3} |x - x_0| < \delta < \varepsilon$

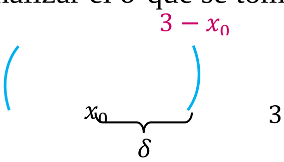
✓ <u>Demostración:</u> Sea $\varepsilon > 0.\ Elijo\ \delta < min\{3 - x_0; \varepsilon\} \wedge |x - 3| < \delta$

$$|d(x) - d(x_0)| <_{CA} \delta < \varepsilon \Rightarrow |d(x) - d(x_0)| < \varepsilon$$

$$\therefore d\ es\ continua\ en\ todo\ x_0 > 3\ \ (\mathbf{A})$$

- **Sea $x_0 < 3$**

  Nuevamente se debe analizar el δ que se toma, veamos ahora el entorno de $x_0 < 3$:



C.A.: ¿se podrá tomar $|x - x_0| < 3 - x_0 = \delta$?

Veamos si es posible tomar este δ:

$$|x - x_0| < 3 - x_0 \xRightarrow[prop.valor\ abs]{} -3 + x_0 < x - x_0 < 3 - x_0 \xRightarrow[monot\ de\ la\ suma, op\ y\ neutro]{}$$

$$\Rightarrow -3 + 2x_0 < x < 3$$

Como se cumple que $x > 3$, se puede tomar $3 - x_0 = \delta$. Ya que de esta manera todos los puntos del entorno de x_0 serán menores que 3 y se considera la misma parte de la función.
Sea entonces:
$|d(x) - d(x_0)| =_{(2)} |2x - 3 - (2x_0 - 3)| = |2.x - 2.x_0| = 2|x - x_0| < 2.\delta < \varepsilon \Rightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{2}$

- ✓ Demostración: Sea $\varepsilon > 0. Elijo\ \delta < min\left\{3 - x_0; \frac{\varepsilon}{2}\right\} \wedge |x - 3| < \delta$

$$|d(x) - d(x_0)| <_{CA} 2\delta < 2.\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow |d(x) - d(x_0)| < \varepsilon$$

$$\therefore d\ es\ continua\ en\ todo\ x_0 < 3\ \ (\mathbf{B})$$

- **Sea $x_0 = 3$**

$$d(3) = 2.3 - 3 = 3$$

Sea $\varepsilon > 0. Elijo\ \delta < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |x - 3| < \delta$
Sea $x > 3$: $|d(x) - d(3)| = |2x - 3 - 3| = |2.x - 6| = 2|x - 3| < 2.\delta < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Sea $x < 3$: $|d(x) - d(3)| = \left|\frac{x^3-9x}{x^2-9} - 3\right| = \left|\frac{x(x^2-9)}{x^2-9} - 3\right| = |x - 3| < \delta < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$$\therefore d\ \ es\ continua\ en\ x = 3\ (\boldsymbol{C})$$

$$Por\ lo\ tanto, de\ (A), (B)\ y\ (C): d\ es\ continua\ \forall x \in \mathbb{R}$$

CONTINUIDAD UNIFORME DE LA FUNCIÓN

Al estar definida por partes la función y cambiar la rapidez de crecimiento, se podría pensar que no será uniformemente continua. A continuación, se muestra que, a pesar de esto, la función es uniformemente continua.
Veamos si :$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0/\forall x, y \in \mathbb{R}: |x - y| < \delta \Rightarrow |d(x) - d(y)| < \varepsilon$

- $Sean\ x, y \leq 3$

Sea $\mathcal{E} > 0, se\ toma\ \delta > 0/\ \delta > |x - y| \wedge \delta < \frac{\varepsilon}{2}$
$|d(x) - d(y)| =_{\mathrm{def}\,d} \left|2x - 3 - (2y - 3\ )\right| = |2(x - y)| = |2||x - y| < 2\delta < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$\underset{transit.de=}{\Longrightarrow} |d(x) - d(y)| < \varepsilon$

$$\therefore d\ es\ uniformemente\ continua\ \forall x, y < 3$$

- Al cambiar la pendiente de la recta, cambia la relación entre épsilon y delta.
- $Sean\ x, y > 3$

Sea $\mathcal{E} > 0, Sea\ \delta > 0/\ \delta > |x - y| \wedge \delta < \frac{\varepsilon}{2}$
$|d(x) - d(y)| =_{\mathrm{def}\,d} \left|\frac{x^3-9x}{x^2-9} - \frac{y^3-9y}{y^2-9}\right| = \left|\frac{x(x^2-9)}{x^2-9} - \frac{y(y^2-9)}{y^2-9}\right| =_{y,x>3} |x - y| < \delta < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$
$\underset{transit.de=}{\Longrightarrow} |d(x) - d(y)| < \varepsilon$

$$\therefore d\ es\ uniformemente\ continua\ \forall x, y > 3$$

Nota: Observar que en este caso, basta con que $\delta < \varepsilon$ para que se cumpla la condición de continuidad uniforme. Se toma $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ para mantener la misma relación entre épsilon y delta, independientemente del tramo de la función en el que se esté trabajando, tal como lo pide la definición.

- $Sean\ x > 3, y \leq 3$

Sea $\mathcal{E} > 0, Sea\ \delta > 0/\ \delta > |x - y| \wedge \delta < \frac{\varepsilon}{2}$

Además, como $x > 3, y \leq 3$: $|y-3| = |3-y| = 3-y < x-y = |x-y| < \delta \Rightarrow \boldsymbol{|y-3|} < \delta$ **(*)**, esto es así porque la distancia de y a 3 es menor que la distancia de y a x, ya que $y \leq 3 < x$

$|d(x)-d(y)| =_{\text{def}\,d} \left|\frac{x^3-9x}{x^2-9} - (2y-3)\right| = \left|\frac{x(x^2-9)}{x^2-9} - (2y-3)\right| =_{x>3} |x-2y+3| = |(x-y)+(-y+3)| \leq_{desigualdad\ triangular} |x-y| + |-y+3| =_{prop\ valor\ abs} |x-y| + |y-3| <_{(*)} |x-y| + \delta < \delta + \delta = 2\delta < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \xRightarrow[transit.de=]{} |d(x)-d(y)| < \varepsilon$

$$\therefore\ d\ es\ uniformemente\ continua\ \forall x > 3, y \leq 3$$

Luego, $\forall \mathcal{E} > 0, \exists\ \delta > 0 / \forall x, y \epsilon \mathbb{R}\ , con\ \delta > |x-y| \wedge \delta < \frac{\varepsilon}{2} : |d(x)-d(y)| < \varepsilon$

$$Por\ lo\ tanto\ d\ es\ uniformemente\ continua\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

En el ejemplo anterior, para los valores menores e iguales a 3 la función crece, y para los valores mayores que 3 la función continúa creciendo, pero la rapidez de crecimiento no es la misma en ambas partes de la función. Se puede ver que la función es uniformemente continua a pesar de cambiar la rapidez de crecimiento.

Sin embargo, es importante señalar que en cada parte de la función se "mantiene" la rapidez de crecimiento, es decir que en cada parte de la función el crecimiento es "uniforme". Además el dominio y la imagen de la función son conjuntos abiertos y cerrados no acotados.

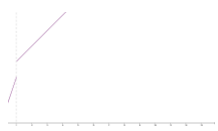
Observemos que al realizar las demostraciones se podría haber tenido dos inconvenientes. Por un lado, ¿qué hubiera sucedido si al tomar valores a la izquierda y a la derecha del tres no se hubieran podido acercar las imágenes respectivas tanto como quiera? Es decir: ¿qué hubiera sucedido con la continuidad uniforme si la función pegaba un salto en el 3? Se puede pensar que en ese caso la función no es continua en ese punto, pero la discontinuidad de la función se podría evitar sacando ese punto del dominio de la función. De esta manera la función sería continua en todos los puntos de su dominio pero no sería uniformemente continua porque a pesar de reducir la distancia entre los puntos del dominio puede suceder que sus respectivas imágenes no se acerquen tanto como uno quiera. Pero entonces, ¿habrá que establecer alguna condición en el dominio de la función para que esta sea uniformemente continua?

Otro problema se presentaría si el cambio en la rapidez de crecimiento de la función fuera variando o aumentando de tal manera que no sea posible tomar un lugar donde la variación sea mayor. Es posible creer que esto sucede en los casos donde la función no está acotada, porque de lo contrario se tomaría el tramo donde la rapidez de crecimiento es mayor, se analizaría la relación entre épsilon y delta y, esa relación entre delta y épsilon serviría para los otros tramos. ¿Es posible asegurar la continuidad uniforme de una función si esta está acotada? Si una función no está acotada, ¿la continuidad uniforme quedará determinada por la rapidez de crecimiento de la función?

UNA FUNCIÓN CONTINUA QUE NO ES UNIFORMEMENTE CONTINUA

Anteriormente se ha analizado una función por partes que es continua en todos sus puntos y es uniformemente continua. Ahora mostramos la siguiente función por partes que es discontinua en un único punto.

$$Sea\ h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(x) = \begin{cases} 3x & si\ x < 1 \\ x+3 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$



Como la función no es continua en $x = 1$, no será continua en todo su dominio. La continuidad no depende sólo de la fórmula de la función, sino también del dominio en el que se esté trabajando. ¿Puede ser

continua en un dominio y no en otro? Sí, si en lugar de considerar $\mathbb{R}$ como dominio de la función, se restringe su dominio a $\mathbb{R}-\{1\}$, la función será continua en todos sus puntos.
Es decir, considerando $\boldsymbol{h}: \mathbb{R}-\{\mathbf{1}\} \to \mathbb{R}$**,** $\boldsymbol{h}$ **es continua en todo su dominio**.

Considerando la misma función con dominio en $\mathbb{R}-\{1\}$, donde es continua, nos preguntamos: ¿cómo puede ser que sea continua una función que pega un salto? Se está sacando solo un punto del dominio de la función y ahora en todos los puntos la función es continua. Esto sucede porque la continuidad atrapa una característica local de la función, ya que depende del comportamiento de la función en cada uno de sus puntos. En cambio, la continuidad uniforme atrapa una característica global de la misma porque establece una relación entre los distintos puntos del dominio.

Se analizará la continuidad uniforme de la función $\boldsymbol{h}: \mathbb{R}-\{\mathbf{1}\} \to \mathbb{R}$
Cuando $x, y < 1$, y cuando $x, y > 1$ se procede de manera análoga a las anteriores y se cumplirá que: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$
Pero si se toma $x < 1$ y $y > 1$, ¿sucederá lo mismo?
Sean los puntos $x < 1$ y $y > 1$:
Sea $\varepsilon = 1$, sea $\delta \epsilon \mathbb{R}$. Sean $x, y \in \mathbb{R} / x = 1-\frac{\delta}{3} < 1$ y $y = 1+\frac{\delta}{3} > 1$**(A)**

$$|h(x)-h(y)| =_{x<1\,;\,y>1} |3x-(y+3)| = |3x-y-3| =_{(A)} \left|3\left(1-\frac{\delta}{3}\right)-\left(1+\frac{\delta}{3}\right)-3\right|$$
$$= \left|3-3\frac{\delta}{3}-1-\frac{\delta}{3}-3\right| = \left|-\delta-1-\frac{\delta}{3}\right| = \left|-1-4\frac{\delta}{3}\right|$$
$$= \left|1+4\frac{\delta}{3}\right| =_{\delta>0} 1+4\frac{\delta}{3} >_{4\frac{\delta}{3}>0} 1 = \varepsilon \xRightarrow[transitividad]{} |h(x)-h(y)| = 1+4\frac{\delta}{3} > \varepsilon$$
$$\therefore \exists \varepsilon = 1 > 0 / \forall \delta > 0, \exists x < 1, y > 1 : |x-y| < \delta \wedge |h(x)-h(y)| > \varepsilon$$

Luego h no será uniformemente continua en $\mathbb{R}-\{1\}$

De esta manera, la función $h: \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R} / h(x) = \begin{cases} 3x & si\ x < 1 \\ x+3 & si\ x > 1 \end{cases}$ es continua en todos los puntos del dominio, pero como se pudo ver al tomar valores cercanos a uno por izquierda y otro por derecha no cumple la condición para ser uniformemente continua.

A partir del análisis de la función anterior, surge el siguiente cuestionamiento:
¿Siempre que la función tenga saltos no será uniformemente continua?
Aunque se saque el punto de discontinuidad del dominio la función no es uniformemente continua porque pega un salto, y lo mismo sucedería con funciones con la misma característica. Esto es así porque “en los saltos” las imágenes de las funciones se alejarán una distancia tal que el delta utilizado para analizar entornos entre los demás puntos del dominio de la función no será útil en estos casos.
Restringiendo el dominio de la función para que la misma sea continua en todos sus puntos, **salvamos la continuidad de la función, pero no así la continuidad uniforme**. Entonces, ¿qué más está pidiendo la continuidad uniforme de una función?
Al modificar la función se restringió el dominio $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}-\{1\}$. $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto y cerrado en el cual la función no es continua en todos los puntos de su dominio. $\mathbb{R}-\{1\}$ es un conjunto abierto pero ha perdido la característica para ser cerrado. Entonces, considerando el dominio $\mathbb{R}-\{1\}$ estamos frente a una función con dominio abierto, continua, pero no uniformemente continua.
La continuidad de una función puede cambiar al considerar uno u otro dominio, ¿con la continuidad uniforme pasará lo mismo?

ANÁLISIS DE OTRO EJEMPLO

Sea la función de proporcionalidad inversa $g\colon (0,1) \to \mathbb{R} /\ g(x) = \frac{1}{x}$

La función g es continua en todos los puntos de su dominio por ser cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero. En principio, como la función no pega saltos la función puede o no ser uniformemente continua.

En el libro "Cálculo diferencial e Integral" de Ricardo Noriega, se analiza la continuidad uniforme de la función de la siguiente manera:

> *Si se toma* $\varepsilon = 1. Sea\ \delta > 0 / \frac{1}{2n} < \delta, con\ n \epsilon \mathbb{N}$
>
> *Sean* $x = \frac{1}{n} \epsilon (0,1); y = \frac{1}{2n} \epsilon (0,1)$
>
> $$|x - y| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| = \left|\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \delta$$
>
> $$|g(x) - g(y)| = \left|\frac{1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{2n}}\right| = |n - 2n| = |-n| = n \geq 1 = \varepsilon$$
>
> *Luego:* $\exists \varepsilon > 0 / \forall \delta > 0, \exists x, y \in (0,1) / |x - y| < \delta \wedge |g(x) - g(y)| > \varepsilon$
>
> $$\therefore g\ no\ es\ uniformemente\ continua$$
>
> *Geométricamente se ve que el δ que hay que tomar para que $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ es cada vez más chico (tiende a cero), a medida que x, y se acercan a cero y, no existe un δ que una vez dado el valor de ε sirva para cualquier par de valores de x e y. Por lo cual no es uniformemente continua.*

A medida que x se acerca a 0 la función crece más rápidamente y la diferencia entre las imágenes de dos puntos, que se encuentren a una distancia menor a δ, será mayor a la del ε que se tomó. Entonces para ese ε, no servirá el δ que existía para los otros puntos.

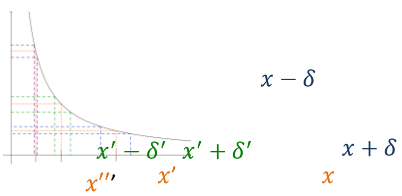
Al tomar un ε muy pequeño, en el entorno de un punto x cualquiera, se puede tomar cualquier punto y, y encontrar un δ con el cual se cumpla la condición de que $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Pero cuando tome otro punto x' más cercano al 0, y considerando el mismo δ, no se seguirá cumpliendo la condición de que $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$, para que esto se cumpliese tendría que tener un δ' menor. Por lo tanto, esta condición no se cumplirá $\forall \varepsilon$.

Es decir, que un delta que sirve para un par de valores del dominio, no sirve si se toma un par de valores más cercanos del cero.

¿Qué pasará si se toma un δ' más pequeño?

Si se toma un ε pequeño, existirá un δ que verifique que las imágenes de x y otro punto y que se encuentre en el intervalo $(x - \delta, x + \delta)$, sea menor a ε.

Tomando otro punto x', más cercano al 0, si se quiere que la diferencia entre dos imágenes de este punto y uno de su entorno sea menor a ε, se deberá considerar un $\delta' < \delta$. Esto es así porque de lo contrario, se estaría en el caso analizado antes en el que la distancia entre las imágenes es mayor a ε, no cumpliendo así la condición que se busca. Entonces, se puede considerar tomar este δ' menor al δ anterior



para que verifique la condición en todos los demás puntos del dominio.
Ahora bien, si consideramos un x'' aún más cercano al 0 que x', para que se siga cumpliendo la condición no servirá el mismo δ' por las mismas razones anteriores. Entonces, nuevamente se podría considerar un δ'' que cumpla las condiciones en este punto. Pero si se hace esto, al tomar otro punto más cercano al 0 que x'', se estaría en la misma situación anterior. Luego, nunca se podrá encontrar un δ^* que cumpla las condiciones buscadas para todos los puntos.
Es decir, que a medida que los puntos que se estudien se acerquen al 0, se deberá considerar δ menores para que se cumpla la condición de que $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$, cualquiera sea el ε que se haya tomado. Es por ello que la función no será uniformemente continua, porque al tomar un ε no existirá un δ que cumpla la condición con cualesquiera dos puntos que se tomen del dominio (0,1).
Luego de los análisis realizados, puede surgir el siguiente interrogante: **¿será que si una función no tiene un crecimiento lineal no es uniformemente continua? ¿Será que una función con dominio acotado e imagen no acotada no será uniformemente continua?**
Al considerar la función $g(x) = \frac{1}{x}$ en un intervalo cerrado y acotado, por ejemplo $[\frac{1}{1001}; 1]$,el δ que se tome para $\frac{1}{1001}$ va a servir para todos los demás valores del dominio, porque es como tomar el δ mínimo que no se podía tomar antes porque siempre se encontraba uno menor; es por ello que será uniformemente continua en un intervalo cerrado. Lo mismo sucedería si el intervalo fuera abierto y la función acotada, la diferencia es que el intervalo abierto que se consideró anteriormente tenía como extremo el 0, y al acercarse a este valor la función tiende a infinito.
Entonces qué cambió para que una función que no cambia su fórmula pero sí su dominio, sea uniformemente continua en un caso y en otro no. Como cambia el dominio, el conjunto imagen también cambia, ¿afectará en algo el cambio de imagen de la función para que ésta sea uniformemente continua? ¿Qué características tienen los dominios y los conjuntos imágenes en cada caso?
Sea la función $g: (0,1) \to \mathbb{R} / \, g(x) = \frac{1}{x}$, el dominio de esta función es un conjunto abierto y acotado, su conjunto imagen es el conjunto $(0, +\infty)$ abierto y no acotado. Sea ahora la función $g: [\frac{1}{1001}; 1] \to \mathbb{R} / \, g(x) = \frac{1}{x}$, el dominio de esta función es un conjunto cerrado y acotado, su conjunto imagen es el intervalo cerrado $[1; 1001]$ cerrado y acotado.
Considerando estos análisis, se puede establecer que hay una estrecha relación entre el dominio, imagen, crecimiento de la función y continuidad uniforme.

LA FUNCIÓN CUADRÁTICA Y LA CONTINUIDAD UNIFORME

La siguiente función es una función cuadrática continua. A continuación se analiza su continuidad uniforme al considerarla en dos dominios diferentes, uno acotado y otro no.

Sea $h: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \, / \, h(x) = x^2$

- Demostremos que la función no es uniformemente continua:

Sean $x, y \in \mathbb{R}^+, sea\ y > x/y = x + h, con\ h > 0$:

$$h(y) = y^2 = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 > x^2 = h(x)$$

$$\therefore h(y) > h(x)$$

Luego h es monótona creciente **(1)**
Por otro lado, dados $\varepsilon > 0, \delta > 0. Tomando\ \delta' > 0/\delta' = min\{\delta, \sqrt{\varepsilon}\}$
Eligiendo $x \in \mathbb{R}^+/x > \frac{\varepsilon - \delta'^2}{2\delta'} > 0$**(2)**
Entonces, si $y = x + \delta'$: $|y - x| < \delta' \leq \delta$

Luego: $|h(y)-h(x)| =_{(1)} h(y)-h(x) = (x+\delta')^2 - x^2 = x^2 + 2x\delta' + \delta'^2 - x^2 = 2x\delta' + \delta'^2 >_{(2)} 2\frac{\varepsilon-\delta'^2}{2\delta'}\delta' + \delta'^2 = \varepsilon - \delta'^2 + \delta'^2 = \varepsilon \Rightarrow |h(y)-h(x)| > \varepsilon$

$$\therefore h \; no \; es \; uniformemente \; continua$$

Siguiendo el mismo análisis que el hecho con la función anterior, se podría ver que la función cuadrática también es uniformemente continua en un intervalo acotado.
Observemos que esta función en un intervalo abierto no acotado no es uniformemente continua; pero a diferencia de la función $\mathrm{g(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}$, al restringir su dominio a un intervalo abierto y acotado, es uniformemente continua.
La diferencia es que la imagen de la función cuadrática definida en el intervalo abierto y acotado, es un conjunto acotado; en cambio, el conjunto imagen de la función hiperbólica definida en el intervalo abierto y acotado, es no acotada.

CONTINUIDAD UNIFORME EN FUNCIONES CON DOMINIO REAL

¿Será que si una función no tiene crecimiento lineal y está definida en R no puede ser uniformemente continua? ¿Para ser uniformemente continua, la función no puede crecer indefinidamente salvo que sea lineal?
Considerando el conjunto de los números reales como dominio de una función, cuando la **rapidez de crecimiento** crece o decrece indefinidamente, la función no es uniformemente continua. En estos casos, la distancia entre las imágenes de la función es cada vez más grande, entonces al analizar los puntos del dominio de la función en intervalos de la misma amplitud dados por un cierto delta, las imágenes de estos valores se alejarán cada vez más porque no siguen un crecimiento uniforme y, la distancia que los separa se hace cada vez más grande. De esta manera, un valor delta dado épsilon, que sirve para analizar la distancia entre las imágenes de la función de los puntos que pertenecen a intervalos de misma amplitud, no será útil para todas las imágenes porque la distancia entre las mismas superará el valor del épsilon elegido.
En el caso de funciones con dominio en intervalos abiertos, que tienden a infinito al acercarse a uno de sus extremos, se puede realizar un razonamiento análogo. Como ser el caso de la función $g(x) = \frac{1}{x}$ con dominio en el intervalo $(0,1)$.
Entonces, si una función está definida en un intervalo acotado, su conjunto imagen está acotado y la función es continua, es uniformemente continua. Veamos que se pide que esté definida en un intervalo abierto o cerrado para asegurar que todos los puntos tengan imagen; que sea continua, para asegurar que no haya saltos en la función, y que el conjunto imagen esté acotado, porque de esta manera, si la rapidez de crecimiento no es uniforme, se encontrará un delta que permita establecer la misma relación entre todos los puntos del dominio al considerar una cierta distancia entre sus imágenes.
Todo lo analizado anteriormente, permite avanzar en la comprensión de la íntima relación existente entre el dominio, la imagen y la fórmula de una función, cuestiones que se ponen en juego al caracterizar funciones, que además de continuas, son uniformemente continuas.

CONCLUSIÓN

Si bien el estudio de la continuidad uniforme comenzó con la intensión de contraponerla a la continuidad puntual, notamos, a medida que avanzábamos en el análisis, que al relacionar los conceptos de continuidad en un punto, continuidad en el dominio de la función y continuidad

uniforme en distintos ejemplos se produce un constante movimiento entre cuestiones globales y locales del análisis.
Parece claro que al definir la continuidad en un punto estamos abordando una cuestión local de la función y al definir la continuidad uniforme de una función claramente se trata de una cuestión global. Sin embargo el interrogante surge cuando queremos ubicar la continuidad de una función en el conjunto donde está definida ¿estamos en una cuestión local o global? porque, se pide que sea continua (local) en todos (global) sus puntos. Es decir que, aunque a priori se pueda considerar la continuidad de una función en todo el dominio donde está definida como una cuestión global terminamos comprendiendo que en realidad se encuentra en un estadío intermedio.
Al establecerse relaciones entre la continuidad y la continuidad uniforme emergen de manera bastante "natural" las relaciones existentes entre el dominio de la función (acotado o no, abierto o no, cerrado o no, etc.) la fórmula o regla de correspondencia y la imagen de la función. Estas relaciones se establecen sin una razón de ser en muchas presentaciones clásicas donde se enuncian los teoremas que relacionan continuidad y acotación de una función sin plantear preguntas previas o sin que se haya necesitado conocer algunas de estas relaciones para responder a alguna situación planteada.
Con el análisis de los distintos ejemplos se fue mostrando de manera gradual las relaciones que se pueden ir estableciendo entre continuidad de una función y la continuidad uniforme. Al comienzo de la adscripción (contexto en el que realizamos este estudio) este orden en la presentación no estaba tan claro ya que se trataba de manera simultánea demasiadas cuestiones en cada ejemplo. En un momento posterior logramos ordenar los ejemplos de manera que en cada uno de ellos vayan surgiendo gradualmente las cuestiones que queríamos analizar.
Creemos que cuando se avanza a conceptos más complejos como el de continuidad uniforme se van dejando de lado aclaraciones, explicaciones, interpretaciones, etc. en lenguaje coloquial, rasgo que sí tienen los textos al definir los primeros conceptos del análisis como por ejemplo límite de una función que están llenos de estas aclaraciones. A nosotros nos parece necesario continuar con esta característica en los distintos temas que se van tratando, es por eso que a lo largo del trabajo realizamos interpretaciones del significado que tienen las escrituras simbólicas e intentamos que el uso de los gráficos no se haga de una manera tan ostensiva.
Creemos que esta forma de plantear las cuestiones permitiría a los alumnos llegar a esas instancias de otra manera, donde los distintos conceptos y teoremas aparezcan para dar respuestas a preguntas y no como una acumulación de resultados a estudiar.

REFERENCIAS

- BARQUERO, B. ; BOSCH, M. y GASCÓN, J. 2007. *Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias*.Communicationau 2° congrès TAD, Uzès 2007.
- BOSCH, M. GASCÓN, J. 2009. *Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria.* (Investigación en educación matemática XIII).
- NORIEGA, R. 1979. *Cálculo diferencial e integral.* (Docencia. Buenos Aires).
- PINEDA, M. 2013. *Un problema con la concepción de la continuidad de una función.* (El Cálculo y su Enseñanza, Volumen 4, México.)
- SAIZ, I.; GOROSTEGUI, E.; VILOTTA, D. 2013. *La matemática necesaria para la enseñanza de los racionales en secundario.* (Yupana, Revista de Educación matemática de la Universidad Nacional del Litoral).