CB05

LAS ALTURAS DE UN TRIÁNGULO: ACTIVIDADES PARA LLEGAR CON LOS ESTUDIANTES A SU DEFINICIÓN

Sabrina Maffei, Rodolfo Murúa & Carmen Sessa

Universidad Pedagógica
Camino Parque Centenario 2565, Gonnet, Buenos Aires
carmen.sessa@unipe.edu.ar

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación: Relato de una experiencia de enseñanza. Educación Secundaria. Didáctica de la Matemática.

Palabras claves: alturas de un triángulo, construcción de teoría, validación, escritura

RESUMEN

En el año 2015 elaboramos una propuesta para trabajar con la noción de alturas de un triángulo que se plasmó en un documento curricular llamado “Las alturas de un triángulo: actividades para llegar con los estudiantes a su definición” (próximamente en http://entrama.educacion.gov.ar/). Las cuatro primeras actividades de la secuencia enfrentan a los alumnos con tareas que ponen en juego las tres alturas de un triángulo, aún antes de haber trabajado una definición de ese objeto. Son justamente preparatorias de la definición, en el sentido de que se construyen ahí relaciones que luego se plasman en ella. De este modo *la definición aparece como una síntesis, como un punto de llegada de un trabajo sobre un tipo de problema*, invirtiendo el camino usual de *definición a problemas de aplicación*.

Las primeras seis actividades propuestas en el documento mencionado fueron puestas en aula en la Escuela Secundaria Nº69 del distrito Lomas de Zamora en un segundo año durante tres semanas (dos clases semanales de dos horas cada una). Aquí se presenta el análisis de la cuarta actividad con su respectiva experiencia de aula a partir de la cual se llegó a una definición provisoria de altura de un triángulo.

INTRODUCCIÓN

El documento “Las alturas de un triángulo: actividades para llegar con los estudiantes a su definición” surge de la necesidad de pensar una propuesta que invite a los docentes a incluir en sus aulas un trabajo geométrico. La primacía del álgebra en la escuela media no debería hacernos perder de vista el valor formativo que tiene involucrar a los estudiantes en un trabajo que cruza de un modo particular “actuar y reflexionar”, cómo el trabajo en geometría.

Como mencionamos en el resumen, las primeras actividades de la propuesta involucran a las alturas de un triángulo sin conocerlas formalmente. En la escuela primaria se realiza un trabajo en torno al trazado de ellas pero sin detenerse en su definición. Entonces el desafío que se nos planteó fue: ¿cómo llegar a la definición de altura de un triángulo sin que sea una imposición docente? ¿Cómo lograr que los alumnos identifiquen que los triángulos tienen tres alturas? Pensamos que al tratar de ubicar un triángulo dentro de dos renglones paralelos dibujados en la hoja ayuda a considerar que hay alguna característica del mismo involucrada que determina que pueda entrar o no dentro de una “banda”. Eligiendo convenientemente la distancia entre los renglones también se le puede otorgar sentido al hecho de que los triángulos tienen tres alturas dependiendo del lado que se tome como base.

HACIA LA DEFINICIÓN DE ALTURA

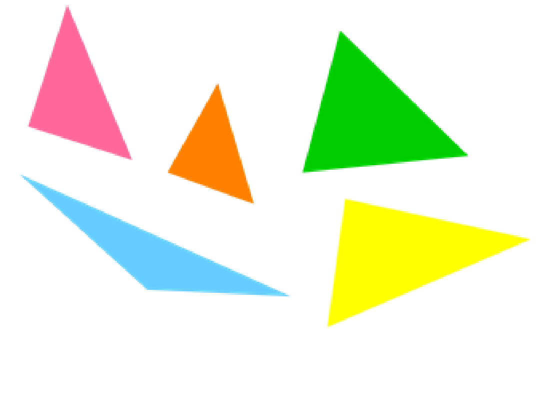
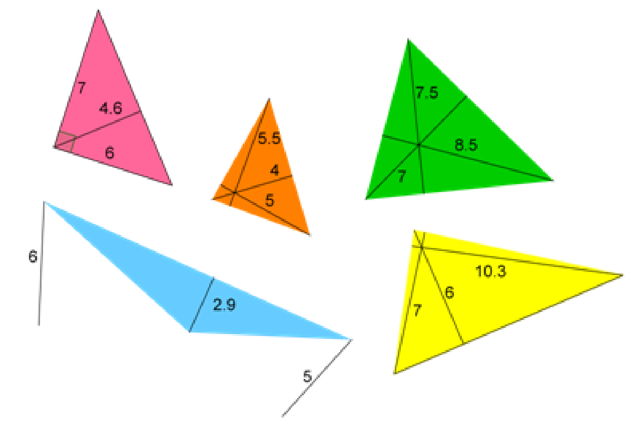
Los enunciados[1] de las primeras cuatro actividades

Actividad 1

Esta actividad fue pensada para ser resuelta en pequeños grupos.

Para realizarla se entrega a cada grupo un juego de triángulos y una hoja A4 con dos pares de renglones sombreados. La distancia sombreada entre los renglones debe ser de 6 cm.

Enunciado de la actividad para los estudiantes, que puede ser dada en forma oral: *Ubiquen, si es posible, estos cinco triángulos dentro de estos pares de renglones sombreados. Si lo consideran necesario, pueden apoyar los triángulos sobre ellos. Una vez que se aseguraron que hayan entrado entre los renglones, dibujen el borde del triángulo en la zona sombreada.*

Para los alumnos	Para los profesores
	

Los triángulos de la izquierda fueron entregados por la docente. Los renglones tenían una distancia de 6 cm.

En esta primera actividad no se esperaban argumentaciones haciendo referencia a las medidas de las alturas de los triángulos ya que justamente este conocimiento era algo que se buscaba construir; pero sí que los estudiantes concluyan que algunos triángulos se pueden ubicar entre los renglones en cualquier posición que se los ubique; otros pueden no entrar en una posición pero en otra posición sí; y algunos no entran de ningún modo.

Este problema fue retomado luego de arribar a la definición de la noción de altura de un triángulo.

Actividad 2

Esta actividad fue pensada para ser resuelta en grupos y respetando la misma constitución de los grupos de la actividad 1. Se les entrega a los alumnos otra hoja A4 apaisada con un solo renglón dibujado y el mismo triángulo verde utilizado en la actividad 1. El renglón puede estar pintado con un color para diferenciarlo del que tendrán que trazar los alumnos. A continuación, presentamos el enunciado con los tres ítems previstos para el desarrollo de la actividad. A los alumnos se les entrega solamente el ítem a., las otras dos consignas serán dadas después de concluido el trabajo en grupos en torno a dicho ítem.

Enunciado:
a. Dibujen un segundo renglón de manera tal que el triángulo verde quede dentro de ellos y que la distancia entre los renglones sea lo más "chica" posible. Aquí también el triángulo puede estar apoyado sobre el renglón.

[1] Los enunciados son textuales del documento mencionado en el resumen.

b. (Oralmente al empezar la discusión colectiva) ¿Cómo hicieron para medir la distancia entre un renglón y el otro?
c. (Oralmente durante la discusión colectiva) Si ahora se quiere apoyar el triángulo en el lado h, ¿cuál sería la distancia mínima entre dos renglones? ¿Y en el lado g?

Actividad 3

Se les entrega nuevamente a los alumnos el triángulo celeste de la actividad 1 con una hoja lisa. Esta actividad está pensada para ser resuelta en parejas.

Enunciado:
Vamos a trabajar ahora con el triángulo celeste. Tienen que hallar la distancia mínima entre dos renglones para poder ubicarlo apoyado en el lado j, en el lado k y en el lado l.
Luego completen la tabla:

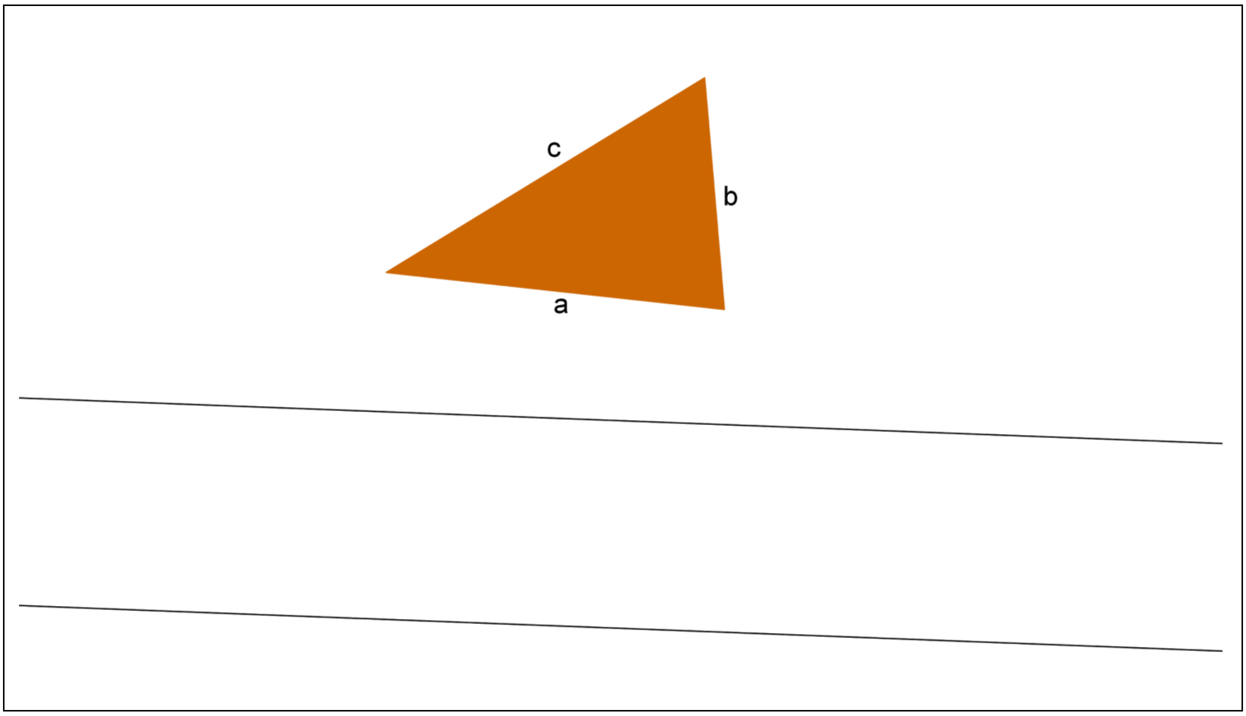
Triángulo celeste			
Lado apoyado	*j*	*k*	*l*
Distancia mínima			

Actividad 4

Esta actividad está pensada para ser resuelta de la siguiente manera:
- en un primer momento, se enuncia la actividad en forma oral y por parejas reciben una hoja con preguntas que tienen que ser contestadas acerca de un triángulo que allí aparece;
- luego, se juntarán dos parejas y formarán un nuevo equipo. El docente les entregará otra copia de la actividad. Tendrán que ponerse de acuerdo con respecto a las respuestas que serán volcadas en esta última hoja ya que serán compartidas en la discusión colectiva;
- por último hay una discusión colectiva en torno a las producciones de los grupos.

Enunciado para dar en forma oral: *En esta hoja tenemos un triángulo y un par de rectas paralelas. Tienen que contestar por parejas las preguntas. Pueden trazar y medir todos los segmentos que necesiten tanto dentro del triángulo como entre las rectas paralelas. No se puede calcar ni recortar el triángulo.*

1) Decidan si se puede ubicar el triángulo entre las dos rectas paralelas apoyando el lado *b* sobre una de ellas. Expliquen cómo lo decidieron.
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
2) ¿Y apoyando el lado *c*? Expliquen cómo lo decidieron.
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
3) ¿Y apoyando el lado *a*? Expliquen cómo lo decidieron.
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………



Luego de arribar junto a los alumnos (a continuación reflejamos qué ocurrió en el aula en esta discusión colectiva) a una definición provisoria de altura de un triángulo se les entrega la siguiente actividad.

Actividad 4, continuación

Se reparte a cada alumno un triángulo marrón[2] *para que lo peguen en la carpeta y se les pide que tracen las tres alturas del triángulo, una relativa a cada lado y completen la tabla:*

Triángulo marrón			
Lado	*a*	*b*	*c*
Medida de la altura			

Como **cierre de la actividad 4** proponemos la siguiente tarea:

Enunciado

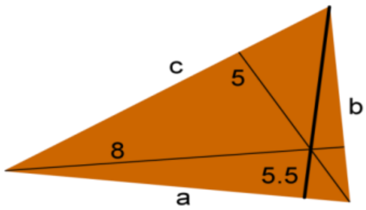
Propongan una medida entre dos rectas paralelas para que el triángulo marrón entre dentro de ellas apoyando el lado a y el lado c, pero no entre apoyando el lado b.

Descripción de la actividad 4 y su puesta en aula

Esta es la primera actividad de la secuencia en donde se tienen que buscar argumentos prescindiendo de la verificación empírica, es decir, sin poder manipular el triángulo para probar si entra o no entre dos rectas paralelas. Al no tener el triángulo recortado los alumnos tuvieron que tomar decisiones sobre qué medir del triángulo marrón para poder responder las preguntas.

Las medidas de las alturas del triángulo y la distancia entre las rectas fueron escogidas con un propósito. Elegimos intencionalmente que su distancia **sea de 5 cm**, coincidiendo con la menor altura del triángulo. Por esa razón entra solo apoyado sobre el lado *c*.

[2] Es el mismo triángulo que el de la actividad 4.

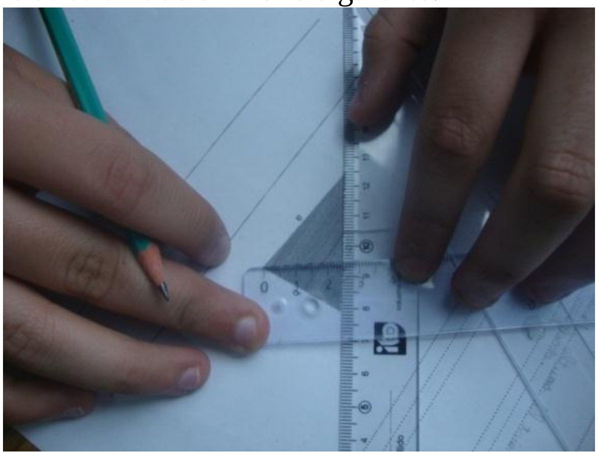


Triángulo con las alturas marcadas, los alumnos no tienen esa información

Las primeras estrategias de los alumnos

Con respecto a la primera pregunta acerca de si el triángulo entraba apoyado sobre el lado *b*, varias parejas decían que no, porque *b* medía[3] 2,8 cm y la distancia entre las paralelas 2,5 cm.

Con un alumno, Brian, pasó algo llamativo: para decidir si el triángulo entraba apoyado sobre el lado *b* midió directamente el lado *a*. Creemos que esto no se debió a un error conceptual sino a un "efecto visual" al creer que los lados *a* y *b* formaban un ángulo recto. Suponemos esto ya que este alumno identificó bien las demás alturas del triángulo. Por ejemplo, para medir la relativa al lado *c* hizo lo siguiente:



Brian apoyó la escuadra sobre la "base *c*" del triángulo y colocó la regla "perpendicularmente", haciéndola pasar por el vértice opuesto para medir su altura relativa.

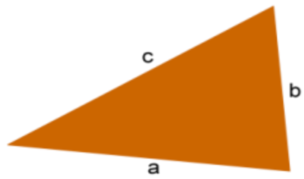
Otro estudiante, Leonel decide si el triángulo entra apoyado sobre el lado *c* de la siguiente manera:

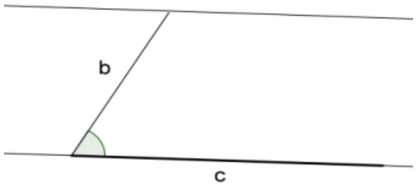
-toma la medida del lado *c* con una regla graduada.

-sobre una de las rectas paralelas, traza un segmento con igual longitud al lado *c*.

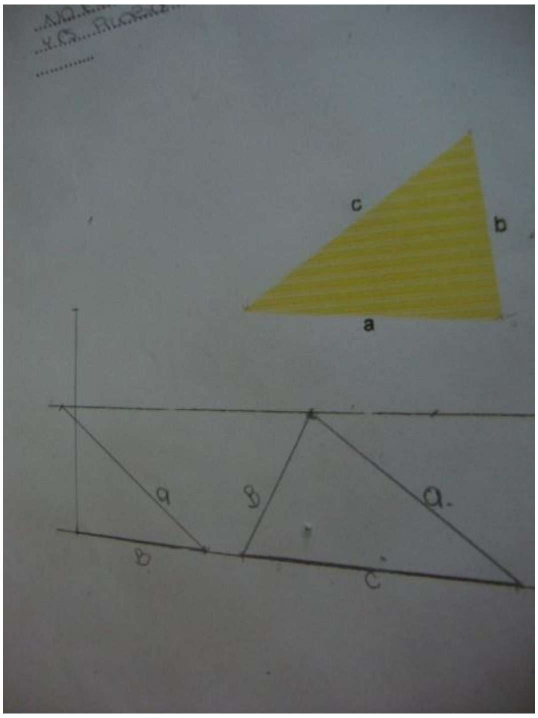
-toma la medida del lado *b* con la regla, ubica el cero de la regla en uno de los extremos del segmento marcado sobre la recta y la mueve hasta que corta a la segunda recta paralela con medida igual al lado *b*. ¡Está usando la regla para trasladar medidas como un compás!, Mostramos la siguiente construcción el dibujo que logra:

[3]Usamos otro triángulo diferente al marrón que figura en el enunciado de la actividad 4 en este documento, por lo tanto, de las alturas no coinciden con las originales.





Y luego dijo: “no puede entrar porque sería otro triángulo”. Aquí puede ser que el alumno identificara que el ángulo que formaban *b* y *c* en el triángulo marrón, era visualmente distinto al que se formaba entre los renglones.
Ante variadas intervenciones nuestras este alumno seguía opinando que no entraba el triángulo entre las rectas paralelas apoyado sobre el lado *c*. Él veía “claramente” que el nuevo triángulo que se formaba al unir los vértices de *b* y *c* era distinto al original. Quizás en su mente apoyaba los lados *b* y *c* del marrón sobre los marcados en el dibujo y notaba que el tercer lado le quedaba distinto.
Como los alumnos habían trabajado hace poco con construcciones con regla no graduada y compás algunos preguntaron si se podía utilizar el compás. Se accedió a ese pedido y Ludmila pensó la siguiente estrategia para decidir si el triángulo entraba apoyado sobre el lado *b*: utilizó el compás para trasladar el segmento *b* sobre un renglón. Luego tomó la medida de *a* y la trasladó pinchando en un extremo del “nuevo” lado *b* e hizo una “marquita” en la intersección entre la “circunferencia de radio a” (la alumna no trazó la circunferencia entera) y el segundo renglón. Finalmente tomó la medida de *c* y pinchando sobre el otro extremo del “nuevo” *b* y se fijaba si el triángulo “cerraba bien”, como se puede ver en la figura de la izquierda:



En esta foto el triángulo es amarillo porque salió mal la impresión.

En cambio, como se puede ver en el triángulo de la derecha, ¡realizando la misma construcción apoyando el lado *c* pudo construirlo!
La estrategia nos resultó muy interesante, pero, ¿cómo podía validar la alumna que el triángulo que logró hacer entrar apoyado sobre el lado c era el mismo que el dado?
Suponemos que ella asumía que el triángulo era el mismo porque los tres lados eran iguales, pero en verdad no disponíamos aún de criterios de congruencia de triángulos. Decidimos no desechar esta estrategia y llevar la próxima clase un triángulo idéntico recortado para que viera si al superponerlo coincidía con el que ella había dibujado. Por otro lado, resolvimos no tomar este procedimiento para discutirlo colectivamente porque no están involucradas las alturas y además los alumnos no disponen de las herramientas para validar que los triángulos son congruentes.

Una decisión docente ante las dificultades en el aula
Luego del primer día de trabajo en el aula con la actividad 4 reflexionamos en nuestro grupo sobre la complejidad de la misma. Por un lado, era la primera vez que los alumnos tenían que justificar algo sin poder manipular el triángulo. Pero además tenían que explicar por escrito y en parejas cómo se dieron cuenta que el triángulo entraba o no dentro de los renglones, apoyado sobre cada lado. Y finalmente tenían que juntarse con otra pareja, explicarse sus conclusiones y negociar un nuevo escrito definitivo para entregarle al docente. También el ponerse de acuerdo, negociar, explicarle al otro (y que el otro entienda), son todos objetos de enseñanza que tienen que seguirse trabajando y no deben agotarse en una sola actividad.
Nosotros habíamos retenido una copia de las escrituras por parejas y al notar las dificultades que enfrentaban con la escritura grupal decidimos reorganizar la tarea y pasar a la siguiente instancia: se escriben en el pizarrón cuatro de los escritos elaborados en parejas y se le entrega a cada alumno un papel para que coloque el nombre de la producción que prefiere entre las cuatro. En ese papel no tenía que estar escrita la justificación de su elección. La intención era que todos los estudiantes formaran una opinión de cada uno de los escritos y que estas ideas fueran luego compartidas en el espacio de la discusión colectiva.

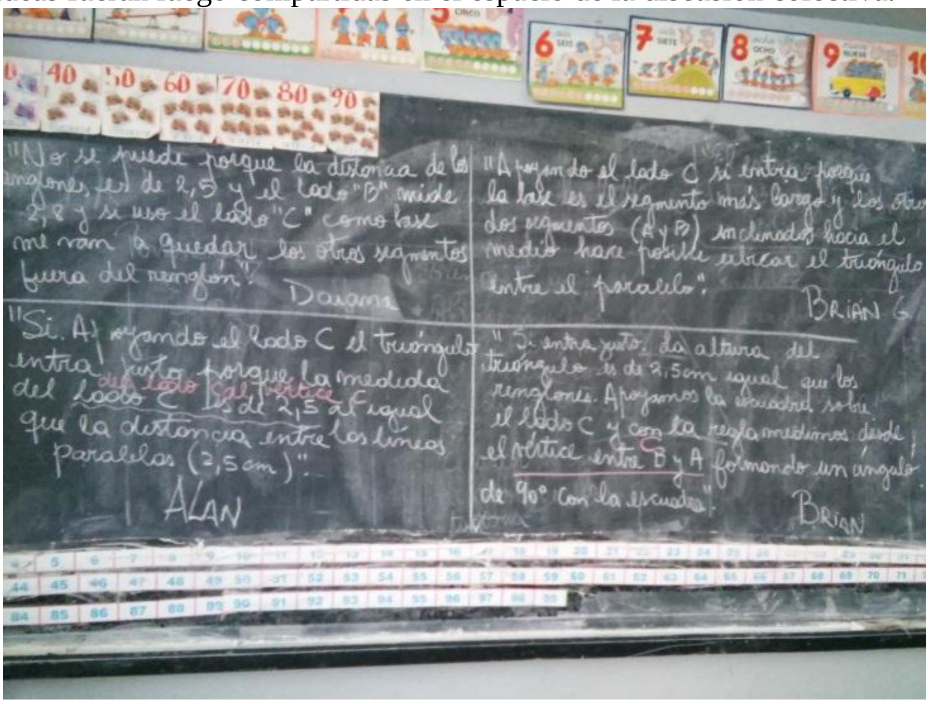


Foto del pizarrón con las 4 producciones seleccionadas para continuar el trabajo

Discusión colectiva: del ajuste de las producciones de los estudiantes a la construcción de la definición de altura

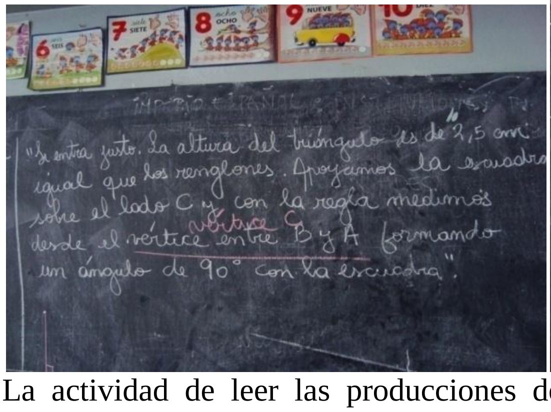
Las producciones más votadas fueron las últimas dos. La primera producción discutida fue la de Daiana. Para algunos compañeros tenía sentido el argumento utilizado: como la medida del lado *c* es mayor que la distancia entre las paralelas, el triángulo no entra. Era tan fuerte la idea que, inclusive los estudiantes que habían contestado que sí entraba el triángulo apoyado sobre el lado *c* dudaron. Cada uno necesitó volver a su propio trabajo. Se reparten las hojas con el problema. Con apoyo del triángulo tamaño pizarrón que la docente había llevado y de los triángulos chiquitos, se llega a la conclusión de que sí entraba y que la medida del lado *c* no condiciona tal ubicación.

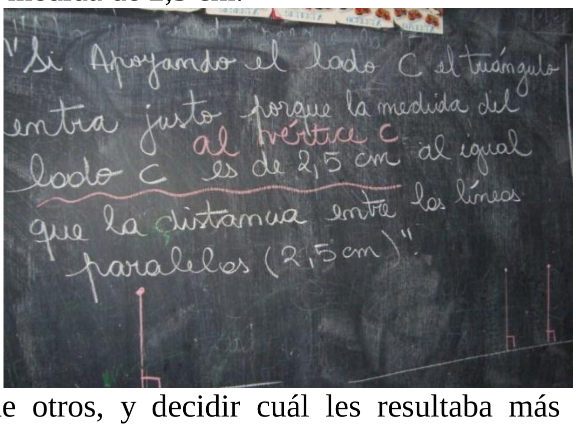
La segunda fue la de Brian G. Los dueños de este escrito mencionan que el triángulo sí entra por la inclinación de los lados. Al leer fue necesario que ellos expliquen a qué se refieren con "inclinación" porque no se entendía. Para Martín y Brian, justamente el ángulo que formaban los lados *a* y *b* era lo que permitía que se pudiera ubicar el triángulo entre las rectas.

Es el turno de la producción de Alan. Sus compañeros destacan que el escrito estaba claro y completo. La docente interviene leyendo frase por frase y haciendo hincapié en si la medida del lado *c* era 2,5. Los estudiantes dicen que sí. La docente vuelve al escrito de Daiana donde estaba presente la medida real del lado *c*. Fue interesante como tener los escritos todo el tiempo disponibles para toda la clase en el pizarrón ayudó a contraponer información que en algún momento de la clase todos aceptaban por cierta. Brian M. reconoce en el trabajo de Alan su propio trabajo e interviene para decir que Alan midió desde el lado *c* al vértice opuesto, la altura respecto del lado *c*. Se comparan las dos producciones efectivamente, ambos habían medido la altura solo que Alan no utiliza el término "altura".

En el escrito de Brian, el más votado por ser "el más claro y el que explica cómo se hace" solo se ajusta como es llamado el vértice opuesto.

Hacia el final de clase se hacen entre todos algunos ajustes a estos escritos y la idea de altura queda "flotando" en el aula. Más aún, como se puede ver en una de las imágenes, un grupo utilizó la palabra altura para referirse a esa medida de 2,5 cm.





La actividad de leer las producciones de otros, y decidir cuál les resultaba más clara, permitió una "vuelta de tuerca" sobre el tema de la escritura y volvió a entusiasmar a los estudiantes

En la siguiente clase y para recuperar lo trabajado en la primera, la docente comienza leyendo las dos últimas producciones y preguntándoles a los estudiantes si recuerdan qué ajustes se le había hecho a cada uno y la razón del mismo. Se comienza a evocar el trabajo y nuevamente se acompaña esta actividad con el triángulo "tamaño pizarrón". A partir del escrito de Brian se elaboró entre toda la clase la definición de altura, **se identificó que era un segmento y que tenía que ser perpendicular al lado y llegar hasta el vértice opuesto** (a los alumnos no se les comunicó que esta era una definición provisoria)**.**

Se registra por escrito la definición de altura en un afiche con la intención que esté disponible a lo largo de la secuencia y en las carpetas de los alumnos.
Luego se trabajaron actividades en donde los alumnos llegaron a ajustar esta definición para que abarque a los triángulos obtusángulos y rectángulos. Por último, se retomó la actividad 1 para que los alumnos argumenten por qué el triángulo amarillo entraba apoyado solamente en uno de sus lados. En su momento los alumnos no tenían herramientas para validar esta cuestión.

CONCLUSIONES

Pensar el trabajo en matemática como una trama en la cual se articulan nociones, tipo de actividades y técnicas permite planear la enseñanza sin privilegiar unas sobre otras. Esperamos que esta comunicación de pie para reflexionar sobre eso a partir del ejemplo particular que presentamos.
Queremos volver a enfatizar que todas las actividades diseñadas comparten la intención didáctica de involucrar a nuestros estudiantes en la tarea matemática a la cual se los convoca. Suponemos compartida esa intención con nuestros colegas lectores y posiblemente tendrán otros ejemplos de escenarios diseñados por ellos con el mismo propósito.
A modo de cierre nos gustaría comentar que esta fue una experiencia gratificante para toda la comunidad de la clase: alumnos y docente desarrollaron un trabajo desafiante pero posible, en el que todos fueron “actores protagónicos”. Este año la docente que llevó al aula la secuencia presentada es la profesora de los mismos estudiantes en el curso siguiente. Con mucha satisfacción observó que los alumnos podían recuperar cuestiones trabajadas a lo largo de las distintas actividades trabajadas el año anterior. Pudieron reconstruir tanto la definición de altura de un triángulo para construir figuras y luego calcular su área como las técnicas para trazarla.
Proponemos a nuestros colegas que se animen a probar los problemas en sus aulas sintiéndose libres de ajustarlos según las características propias de sus alumnos. Por todo eso esperamos que esta comunicación pueda servir como insumo para “pensar la clase” y seguir trabajando para la formación de los estudiantes.

REFERENCIAS

- Borsani, V.; Lamela, C.;Murúa, R. y Sessa, C. (2015). *Hacer Matemática 7/1*, Editorial Estrada,Buenos Aires.
- Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría*, Libros del Zorzal, Buenos Aires.
- Santaló, L. (1979). Conferencia Inaugural en Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática). V CIAEM Campinas (Brasil).
- Sessa C. (1998). Acerca de la enseñanza de la geometría”, Capítulo 2 en: *Matemática, Temas de su didáctica*, Programa Prociencia, CONICET.