CB04

REFLEXIONANDO SOBRE NUESTRAS PRÁCTICAS ALGEBRAICAS EN EL MARCO DEL ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO

María Elena Markiewicz & Silvia C. Etchegaray

Universidad Nacional de Río Cuarto
Ruta 36 – Km 603 (Río Cuarto, Pcia.Córdoba, Argentina)
mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación: Trabajo de investigación - Educación Superior - Didáctica de la matemática

Palabras claves: análisis didáctico, objetos, procesos, conflictos semióticos, algebra

RESUMEN
El objetivo de este trabajo es realizar un proceso de reflexión sobre nuestras propias prácticas docentes en el nivel básico del Algebra universitaria. Para ello, hemos adoptado herramientas que brinda el Enfoque Onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), en tanto herramientas de análisis didáctico-matemático.
Nuestro contexto de reflexión es el ámbito de la asignatura Introducción al Algebra para alumnos de Ciencias Exactas. El análisis didáctico que hemos realizado a una tarea que habitualmente planteamos en dicha asignatura y a un fragmento de una clasede la misma está planteado en términos de los "objetos y procesos matemáticos" que se ponen en juego en dichas instancias.
En el marco del EOS este tipo de análisis permite poner en evidencia la complejidad onto-semiótica de las prácticas que se ponen en funcionamiento y los posibles "conflictos semióticos" que pueden surgir, los cuales, al ser previstos, permiten ya sea la reformulación de las tareas o ajustes en las intervenciones del docente en la clase, a fines de mejorar el diseño y la implementación de procesos de estudio matemáticos.

INTRODUCCIÓN
El presente trabajo está enmarcado dentro del Proyecto de Investigación: "El análisis de prácticas, objetos y procesos como condicionantes de diferentes estudios didáctico-matemáticos en la educación superior, inicial y continua", que se desarrolla en el ámbito del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Río Cuarto.
Teniendo en cuenta que, dentro de las tareas principales que debemos realizar como docentes se encuentran el diseño e implementación de procesos de estudio y la valoración de la propia práctica docente con el fin de favorecer el aprendizaje de nuestros estudiantes, en nuestro proyecto hemos adoptado el Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática (EOS), desarrollado por Godino (2002) como marco teórico didáctico. Este enfoque "trata de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan

su desarrollo" (Godino, Batanero y Font, 2009: 4), con lo cual nos brinda herramientas útiles para el análisis de nuestras propias prácticas docentes

El EOS estudia los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde un enfoque unificado del conocimiento matemático, abarcando diferentes dimensiones: epistémica (referida a la naturaleza de los objetos matemáticos), cognitiva (procesos de acceso al conocimiento matemático, basados en la semiótica), instruccional (enseñanza y aprendizaje en el seno de instituciones escolares) y sistémico-ecológico (relaciona las anteriores dimensiones entre sí y con el contexto).

En diversos trabajos (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Font y Wilhelmi, 2008) se han propuesto cinco niveles o tipos de análisis aplicables a un proceso de estudio matemático (ya planificado o bien ya implementado), los cuales constituyen una ampliación progresiva de la capacidad de análisis de los procesos de estudio matemático.

En este trabajo queremos situar nuestro ámbito de estudio y reflexión en contenidos que se desarrollan en Algebra a nivel de primer año de la universidad. La intención es mostrar, por una parte, el análisis "a priori" realizado a una tarea asociada a la demostración de una propiedad algebraica que habitualmente presentamos a nuestros alumnos y, por otra parte, el análisis " a posteriori" realizado a un fragmento de una clase que gira en torno al máximo común divisor. Estos análisis serán realizados en base a las herramientas propuestas por el EOS, en particular, aquellas correspondientes a los dos primeros niveles de análisis que involucran las "configuraciones de objetos y procesos matemáticos intervinientes en un proceso de estudio matemático".

Más específicamente, queremos analizar objetos y procesos intervinientes en la resolución de la tarea y en el episodio de clase antes mencionados, a fines de mostrar la complejidad onto-semiótica de las prácticas que se ponen en funcionamiento así como los conflictos semióticos potenciales, es decir, disparidades o desajustes entre significados personales e institucionales (Godino, 2002) que se podrían estar presentando en su puesta en marcha. Como docentes, ser conscientes de dicha complejidad y de la presencia potencial de ciertos conflictos, nos permite mejorar la organización de la gestión de la clase favoreciendo la producción de matemática en las prácticas de nuestros estudiantes.

DESARROLLO

Tal como mencionábamos en la introducción, realizaremos el análisis onto-semiótico de una tarea y de un episodio de clase que corresponden a temas claves de la introducción al Álgebra, como lo son números naturales y, en particular, propiedades que se demuestran utilizando el Principio de Inducción Matemática y divisibilidad, en particular, definición y propiedades del máximo común divisor. Tanto la tarea planteada como el episodio de clase al que hacemos referencia atrapan cuestiones que son fundamentales para comprender estos temas y que, en general, plantean muchas dificultades para los alumnos en este nivel inicial de enseñanza universitaria. Esta es nuestra principal razón práctica que fundamenta la elección de estos "ejemplos de análisis" propuestos.

También hemos mencionado que el EOS propone cinco niveles de análisis, aunque en este trabajo nos situamos en los dos primeros nivelesya que, al considerar que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas, la explicación de esta complejidad onto-semiótica que visibiliza el origen pragmático del conocimiento implica considerar, como mínimo, estos dos niveles de objetos y procesos que emergen de lo que denominamos "actividad matemática":

1) Un primer nivel que describe los sistemas de prácticas matemáticas y objetos matemáticos (previos y emergentes)que intervienen o pueden resultar de la realización de dichas prácticas: tareas, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentaciones, lenguaje.

2) Un segundo nivel de análisis que se centra fundamentalmente en los procesos que intervienen (o emergen) en la realización de las prácticas. Entre estos procesos podemos mencionar:

- proceso de materialización-idealización (asociado a la dualidad ostensivo- no ostensivo): un objeto ostensivo es utilizado para representar, evocar o visualizar un objeto no ostensivo ideal.
- proceso de particularización-generalización (dualidad ejemplar-tipo): el análisis de un objeto particular "ejemplar" permite establecer conclusiones sobre un conjunto de objetos y el análisis de una propiedad sobre un conjunto de objetos nos lleva a pensar cómo funciona un caso particular.
- proceso de descomposición-reificación (dualidad sistémico-unitario): el problema global puede descomponerse en problemas elementales, es decir, los objetos intervinientes deben ser tratados como sistémicos. Pero tras el proceso de estudio los conceptos y propiedades emergentes deben ser reificados, es decir, vistos como objetos unitarios a fin de ser aplicados a la resolución de nuevos problemas.
- proceso de representación-significación (dualidad expresión-contenido): consiste en atribuir significado a una expresión. Los procesos de representación y significación son "densos" en la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución de problemas y pueden ser fuente de conflictos semióticos potenciales.
- proceso de personalización-institucionalización (dualidad personal-institucional): en una primera fase de estudio es necesario lograr que los estudiantes asuman el problema y se involucren en su resolución (personalización). Luego, mediante una adecuada gestión docente, se promoverá la institucionalización de los mismos.

Primer ejemplo: Un análisis onto-semiótico a priori

A continuación presentaremos una formulación "habitual" de la tarea seleccionada, tal como se propone en las asignaturas iniciales de Álgebra y como también se suelen presentar en libros de texto, acompañada de un análisis de dicha tarea en términos de "objetos" y "procesos" que se ponen en juego en posibles resoluciones de las mismas, teniendo en cuenta el contexto en el que es planteada.

Tarea:

Demuestre, utilizando el Principio de Inducción Matemática, que:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n} 2.i = n.(n+1)$$

Esta tarea fue elegida para su análisis, tal como se anticipara en la introducción de este trabajo, debido a las dificultades que sostenidamente se observan en la práctica docente cotidiana y que, no sólo tienen que ver con la demostración en sí, sino también y fundamentalmente, con la interpretación de la propiedad que los alumnos tienen que demostrar, lo cual queda plasmado por ejemplo, cuando se les cuestiona acerca de lo que "dice" la propiedad y no lo pueden expresar coloquialmente o cuando la tienen que aplicar en una situación particular como el cálculo de los 25 primeros números pares.

Primer nivel de análisis (en términos de OBJETOS puestos a funcionar):

Tarea: Se trata de una tarea en la que se pide al alumno demostrar una propiedad ya establecida, utilizando el Principio de Inducción Matemática.

Procedimientos: Los procedimientos o acciones que el alumno deberá realizar para resolver esta tarea están ligados a la sucesión de pasos necesarios para realizar la demostración utilizando el Principio de Inducción:

- Identificación de la propiedad P que hay que demostrar, lo cual puede incluir la interpretación de $\sum_{i=1}^{n} 2.i$como la suma extendida: 2 + 4 + 6 + …+ 2.n
- Planteo del caso base P(1) y prueba del mismo.
- Planteo y prueba de la etapa inductiva, lo cual incluye:
- Suponer que la propiedad vale para un natural n, es decir
    - P(n): 2+4+6+…+2n= = n(n+1) (identificación y planteo de la hipótesis inductiva).
    - Probar que la propiedad vale para el natural siguiente n+1, es decir
    - P(n+1): 2+4+6+…+2(n+1) = (n+1).(n+2)
    - En la demostración de P(n+1),
    - partir de 2+4+6+…+2.(n+1)
    - poner de manifiesto el término anterior a 2.(n+1), esto es: 2+4+6+…+2.n + 2.(n+1);
    - aplicar la propiedad asociativa de la suma: (2+4+6+…+2.n) + 2.(n+1);
    - reemplazar 2+4+6+…+2.n por n.(n+1) usando la hipótesis inductiva
    - y realizar operaciones algebraicas (factor común) para obtener la expresión deseada (n+1).(n+2).

Aunque esta sería la resolución más esperada, otra alternativa es que trabajen directamente con la sumatoria:$\sum_{i=1}^{n} 2.i$, sin expresarla como suma extendida.

Propiedades: Entre las propiedades que se ponen en juego en ambas resoluciones podemos mencionar:

- La propiedad dada, es decir: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n} 2.i$ = n.(n+1) (previa)
- Propiedades asociativa de la suma y distributiva del producto respecto de la suma.
- El número par anterior a “2.(n+1)” es “2.n”, o, en la segunda alternativa: el último término de la $\sum_{i=1}^{n+1} 2.i$ es 2.(n+1).

Definiciones:

- Número natural, número par (como un natural n de la forma 2.k con k ∈ ℕ)
- Suma y producto de números naturales
- Definición de sumatoria (como suma desplegada se hace explícita en la primera alternativa)

Argumentaciones:

- Argumentación puramente deductiva utilizando el Principio de Inducción Matemática, según el cual si se prueba el caso base (P(1)) y la etapa inductiva ($\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \Rightarrow P(n+1)$) entonces se puede concluir que $\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$.
- Reglas de inferencia de la lógica deductiva, como el Teorema de la Deducción según el cual para demostrar una implicación basta suponer el antecedente y deducir el consecuente y la Introducción del generalizador, que asegura que si una propiedad se cumple para un individuo “n” cualquiera, arbitrario de un conjunto, entonces la propiedad se cumple para todos los individuos de dicho conjunto.

Lenguaje: algebraico, que se ve reflejado por ejemplo, en expresiones como:
$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n} 2.i$ = n.(n+1) y sobre el cual se puede pensar y transformar.

Segundo nivel de análisis (en términos de PROCESOS Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS):

En la resolución de esta tarea están involucrados los siguientes procesos:

- **de materialización-idealización**:
  - La expresión 2.i se usa para representar un número par.
  - El ostensivo $\sum_{i=1}^{n} 2.i$o 2+4+6+…+2.n se utiliza para representar la suma de todos los números pares desde 2 hasta 2.n.
- **de particularización-generalización**:
  - el planteo del caso base P(1) requiere que el alumno considere un caso particular de la fórmula general.
  - para probar la etapa inductiva: $(\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}: \mathrm{P(n)} \Rightarrow \mathrm{P(n+1)})$ el alumno tiene que realizar un proceso de particularización muy especial, ya que para probar esta generalización (es decir, que para todos los naturales vale la implicación) debe considerar un n particular arbitrario. Una vez probada la implicación para tal n, debe realizar una generalización para afirmar que la misma vale para un n cualquiera.
  - A partir de la prueba del caso base y de la etapa inductiva, debe generalizar a que la propiedad vale para todos los números naturales.
- **de descomposición-reificación**:
  - si bien la resolución de la tarea (la demostración en este caso) se debe descomponer en problemas más elementales, como el planteo y la demostración del caso base y de la etapa inductiva y que, para ello, los objetos intervinientes deberían ir analizándose separadamente, al finalizar la resolución de la tarea se pretendería que la propiedad demostrada se vea como un objeto unitario a fin de ser aplicada, por ejemplo, en nuevas situaciones.
- **de representación-significación**:
  - para poder llevar a cabo la demostración de la propiedad como se pretende, es necesario atribuir significado a la expresión: $\sum_{i=1}^{n} 2.i$ = n.(n+1) y, en particular, a la representación $\sum_{i=1}^{n} 2.i$.

Estos procesos, como ya hemos mencionado, pueden ser origen de conflictos semióticos, como por ejemplo:

- No reconocer que la expresión 2.i está representando a un número par ni que la expresión $\sum_{i=1}^{n} 2.i$ está representando la suma de los primeros n números pares, sobre todo si el alumno no tiene disponible esta definición de número par o no se ha trabajado dando contenido y sentido previamente al símbolo de sumatoria como representación de una suma de n términos de una forma dada (que cumplen una propiedad)
- La falta de atribución de significado a la igualdad $\sum_{i=1}^{n} 2.i$ = n.(n+1) y, en particular, a la representación $\sum_{i=1}^{n} 2.i$, puede impedir el planteo correcto tanto del caso base, como de la etapa inductiva, en particular de la hipótesis inductiva que, de hecho, muchas veces los alumnos suelen plantear como 2.n= n.(n+1), en otras palabras identifican la suma con el último término.
- Dificultades para otorgar significado a la expresión $\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \Rightarrow P(n+1)$, lo que conlleva no reconocer que el carácter general de la afirmación exige la necesidad de considerar un n particular arbitrario, y demostrar que para el mismo vale la implicación (lo cual exige suponer que para ese n vale el antecedente y demostrar que vale el consecuente).
- Dificultad en otorgar significado al tipo de argumentación que propone el Principio de Inducción matemática en el sentido de que si se muestra que se cumplen las dos

hipótesis del mismo (caso base y etapa inductiva) es suficiente para demostrar que vale la conclusión ($\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$) y, por tanto la propiedad propuesta.

Vale la pena destacar que, si bien los conflictos mencionados tienen relación con los diferentes procesos que hemos descripto (de materialización-idealización, departicularización-generalización, de descomposición- reificación), todos están atravesados en mayor o menor medida por el problema fundamental de otorgar significado a las expresiones que se utilizan.

Con el fin de promover que el alumno otorgue significado a la propiedad y a los términos que en ella intervienen y se involucren en la situación (proceso de personalización-institucionalización) creemos que es necesario problematizar como objeto de enseñanza al símbolo de sumatoria (con una serie de tareas que apunten a la comprensión del mismo) y optar por reformulaciones de la tarea como la siguiente, donde el alumno pase a ser, como diría Brousseau (2007), un “proponente” de las afirmaciones que se pretenden luego demostrar:

> *Expresa las siguientes sumas y calcula su resultado: la suma de los dos primeros números naturales pares; la suma de los tres primeros números naturales pares;la suma de los cuatro primeros números naturales pares; la suma de los cinco primeros naturales pares.*
>
> *¿Cómo expresarías la suma de los n primeros naturales pares?*
>
> *Propón una expresión general que relacione la suma de los primeros n números pares y su resultado. ¿Cómo validarías la propiedad obtenida?*
>
> *Calcula, utilizando el resultado obtenido, la suma de los primeros 25 números pares.*

Esta reformulación de la tarea exigiría que el alumno ponga a funcionar con mayor conciencia nuevos objetos y procesos que pueden ayudar a enfrentar desde otro lugar algunos de los conflictos semióticos anteriormente planteados, más específicamente aquellos ligados a la interpretación de la propiedad, siendo conscientes que, ante la pregunta acerca de cómo validaría la propiedad obtenida, hay que ayudar a desanudar todos aquellos conflictos asociados a la complejidad onto-semiótica del método de inducción.
En este sentido, se puede observar que la <u>tarea </u>reformulada no consiste sólo en “demostrar una propiedad ya establecida”, sino que requiere “construir” una propiedad, para luego demostrarla. O sea, nos aseguramos que para el estudiante esa proposición estará cargada de significado personal y contextual.
A los <u>procedimientos</u> descriptos anteriormente, le van a anteceder los siguientes:

- Los cálculos efectivos de las sumas de los dos (tres, cuatro y cinco) primeros n naturales pares.
- La búsqueda de una forma de expresar la suma de los n primeros naturales pares (2+4+6+…+2.n o por medio de una sumatoria)
- La búsqueda de una regularidad en la relación entre la suma de los primeros n pares y su resultado: que en cada caso el resultado obtenido es el producto entre el número de pares que estamos sumando y su sucesor.
- La búsqueda de una forma de expresar de manera general dicha relación: 2+4+6+…+2.n = n .(n+1)

Observemos que en esta tarea la <u>propiedad</u> a demostrar es una propiedad emergente de un sistema de prácticas personales, no previa como en la formulación original de la tarea.

En cuanto al lenguaje utilizado, a diferencia de la tarea original, la tarea reformulada permite que el alumno comience utilizando un lenguaje aritmético para realizar las sumas, para luego pasar a un lenguaje algebraico al tener que expresar la suma de los n primeros números pares.
Las argumentaciones dejan de ser puramente deductivas, ahora es necesario apelar a un tipo de argumentación no deductiva, ligada al razonamiento plausible o conjetural, más específicamente la "inducción empírica" basada en la observación de casos particulares, la búsqueda de regularidades y la consiguiente generalización (Markiewicz y Etchegaray, 2006; Polya, 1954).
Se promueven así nuevos procesos conscientes de particularización-generalización, dado que el análisis de los casos particulares permite enunciar la propiedad general y esto puede ayudar a superar conflictos que podrían originarse al tener que plantear una nueva particularización, como la que exige el caso base de la demostración o el último ítem de la tarea reformulada.
Además, al pedirse explícitamente que busquen una manera de expresar la suma de los primeros n pares y una expresión general que relacione la suma de los primeros n números pares y su resultado, se promueve que los alumnos pongan en juego procesos de materialización-idealización y que puedan interpretar (dar significado) a la propiedad que ellos mismos conjeturaron y que luego van a demostrar (proceso de representación-significación).
Esto, a su vez, va a permitir superar algunos de los conflictos planteados en torno a la demostración misma, más precisamente el incorrecto planteo del caso base y de la etapa inductiva, y en particular de la hipótesis inductiva. Además, el último ítem de la tarea reformulada (calcular la suma de los 25 primeros números pares) promueve que el alumno tenga que realizar un proceso de síntesis de una respuesta unitaria que es la propiedad que se ha formulado (proceso de descomposición-reificación).

Segundo ejemplo: un análisis a posteriori

Episodio de clase

A continuación vamos a relatar sucintamente el episodio de clase que queremos analizar en este trabajo.
Se trata de un momento de la clase donde el docente se propone introducir la definición de máximo común divisor entre dos números enteros.
El profesor comienza preguntando qué es el máximo común divisor o (aclara) divisor común mayor para ellos, en un intento de retomar lo que los estudiantes tienen disponible del secundario.
P: *Ustedes ya han visto en el secundario lo qué es el máximo común divisor…*
(Silencio… Murmullos…)
P: *quizás lo recuerden como el divisor común mayor…?*
Muchos alumnos: *Ah, si si …*
P: *Bueno…¿qué es el divisor común mayor entre dos números enteros a y b?*
A_1: *Era el más grande de los divisores que los dos números tienen en común*
P: *Bien!. Se acuerdan de eso? Es el mayor de los divisores comunes… ¿Y cómo harían para determinar el divisor común mayor entre dos números, por ejemplo entre 48 y 36?"*
A_2: *Agarramos los dos números, los factorizamos y nos quedamos con el producto de los factores comunes creo… o todos? No me acuerdo si con el menor exponente o con el mayor...*
A_3: *Los factores comunes con el menor exponente!*
P: *Muy bien, bueno…* (y dirigiéndose el A_3): *¿querés pasar a mostrarnos como calculás el divisor común mayor entre 48 y 36?*

El alumno A_3 pasa al pizarrón y escribe:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$2^2.3 = 12$$

P: *Muy bien. O sea que el divisor común mayor es 12. Lo que veremos a continuación es que el divisor común mayor o máximo común divisor se puede definir en términos de la relación de divisibilidad…*
Escribe en el pizarrón y dice:
"El máximo común divisor entre dos enteros a y b no simultáneamente nulos, denotado mcd(a,b) es el natural "d" que cumple:
1) $d|a \wedge d|b$ *y 2)* $\forall d' \in IN: d'|a \wedge d'|b \rightarrow d'|\, d$
La primera condición pide que d sea divisor común de ambos números y la condición 2) exige que cualquier otro divisor común a ambos números debe ser también divisor de d.
Vamos a ver una propiedad que va a dar origen a un algoritmo que nos permitirá calcular el máximo común divisor entre dos números de manera bastante eficiente…
Y escribe:
"Si a y b son dos númerosenteros (b≠0) y q y r son respectivamente el cociente y el resto de la división entera entre a y b, entonces mcd (a,b) = mcd (b,r)"
Y a continuación explica la demostración deductiva de esta propiedad.

Un primer nivel de análisis considerando los OBJETOS puestos a funcionar muestra que, en este episodio de clase, el juego de lenguaje utilizado ha representado tres definiciones de máximo común divisor, a saber:

- Def 1: el divisor común mayor es el más grande de los divisores comunes entre a y b.
- Def 2: el divisor común mayor es el producto de los divisores primos comunes de a y b con su menor exponente.
- Def. 3: el mcd (a,b) es el último elemento del conjunto de los divisores comunes en términos de la relación de divisibilidad. O sea: el natural d que verifica
  1) $d|a \wedge d|b$ y 2) $\forall d' \in IN: d'|a \wedge d'|b \rightarrow d'|\, d$

También se ponen en juego la definición de factor, número primo, divisibilidad y cociente y resto de la división entera

Entre los procedimientos que se ponen en funcionamiento podemos mencionar:

- El procedimiento que los alumnos proponen para calcular el mcd(48,36) (factorizar ambos números y considerar el producto de los divisores primos comunes con el menor exponente)
- Los procedimientos relacionados a la demostración deductiva de la propiedad enunciada por el profesor:
    - Suponer que mcd(a,b) = d con lo cual se cumple que 1) $d \mid a \wedge d \mid b$ y
  - 2) $\forall d' \in IN: d'|a \wedge d'|b \rightarrow d'|\, d$.
  - - Plantear lo que habría que demostrar, o sea que mcd (b,r) = d, es decir que se cumple 1´) $d \mid b \wedge d \mid r$ y 2´) $\forall d' \in IN: d'|b \wedge d'|r \rightarrow d'|\, d$
    - Que $d \mid b$ es cierto por 1).

- Por otro lado como por 1) sabemos que d | a ∧ d | b entonces d | a.1 – b.q (por propiedad de divisibilidad), con lo cual d | r (por ser a=b.q+r y por lo tanto
- r = a - b.q)
- Para probar 2´) suponer que tenemos un d´ arbitrario tal que d`| b ∧ d` | r

Entonces d´|b.q+r (por propiedad de divisibilidad) con lo cual d´|a.
Así, como d´|a ∧ d`| b entonces d´| d por 2).

En este episodio de clase aparecen varias propiedades entre las que podemos destacar:

- la propiedad enunciada por el profesor:
  "Si a y b son dos números enteros y q y r son respectivamente el cociente y el resto de la división entera entre a y b, entonces mcd (a,b) = mcd (b,r)"
- Y otras propiedades que deberían estar disponibles y que se utilizan en la demostración misma de la anterior como por ejemplo:
  $\forall a,b,c \in Z$: si $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b.x + c.y \forall x, y \in Z$.

Claramente el tipo de argumentación utilizada es deductiva y el lenguaje utilizado por los alumnos para definir el divisor común mayor es coloquial, para calcular el mcd entre 48 y 36 es aritmético y el lenguaje utilizado por el profesor tanto en la definición del mcd como en la expresión y la demostración de la propiedad es algebraico.

En un segundo nivel de análisis y enfocando la mirada en los PROCESOS, mencionamos:

- **de materialización-idealización**:
  - El ostensivo mcd(a,b) se utiliza para representar tanto al único número natural que es el mayor de los divisores comunes entre "a" y "b" como al máximo del conjunto de todos los divisores comunes en términos de la relación de divisibilidad.
  - El ostensivo a|b se utiliza para representar la relación de divisibilidad entre a y b (en el sentido de que $\exists k \in Z: b = a.k$)
- **de particularización-generalización**:
  - para probar que la propiedad dada vale para un a y b naturales cualesquiera se debe particularizar considerando un a y b arbitrarios pero fijos, y luego generalizar.
  - Lo mismo ocurre cuando se debe probar que: $\forall d' \in IN: d'$| b ∧ d´|r → d´|d, donde, para probar la generalización, se tiene que considerar un d´ particular arbitrario.
- **de descomposición-reificación**: si bien se ponen en juego aquí tres definiciones de mcd, sería deseable que el alumno pueda "reificar" las mismas, viendo al mcd como un único objeto que satisface las condiciones de las tres definiciones. Así mismo, si bien la demostración de la propiedad enunciada por el profesor exige ir demostrando "por partes" diferentes afirmaciones, se pretendería que, al finalizar la demostración, la propiedad se vea como un objeto unitario que tenga en sí mismo un significado para el alumno.
- **de representación-significación**: para poder llevar a cabo la demostración de la propiedad, es necesario atribuir significado a la expresión: a | b y mcd(a,b), y en particular, a la expresión: $\forall d' \in IN: d'$| a ∧ d´|b → d´| d

Los procesos antes mencionados son fuente de CONFLICTOS semióticos, entre los que podemos mencionar:

- Disparidades en la atribución de significado a la expresión mcd(a,b) y, en particular, en la relación (o falta de relación) entrelas distintas definiciones de divisor común mayor y de máximo común divisor, en términos de sus diferencias y de la equivalencia entre las mismas.
- Dificultades para atribuir significado (interpretar) la expresión algebraica:

$\forall d' \in IN: d' | a \wedge d' | b \rightarrow d' | d$, en el sentido de que "todos los divisores comunes a a y a b deben ser divisores del que proponemos como mcd (a,b)". Esto tiene mucho que ver con la complejidad lógica de la expresión.

- Dificultades al momento de poner a funcionar la "nueva" definición algebraica de mcd en la demostración de la propiedad, más específicamente para demostrar que un determinado "d" es el mcd(a,b). En instancias de evaluación esta dificultad se pone de manifiesto en el hecho de que muchos alumnos consideran suficiente probar que "d" es un divisor común a ambos pero no plantean (o en algunos casos plantean mal) o no pueden demostrar la segunda condición: esto es, que cualquier otro divisor común a ambos, debe dividir al máximo.
- Conflictos al tener que demostrar que: $\forall d' \in IN: d' | b \wedge d' | r \rightarrow d' | d$ en este sentido: al tomar un d´arbitrario que verifique $d' | b \wedge d' | r$ y ver la necesidad de probar que este d´ verifica las hipótesis de la condición 2) ($\forall d' \in IN: d' | a \wedge d' | b \rightarrow d' | d$), es decir, que es un d´ que divide tanto a "a" como a "b" y que, como "todos" los d´ que cumplen esa hipótesis deben dividir a d, nuestro d´ también debe hacerlo.

Observemos que, en este caso, además de hacer referencia a conflictos de tipo representacional y argumentativos, estamos poniendo en evidencia conflictos de tipo conceptual (disparidad y falta de relación en el significado atribuido a un mismo concepto, el máximo común divisor).
Creemos que el análisis realizado nos puede ayudar a explicar las dificultades que acarrea en el alumno una presentación como la que (muy frecuentemente) se propone en la clase para trabajar con el mcd. Nos está alertando de que hay diversos tipos de conflictos que podemos generar en nuestros estudiantes si no hacemos un esfuerzo por generar otros sistemas de prácticas en donde se trabaje de modo más intensivo la relación entre las diferentes definiciones de mcd, en particular en la comprensión de la equivalencia entre estas definiciones, donde se aborde de manera explícita, no sólo el por qué de "resignificar" la noción de mcd, sino también la complejidad lógica y onto-semiótica de dicha definición. Sistemas de prácticas donde la propiedad no sea necesariamente enunciada por el profesor sino que emerja como respuesta a una pregunta acerca de la relación entre el mcd entre dos enteros a y b y el mcd entre el divisor b y el resto de la división entera entre a y b, y sea consecuencia de otro tipo de razonamiento por parte del alumno. Sistemas de prácticas donde se haga hincapié en la necesidad de una demostración deductiva y en la complejidad lógica de la misma.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos querido mostrar la importancia de realizar una reflexión permanente sobre nuestra propia práctica docente y en particular, cómo algunas herramientas que brinda la didáctica de la matemática, más precisamente en este caso, el Enfoque Onto-semiótico, nos permiten tomar conciencia de la complejidad onto-semiótica de tareas o cuestiones que habitualmente presentamos a nuestros alumnos y que muchas veces no reconocemos, reduciendo nuestras explicaciones de las dificultades a la falta de conocimiento o de estudio por parte de nuestros estudiantes. Creemos que es necesario, como parte de nuestra tarea docente, "ocuparse" de estos conflictos y promover acciones tendientes a ayudar a superar los mismos, construyendo otras vías y condiciones de acceso al conocimiento a fin de generar procesos de estudio de mayor idoneidad epistémica y cognitiva.
Así mismo, dado el papel central que en el EOS sostiene la herramienta conceptual y metodológica : práctica matemática (en su versión institucional, esto es, relativa a juegos de lenguaje y formas de vida) y las características que se le atribuye a dicha noción (acción

compartida, situada, intencional, mediada por recursos lingüísticos y materiales) consideramos que este tipo de análisis en sus dos primeros niveles visibilizan la potencialidad de estas herramientas onto-semióticas para generar nuevas explicaciones a la importante pregunta didáctico-matemática: ¿cuál o cómo se caracteriza el "costo cognitivo" para la aprehensión de un determinado "objeto"?

REFERENCIAS

- Brousseau, G. 2007 *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas.* (Libros del Zorzal. Buenos Aires)
- Godino, J.D. 2002 Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22, nº 2.3, pp.237-284. Recuperado de: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm
- Godino, J.D., Batanero, C. Y Font, V 2009 Un Enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática de Universidad de Granada. Versión ampliada y revisada del artículo, Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135. Recuperado de:http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. 2006. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26 (1), 39-88.
- Godino,J.D., Font ,V. Y Wihelmi,M. 2008 Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. Versión revisada de la Conferencia invitada en el IV Congresso Internacional de Ensino da Matematica. ULBRA, Brasil, 25-27 Octubre 2007. Recuperado de: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm
- Markiewicz, M.E. y Etchegaray, S. 2006. Algunos resultados de una investigación acerca del razonamiento plausible o conjetural. En M.E. Ascheri y R.A. Pizarro (Eds.), *I Reunión Pampeana de Educación Matemática. Memorias.*(pp. 31-42). Santa Rosa de La Pampa. EdUNLPa. Recuperado de:http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem06/memorias/comunicaciones/Trabinvest/CTI2.
- POLYA, G. 1954 *Mathematics and Plausible Reasoning*. (Princeton University Press, New Jersey).