CB02

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE UNA PROPUESTA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LUGARES GEOMÉTRICOS CON GEOGEBRA

Cintia Ailén, Hurani & María Susana Dal Maso

Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral, Argentina
Paraje El Pozo S/N, Ciudad Universitaria, Santa Fe
huraniailen@gmail.com, mariasusanadalmaso@gmail.com

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación: Propuestas didácticas, Educación Superior, Educación Matemática en la formación de Profesores.

Palabras clave: lugar geométrico, GeoGebra, construcción, actividad demostrativa

RESUMEN

Se presenta el análisis previo de una propuesta de problemas de lugares geométricos a implementar con alumnos de la cátedra Taller de Geometría del Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Lo que nos proponemos es presentar tres problemas de lugar geométrico ordenados, según nuestro análisis, en grado de dificultad creciente con el propósito de reconocer dificultades y errores que manifiestan los estudiantes en su resolución a fin de mejorar las propuestas de enseñanza. Si bien comentaremos algunas cuestiones generales del problema 1 y 3, en este trabajo pondremos la mirada en el problema 2 dado que la tarea de construcción de la figura, dato del problema, es un problema en sí mismo. La construcción puede pensarse como un problema de lugar geométrico dentro del problema de lugar geométrico a resolver. El uso del software GeoGebra tiene un papel fundamental en el proceso de la actividad demostrativa de los estudiantes.

INTRODUCCIÓN

La motivación inicial para comenzar con esta investigación es la necesidad de reconocer las dificultades y errores que manifiestan los estudiantes del profesorado en matemática de la facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral en la resolución de problemas de lugares geométricos.

El Taller de Geometría es una materia síntesis ubicada en el segundo cuatrimestre del tercer año del Profesorado de Matemática. Los alumnos que están en condiciones de cursarla son aquellos que han aprobado Geometría Euclídea Plana en el segundo año de la carrera y han cursado Geometría Euclídea Espacial en el primer cuatrimestre del tercer año por lo que se considera que los estudiantes tienen competencias propias del pensamiento geométrico. Para aprobar este taller además de las condiciones exigidas por la cátedra, deberán aprobar Geometría Euclídea Espacial.

Durante el cursado del Taller de Geometría se tiene acceso a GeoGebra, software libre de geometría dinámica, que se utiliza en el desarrollo de la clase. Este recurso es potente para la obtención del lugar geométrico en la resolución de problemas, requiere no solo de conocimientos del software y conocimientos geométricos, sino también de saber combinar

dichos conocimientos y aplicarlos de manera conjunta para poder producir los resultados deseados.
A partir de lo expuesto se considera la idea de investigar y analizar el porqué surgen dificultades al trabajar con problemas de lugares geométricos, y de qué manera se pueden mejorar las propuestas de enseñanza a fin de superar errores que surgen desde la actividad demostrativa, la visualización y del uso del software.
Se piensa en recursos y estrategias que pueden favorecer las propuestas de enseñanza de modo que promuevan a los estudiantes a analizar y evaluar diferentes alternativas, y que les permitan crear sus propias estrategias de resolución de problemas de lugar geométrico, intentando generar en ellos una verdadera necesidad de validar sus conjeturas no solo como un requerimiento externo para convencer, sino también para convencerse.
Los objetivos planteados en el plan de investigación son: analizar argumentos que se utilizan en la clase para convencer y convencerse; identificar las dificultades y los errores de los estudiantes en la resolución de problemas de lugares geométricos; observar el rol del software en la obtención del lugar geométrico en la resolución de problemas; identificar y analizar argumentos matemáticos en procesos de validación; identificar interacciones, intervenciones, recursos y estrategias que favorecen u obstaculizan los procesos de formulación y validación de conjeturas; analizar demostraciones de lugares geométrico.
Atendiendo a los objetivos planteados y a una de las actividades a desarrollar durante la investigación que es la elaboración de tareas que permitan observar, analizar e identificar errores, dificultades y argumentos utilizados por los estudiantes al momento de formular y validar conjeturas; es que se considera valioso el análisis de una lista de problemas.
Durante la implementación de la propuesta se tomarán registros de los escritos de los alumnos realizados con lápiz y papel, de las comprobaciones empíricas y de las demostraciones durante el desarrollo de las actividades, como así también se grabarán las interacciones que se produzcan mediante audio. Las entrevistas individuales pueden ser un medio valioso para recabar información. “Una enseñanza de las matemáticas eficaz utiliza evidencia del pensamiento del estudiante para evaluar el progreso en la comprensión matemática y para adecuar continuamente la enseñanza en formas que apoyen y extiendan el aprendizaje”(NCTM, 2015, p.54)
También las actividades se desarrollarán con software de geometría dinámica solicitando a los alumnos que al realizarlas escriban un guión plasmando conjeturas, decisiones y los motivos por los cuales validan o descartan las conjeturas consideradas.

APORTES TEÓRICOS.

La formulación de conjeturas es una dificultad que puede observarse en alumnos de nivel superior resultando, en ocasiones, compleja la demostración de las mismas.
Con respecto a la formulación de conjeturas y a la validación de las mismas, Samper (2010) destaca que Hoyles y Küchemann (2002), en un estudio longitudinal que involucró a más de dos mil estudiantes de alto rendimiento de escuelas de secundaria en Inglaterra, encontraron que una proporción considerable de estudiantes creía que la condicional dada y su recíproca daban el mismo mensaje.
El concepto de lugar geométrico involucra a la doble implicación dado que todos los puntos que verifican una determinada propiedad describen un determinado lugar geométrico y que, todos los puntos de dicho lugar geométrico verifican esa propiedad.
Según Novembre, Nicodemo y Coll (2015) las computadoras ayudan a la comprensión ya que la tecnología aporta múltiples representaciones de objetos matemáticos brindando la posibilidad de relacionarlos dinámicamente influyendo en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, y en especial de la geometría, a partir de la posibilidad de visualizar.

También destacan que ofrecen la posibilidad de explorar, actividad necesaria para fomentar la actividad demostrativa.

> …en general, resulta difícil imaginar el lugar geométrico que describe un punto, una línea o cualquier otro objeto geométrico cuando se mueve dentro de una configuración. El uso de este tipo de software permite fácilmente trazar el camino que deja parte de la configuración (punto, segmento, triángulo, etc.) cuando se mueve con respecto a otros elementos dentro de esa misma configuración y como consecuencia ofrece la oportunidad al estudiante de analizar y describir tal lugar geométrico en término de propiedades. Además, los estudiantes pueden realizar variaciones precisas e instantáneas de sus propias representaciones visuales que se producen bajo el uso de este tipo de software. Esto les permite realizar constantes exploraciones y probar sus ideas matemáticas y conjeturas en una forma visual, eficiente y dinámica. (Santos Trigo, 2011).

La demostración se hace presente cuando las conjeturas o propiedades deben ser demostradas por ser, la demostración en sí misma, un objetivo a lograr con los estudiantes del Profesorado en Matemática; o cuando surge la necesidad de demostrar para superar contradicciones o incertidumbres. Así la demostración es utilizada no sólo para convencer sino también para convencerse.

Según Lara Quintero- Samper (2015), a la actividad demostrativa se la entiende como la realización de dos procesos no necesariamente independientes. En el primer proceso se establecen conjeturas a partir de las evidencias que provee la exploración de la situación con geométrica dinámica, hecho que favorece al convencimiento de su validez. En el segundo proceso se justifica, se valida la conjetura dentro de un sistema teórico.

Estas, entre otras, son las dificultades que generan un desafío en el docente universitario, con la tarea de diseñar ambientes de aprendizajes para el desarrollo de competencia demostrativa y utilizar un software de geometría dinámica que propicie el proceso de reflexión, “Lo relevante en esta visión es que el estudiante desarrolle recursos, estrategias y herramientas que le permitan recuperarse de dificultades iniciales y robustecer sus formas de pensar acerca de su propio aprendizaje y la resolución de problemas.” (Santos Trigo, 2008).

DESARROLLO

Una vez seleccionado el tema de trabajo y luego de determinar qué se desea analizar, se buscan y examinan problemas interesantes para trabajar en el taller que permitan recolectar la información deseada. Se muestra a continuación una primera lista de problemas probables de lugar geométrico (L.G.) para su utilización.

1) Determinar el L.G. de todos los puntos de un plano que están a una distancia dada a de una circunferencia de centro P y radio r, siendo $a < r$.
2) Determinar los puntos que equidistan de dos puntos dados A y B, y de los lados de un ángulo dado, perteneciendo todo a un mismo plano.
3) Determinar el L.G. del centro de todas las circunferencias que son tangentes a dos rectas l_1 y l_2 que se cortan.
4) Determinar el L.G. de los centros de todas las circunferencias tangentes a dos circunferencias concéntricas.
5) Determinar el L.G. de los centros de todas las circunferencias que pasan por dos puntos dados A y B.
6) Determinar el L.G. de los centros de todas las circunferencias que tienen una cuerda común.

7) Determinar el L.G. de los centros de todas las circunferencias de radio dado a que cortan ortogonalmente a una circunferencia dada de radio r.
8) Determinar el L.G. de los centros de todas las circunferencias que cortan a una circunferencia dada O, según una cuerda paralela a una dirección dada L.
9) Determinar el L.G. de los centros de todas las circunferencias tangentes a dos circunferencias concéntricas dadas de radios r_1 y r_2.
10) Determinar el L.G. de los puntos medios de todas las cuerdas que pasan por un punto P, situado fuera del círculo.
11) En un triángulo ABC antihorario, el lado BC es fijo y el ángulo BAC es constante de amplitud 60°. Al variar el vértice A:
    a) determinar el L.G. de los pies de la altura trazada desde B.
    b) determinar el L.G. del ortocentro del triángulo ABC.

Se analiza con un software libre de geometría dinámica (GeoGebra) cada uno de los once problemas, se hallan los lugares geométricos, reflexionando sobre el potencial de cada uno de ellos y se consideran procedimientos esperados que podrían surgir en la tarea desarrollada en clase por los estudiantes. Del análisis realizado se efectúa una nueva selección eligiendo el problema 3, el problema 9 y el problema 11.

La propuesta consta de tres problemas ordenados, según nuestro análisis, en grado de dificultad creciente, centrando la atención en la resolución de cada uno de ellos, en los conceptos implicados y en la posibilidad de utilizar el software para resolverlos. Se pretende con estas tareas fomentar también la actividad demostrativa.

Cada tarea se piensa para realizar en grupos de dos integrantes, dado que se considera que el trabajo en pareja es valioso para la formación del estudiante y además permite que realicen intercambios, que tomen conciencia sobre aspectos que no han sido considerados y descubran nuevos aspectos, cuestionen otros, etc. Estos intercambios exigen descentrar el pensamiento propio, entender la postura y razonamiento de otro (Quaranta y Wolman,2003)

Los problemas seleccionados para trabajar son:

1) Determinar el lugar geométrico del centro de todas las circunferencias que son tangentes a dos rectas l_1 y l_2 que se cortan.
2) En un triángulo ABC antihorario, el lado BC es fijo y el ángulo BAC es constante de amplitud 60°. Al variar el vértice A:
    a) determinar el lugar geométrico de los pies de la altura trazada desde B.
    b) determinar el lugar geométrico del ortocentro del triángulo ABC.
3) Determinar el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias tangentes a dos circunferencias concéntricas dadas.

Si bien comentaremos algunas cuestiones generales del problema 1 y 3, en este trabajo pondremos la mirada en el problema 2 dado que la tarea de construcción del triángulo ABC es un problema en sí mismo. La construcción puede pensarse como un problema de lugar geométrico dentro del problema de lugar geométrico a resolver.

Considerando que los alumnos ya tienen algunas competencias propias del pensamiento geométrico, la primera tarea se presenta con el fin de que recuerden ciertas propiedades, definiciones, relaciones geométricas y comandos básicos del software.

Se espera en primera instancia que los estudiantes, teniendo acceso a los libros de la cátedra, recuerden aquello que deben tener en cuenta a la hora de enunciar un lugar geométrico y demostrarlo, y en caso de requerirlo puedan revisar las propiedades y definiciones implicadas en cada actividad.

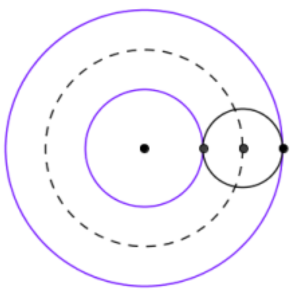
En la búsqueda de la solución del problema puede que surjan cuestionamientos sobre la perpendicularidad o no de las rectas secantes o sobre las condiciones que deben cumplir las circunferencias para ser tangentes a ambas rectas. Puede que se indague sobre la existencia de alguna herramienta del software que permita realizar de modo directo la construcción de las

circunferencias tangentes a ambas rectas. El software cuenta con una herramienta que permite realizar rectas tangentes a una circunferencia dada, sin embargo, la misma no da la opción de realizar circunferencias tangentes a dos rectas secantes dadas.
Un procedimiento esperado es que se utilicen los conceptos de circunferencia y bisectriz, en ambos casos definidos como lugar geométrico, y la propiedad de los radios de una circunferencia respecto a las rectas tangentes a dicha circunferencia para establecer una relación que permita reconocer el lugar geométrico en cuestión.
La tercera tarea propuesta, determinar el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias tangentes a dos circunferencias concéntricas dadas, es seleccionada por las implicancias teóricas que se ponen en juego como así también la necesidad de reflexionar sobre diferentes alternativas en relación a las posiciones entre las circunferencias en búsqueda de la solución del problema. No basta solo con la utilización del software para hallar el lugar geométrico, sino que se requiere del conocimiento de argumentos teóricos que iluminarán el proceso de exploración. La herramienta *lugar geométrico* del software Geogebra permite encontrar una curva determinada por un punto que depende de otro punto que se mueve en una figura construida, objeto o deslizador. Es decir, se necesita que un punto dependa del movimiento de otro para desplazarse. Si se utiliza rastro, al desplazarse el punto sobre el cual se activa rastro deja una traza que permite visualizar la solución del lugar buscado. También se puede hallar el lugar geométrico desde la barra de entrada de la ventana algebraica del software.
A continuación se relatan algunas consideraciones teóricas, que de ningún modo pretenden ser exhaustivas, que se espera, se tengan en cuenta a la hora de resolver el problema.

Caso 1:
Dadas dos circunferencias de radios r y s concéntricas, con $r > s$, y una circunferencia tangente a ambas de radio t (con $r>t$), sea d la distancia entre el centro de las circunferencias concéntricas y el centro de la circunferencia tangente, si la distancia d comparada con la suma y diferencia de los radios verifican:

- la condición $d=s+t$, las dos circunferencias de radio s y t son tangentes exteriores.
- la condición $d=r-t$ la circunferencia de radio t es tangente interior a la de mayor radio.

Se espera que los estudiantes puedan utilizar las propiedades de la distancia entre los centros, establecer relaciones y condiciones para realizar una representación del problema, hallar el lugar geométrico y validarlo.
Es probable que con la ayuda del software surja, en primera instancia, la construcción mientras que las conjeturas y análisis de las propiedades entre los centros llegue después de la construcción con ayuda del software; el cual permite revisar construcciones a partir del protocolo de construcción y verificarlas a través de la acción de arrastre, entre otras.
En la siguiente figura se muestra la representación del caso 1.

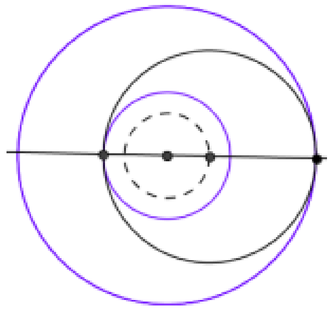


Caso1

Se pone en evidencia en la representación que, las circunferencias tangentes, deben ser tangente exterior a una de las circunferencias concéntricas dadas y tangente interior a la otra. El lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias de radio t, tangentes a dos circunferencias concéntricas C y C' de centro O y radios r y s respectivamente, es una circunferencia concéntrica a las anteriores de radio $\frac{r+s}{2}$.

Caso2:

El otro caso que se espera puedan reconocer los estudiantes, se puede representar con la siguiente construcción;



Caso2

un análisis minucioso de la construcción y de las condiciones pedidas conducirá a los estudiantes al hallazgo del siguiente lugar geométrico: El lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias de radio t, tangentes a dos circunferencias concéntricas C y C' de centro O y radios r y s respectivamente, es una circunferencia concéntrica con las anteriores de radio $\frac{r-s}{2}$. Quizás esta solución no sea de inmediata representación mental para el estudiante como sí se cree que lo será el caso 1, y de ahí la relevancia del uso del software para propiciar la exploración y visualización Se debe tener en cuenta, como en el caso anterior, que no basta solo con la realización de la construcción.

La segunda propuesta no es sólo un problema de lugar geométrico sino también un problema de construcción.

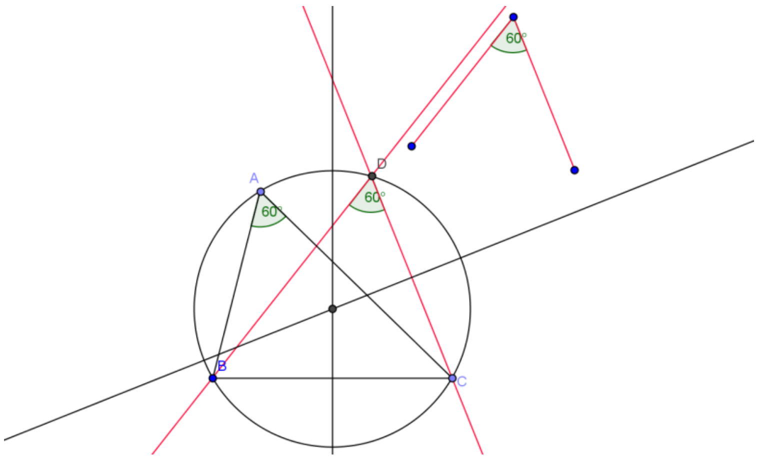
Recordemos el problema:

> En un triángulo ABC antihorario, el lado BC es fijo y el ángulo BAC es constante de amplitud 60°. Al variar el vértice A:
>
> a) determinar el lugar geométrico de los pies de la altura trazada desde B.
> b) determinar el lugar geométrico del ortocentro del triángulo ABC.

Es indispensable, para visualizar el lugar geométrico, construir la figura geométrica que debe cumplir con ciertas condiciones iniciales que figuran en los datos del problema. En principio se puede trazar un dibujo de análisis, que en este caso, es un triángulo en sentido antihorario ABC, de lado fijo BC y ángulo A, opuesto al lado BC, de 60 grados. Pero, ¿cuántos triángulos se pueden construir con lado fijo BC y ángulo opuesto A de 60 grados? Realizar con éxito la construcción, conlleva a plantearse la discusión sobre la cantidad de soluciones del problema de construcción. Y sin lugar a dudas un sistema de geometría dinámica es el escenario adecuado para buscar estas soluciones.

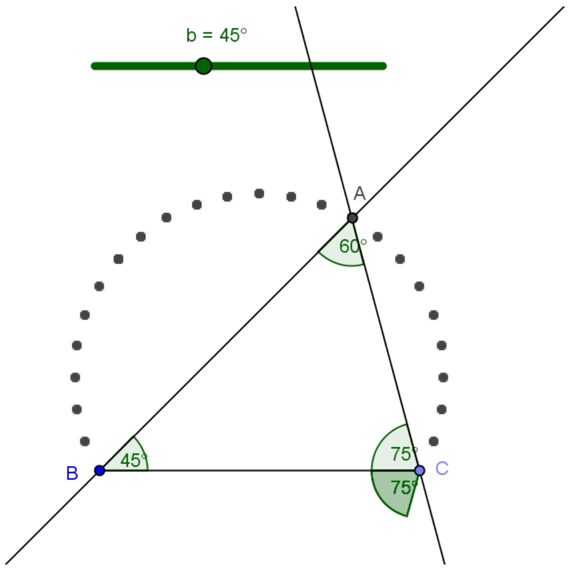
Se presentan a continuación algunos de los procedimientos de construcción que se espera surjan al momento de obtener el triángulo de condiciones pedidas.

Caso 1: Sea α un ángulo de 60 grados, se traza un segmento fijo BC y se trazan las paralelas a los lados de dicho ángulo por B y C respectivamente, obteniendo un ángulo de vértice D y amplitud α. Tenemos entonces un triángulo DBC con lado BC fijo y el ángulo del vértice D de 60 grados. Se determina el circuncentro del triángulo, se construye la circunferencia circunscripta al triángulo y se traza el arco de circunferencia que describe el arco capaz. El triángulo DBC es fijo. Tomando un punto A distinto de D en el arco capaz, se construye el triángulo ABC. De este modo se puede variar el vértice A manteniendo constante el ángulo.



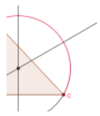
Caso 1

Caso 2: Se traza un segmento fijo BC, se selecciona un deslizador b que varíe en un intervalo de 0 a 120 grados y sobre uno de los extremos del segmento BC se construye un ángulo α cuya amplitud depende de la variación de b. Sobre el otro extremo de BC se construye un ángulo β de amplitud 120-α. Se trazan las rectas que contienen los lados de los ángulos a excepción de BC y se denomina A al punto intersección de dichas rectas. Se obtiene así un triángulo ABC con lado BC fijo y un ángulo A de 60 grados dado que α+ β suman 120°. Si se utiliza la animación autonómica del deslizador, se puede visualizar al punto A describiendo el lugar geométrico de los vértices de los ángulos de amplitud 60 grados que abarcan el segmento fijo BC.



Caso 2

Caso 3: Se traza un segmento fijo BC, sobre uno de los extremos se construye un ángulo de 60 grados de manera tal que BC este contenido en uno de los lados del ángulo. Se traza la mediatriz del segmento BC y la recta perpendicular al lado del ángulo que no contiene a BC por el vértice del mismo. Se determina la intersección de ambas rectas (O), se traza una circunferencia de centro O y radio OB. Obtenemos un arco capaz de segmento BC y ángulo α de 60 grados, se determina un punto (A) sobre el arco y se obtiene con B y C un triángulo ABC de lado BC fijo y ángulo α de amplitud constante.

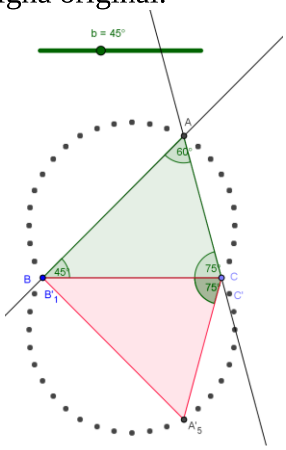


Caso 3

Con estos procedimientos esperados, o con otros que puedan surgir durante la implementación de la propuesta, se construye el triángulo según condiciones iniciales. Todas las construcciones aquí mencionadas utilizan, explícita o implícitamente, el concepto de arco capaz, lugar geométrico de los vértices de todos los ángulos congruentes entre sí cuyos lados pasan por dos puntos fijos B y C.
La tarea se presenta a la mitad de las parejas en su formato original y a las demás con una variante:
En un triángulo ABC, el lado BC es fijo y el ángulo BAC es constante de amplitud 60°. Al variar el vértice A:

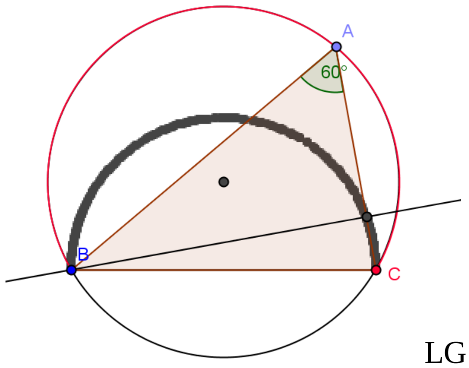
a) determinar el lugar geométrico de los pies de la altura trazada desde B.
b) determinar el lugar geométrico del ortocentro del triángulo ABC.

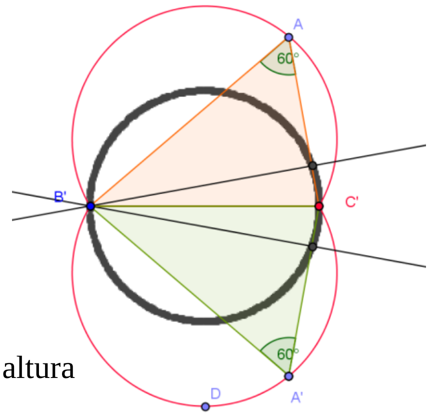
Esta idea surge ya que, al analizarlo como posible problema a trabajar con los estudiantes, las autoras se cuestionan acerca de la condición impuesta sobre la construcción antihoraria del triángulo ABC y sobre las consideraciones a tener en cuenta si dicha condición no es usada. Claramente se trata del triángulo ABC de lado fijo BC y su simétrico de eje de simetría la recta que contiene al lado BC donde el sentido antihorario no se verifica, modificando el resultado de la consigna original.



Triángulo ABC antihorario y su simétrico

Una vez construida la figura de análisis corresponde determinar el lugar geométrico que describen los pies de la altura trazada desde B, al variar el vértice A. Otra vez un SGD es una herramienta importante para visualizar propiedades invariantes, para producir conjeturas y demostrar propiedades geométricas que no están previamente establecidas.

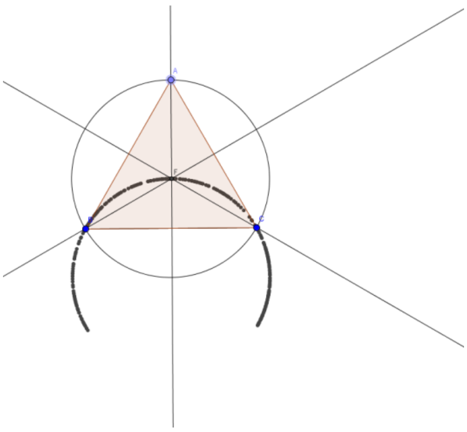


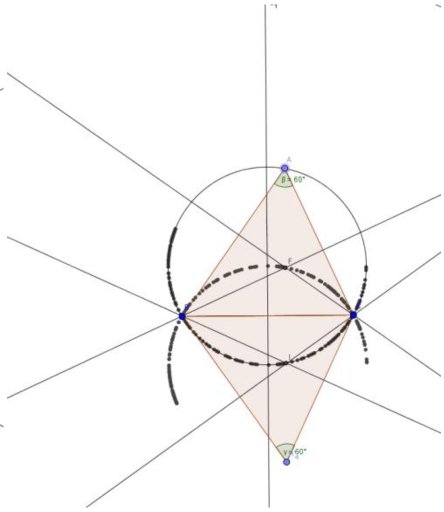


LG pies de la altura

Al activar rastro queda determinado un arco de circunferencia en el primer caso, y una circunferencia en el segundo, exceptuando los puntos B y C. En esta instancia se espera que el estudiante se cuestione sobre el lugar geométrico obtenido y sienta la necesidad de justificar su respuesta. La construcción del triángulo a partir del lugar geométrico arco capaz puede propiciar la actividad demostrativa para generar certeza sobre el lugar geométrico de Thales.

La huella que deja una figura geométrica cuando se arrastra y la animación de figuras son posibilidades que brinda el GeoGebra facilitando la representación gráfica, fundamental en el momento de hallar el lugar geométrico que describe el ortocentro del triángulo ABC al variar el vértice A. La visualización del rastro que deja el ortocentro permite el planteo de conjeturas en función de la construcción realizada.





LG ortocentro

Conjeturas como: el circuncentro de todos los triángulos ABC construidos en el mismo sentido es fijo; el circuncentro de los triángulos ABC construidos en el mismo sentido pertenece al lugar geométrico que describe el ortocentro al variar el vértice A; los puntos del arco capaz que describe el ortocentro (arco en el mismo semiplano que el punto A respecto de la recta BC) son vértices de todos los ángulos de amplitud el doble del ángulo ABC cuyos lados pasan por los puntos fijos B y C; el lugar geométrico que describe el ortocentro del triángulo ABC al variar el vértice A sobre un arco de la circunferencia circunscripta *Ç* que pasa por B y C, es otro arco de circunferencia que pasa por B y C y cuyo centro es el punto medio del arco BC de la circunferencia *Ç* que no contiene al punto A (observar que es un arco de la circunferencia circunscripta al triángulo ABC construido en el sentido contrario al considerado); son las que propician acciones que permiten convencerse y convencer de la verdad de la propiedad hallada.

A MODO DE CIERRE

Esperamos que para los estudiantes del Profesorado de Matemática el software de geometría dinámica resulte una herramienta valiosa para las representaciones dinámicas de los problemas, permitiendo identificar relaciones matemáticas, tal como plantea Santos Trigo (2011). Los problemas de lugares geométricos son un campo propicio para el planteo de conjeturas. "…Visualizar, reconocer y argumentar son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de herramientas." (Santos trigo, 2011).

A partir de los objetivos planteados que se mencionan en la introducción se buscan problemas, se hallan los lugares geométricos, se reflexiona sobre el potencial de cada uno de ellos y se consideran procedimientos esperados que podrán surgir en la tarea desarrollada en clase por los estudiantes, con la intención de delimitar la propuesta con el fin de graduar las dificultades intentando que su implementación nos brinde la mayor información posible.

Para aprender a demostrar es necesario que los estudiantes se involucren en la actividad demostrativa, y los problemas de lugares geométricos son un campo favorable para lograrlo. "…el uso de un software de geometría dinámica…es un medio para viabilizar la participación de los estudiantes; este recurso proporciona un entorno en el que acciones como la exploración empírica, la comunicación, y la validación de los enunciados se pueden propiciar."(Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011, p.76).

Nos propusimos en esta comunicación dar cuenta de una etapa importante en toda investigación que es el análisis previo de las tareas a desarrollar con los estudiantes, y demarcar las razones por las cuales fueron elegidas para tal fin.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- LARA QUINTERO, L. F y SAMPER, C. (2015). Logros y desaciertos cuando se aprende a demostrar. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.2, 113-132.
- MOLINA, O., SAMPER, C., PERRY, P. Y CAMARGO, L. (2011). *Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema.* Revista Integración. Vol 29 N°1 73-96. Escuela de Matemáticas Universidad Industrial de Santander. Bogotá
- NCTM (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos.* Reston. VA: NCTM.
- NOVEMBRE, A., NICODEMO, M. Y COLL, P. (2015). *Matemática y TIC: orientaciones para la enseñanza.* Ciudad autónoma de Bs As: ANSES.
- PERRY CARRASCO, P., CAMARGO URIBE, L., SAMPER de CAICEDO, C. Y ROJAS MORALES, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemática.* Bogotá: Nomos.
- QUARANTA, M. & WOLMAN, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática: qué, para qué y cómo se discute. En M, Panizza, (comp), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas.* 189-243. Paidós. Buenos Aires.

- SAMPER, C., PERRY, P., CAMARGO, L., MOLINA, O. Y ECHEVERRY, A. (2010). *Geometría dinámica: Su contribución a la comprensión de condicionales de la forma si-entonces.* Educación Matemática. 22. 3, 119-142. Santillana. México.
- SANTOS TRIGO, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *Educación Matemática XII.* España.
- SANTOS TRIGO, L. M. (2011). La educación matemática, resolución de problemas, yel empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Año 6, 8,* 35-54. Costa Rica
- VILLAR, D. (2006). Geometría 2°. Lugares geométricos-Repartido Práctico. Fecha de consulta: 26-03-2016. URL: http://www.x.edu.uy/LGpractico2006.pdf
- Lugares Geométricos. Fecha de consulta: 26-03-2016 http://www.sectormatematica.cl/media/diferenciado/NM3_lugares_geometricos.doc