

T03

ENTRE NÚMEROS, CÁLCULOS Y LETRAS: LECTURA Y TRANSFORMACIÓN DE EXPRESIONES NUMÉRICAS Y ALGEBRAICAS

Valeria Borsani, María Nieves Brunand, Carla Cabalcabué & Esteban Romañuk

Universidad Pedagógica de la Provincia de Buenos Aires (UNIPE)
valeria.borsani@unipe.edu.ar

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación: Categoría 3 - Propuestas Didácticas, Nivel: Educación Secundaria, Temas propuestos: Didáctica de la Matemática // Resolución de problemas

Palabras claves:

Articulación aritmética, álgebra; divisibilidad, lectura de información, transformación de escrituras de cálculos y expresiones

RESUMEN

¿Qué tipo de trabajo algebraico se puede proponer en los primeros años de la Escuela Secundaria? ¿De qué manera los nuevos conocimientos algebraicos se pueden apoyar en conocimientos aritméticos propios de la Escuela Primaria?

En este taller se trabajará en torno a una propuesta de enseñanza que articula conocimientos aritméticos y algebraicos vía un trabajo de divisibilidad. En dicha propuesta, que surge a partir de la elaboración de un documento de la colección ENTRAMA del Ministerio de Educación de la Nación, se asume que los conocimientos aritméticos son insumos para los primeros aprendizajes algebraicos de los estudiantes de escuela secundaria, tanto en lo referido a las nociones matemáticas, como también al tipo de práctica desarrollada. En este sentido se trata de involucrar a los estudiantes en un trabajo de lectura de información a partir de la escritura de un cálculo o de una expresión algebraica; para ello será necesario apoyarse en propiedades de los números y de las operaciones. En el taller se propone reflexionar sobre un tipo de práctica algebraica en el que un trabajo de lectura y transformación de expresiones serán la base para que los estudiantes transiten sus primeros aprendizajes algebraicos.

DESARROLLO DEL TALLER

La propuesta de enseñanza que se analizará en este taller surge en el marco de la producción de un documento de la colección ENTRAMA¹ que el Ministerio de Educación de la Nación lanzó con propuestas de enseñanza de los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP) para cada una de las áreas/disciplinas y está destinada a todos los docentes de la educación secundaria argentina.

A partir del análisis de una serie de actividades que se propondrán a los docentes participantes del taller, se pretende:

¹ <https://entrama.educacion.gov.ar/>

- discutir diferentes estrategias que podrían poner en juego estudiantes de la escuela secundaria, al trabajar con las actividades de la propuesta de enseñanza.
- distinguir conocimientos y relaciones matemáticas movilizadas en cada una de las resoluciones que aparezcan.
- analizar producciones escritas de estudiantes de 1° y 2° año de escuelas de la provincia de Bs As,
- reflexionar sobre posibles intervenciones docentes con el objetivo de favorecer el avance de las producciones de los estudiantes.

LEER Y TRANSFORMAR PARA LEER

El trabajo con las primeras actividades propone una entrada a un nuevo tipo de práctica - algebraica- que conlleva aprender a resignar la búsqueda de un resultado (a partir de un trabajo aritmético) para extraer relaciones pertinentes a partir de la lectura de una expresión o de la transformación de una expresión en otra equivalente. En particular tienen como objetivo que en el aula de la escuela secundaria (ES) comiencen a circular diferentes nociones de múltiplos y diferentes formas de estudiar si el resultado de un cálculo es múltiplo de un número, pero sin obtener el resultado del cálculo.

Primera actividad para los docentes participantes del taller: resolver las dos primeras actividades del documento analizando:

- posibles resoluciones de los estudiantes (incluyendo producciones parciales, incompletas, imprecisas).
- conocimientos que se movilizan en cada una de las estrategias posibles

Actividad 1:

a. En cada caso, completen con un número para que el resultado de la suma dé un múltiplo de 5:

$$165.127 + \dots\dots \qquad 324.431 + \dots\dots\dots$$

b. En cada caso, escriban un número para que el resultado de la suma de un múltiplo de 8:

$$320 + \dots\dots \qquad 325 + \dots\dots \qquad 658 + \dots\dots \qquad 2448 + \dots\dots\dots$$

Actividad 2:

Primera Parte: Decidan, sin hacer las cuentas propuestas, cuáles de los siguientes cálculos dan el mismo resultado que 36×21 . Expliquen sus respuestas.

$$36 \times 3 \times 7 \qquad 30 \times 6 \times 3 \times 7 \qquad 2 \times 2 \times 9 \times 21 \qquad 18 \times 42$$

Segunda Parte: Decidan, sin hacer los cálculos propuestos, si los siguientes pares de cuentas dan el mismo resultado. Justifiquen sus respuestas.

$$\begin{array}{ll} a. 21 \times 15 & 7 \times 3 \times 5 \\ b. 18 \times 15 & 9 \times 5 \times 2 \times 3 \\ c. 33 \times 24 & 11 \times 12 \times 6 \end{array}$$

En la actividad 1, se espera que se movilice o fortalezca un conocimiento que será necesario para abordar actividades posteriores: “Para estudiar si un número es múltiplo de otro, nos podemos apoyar en un múltiplo conocido y cercano al número sobre el que decidir”.

En las actividades siguientes se inauguran dos tipos de trabajo con las escrituras de los cálculos que serán objeto de estudio en toda esta secuencia: por un lado leer información a partir de las diferentes escrituras de un cálculo, y por otro lado, transformarlas para obtener nueva información. Los argumentos sobre la equivalencia de dos expresiones, o la multiplicidad de un cálculo respecto de un número, pueden darse mediante un trabajo de transformación basado en la descomposición multiplicativa de los factores que intervienen en los cálculos. En estos casos, se requiere que las descomposiciones se realicen de manera controlada, con la intención de encontrar factores que permitan tomar decisiones sobre la multiplicidad o sobre la equivalencia.

Segunda actividad para los participantes del taller:

Analizar las producciones de la actividad que realizaron estudiantes de un primer año de una escuela pública de La Plata, en relación con:

- Los conocimientos/relaciones matemáticas que se despliegan en cada una de estas producciones
- Las discusiones que se podrían sostener en el aula a partir de estas producciones

Se entregará a los participantes fotocopias con diferentes producciones de estudiantes a partir de abordar la actividad 2 de la propuesta.

Esta actividad de análisis de registros tiene la intención de, por un lado, reconocer los conocimientos y argumentos presentes en las producciones, y por otro, poner en diálogo las distintas producciones para hacer avanzar los conocimientos puestos en juego en cada una de las resoluciones.

Tercera actividad para los docentes del taller: resolver las actividades 3 y 4 de la propuesta analizando:

- posibles resoluciones de los estudiantes (incluyendo producciones parciales, incompletas, imprecisas).
- conocimientos que se movilizan en cada una de las estrategias posibles

Actividad 3:

Decidan, sin hacer las multiplicaciones, si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

Expliquen sus decisiones:

a. 48×15 es múltiplo de 15

d. 48×15 es múltiplo de 30

b. 48×15 es múltiplo de 6

e. 48×15 es múltiplo de 20

c. 48×15 es múltiplo de 7

f. 48×15 es múltiplo de 50

Actividad 4:

Sin hallar los resultados de los siguientes cálculos, decidan si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Expliquen sus decisiones.

a. $2 \times 15673 + 4$ da como resultado un número par

b. $3 \times 15673 + 6$ da como resultado un número par

c. $374 \times 15 + 21$ es múltiplo de 5

d. $374 \times 15 + 21$ es múltiplo de 3

e. $7 \times 344 + 7 \times 6$ es múltiplo de 7

f. $11 \times 97 + 11 \times 3$ es múltiplo de 100

A partir de estas actividades se propone reflexionar con los docentes que, por ejemplo, la cuarta actividad presenta una nueva complejidad para los estudiantes ya que en las expresiones aparecen involucradas dos operaciones: la suma y la multiplicación. Se trata ahora de analizar las relaciones matemáticas que permiten sustentar la lectura de la información que brindan expresiones y sus eventuales transformaciones.

LAS LETRAS COMO VARIABLES

La segunda parte del taller propone un trabajo de análisis y reflexión acerca de que los primeros encuentros de los estudiantes con el lenguaje algebraico sea a través de problemas que involucren letras y en los que se tenga que estudiar la validez de algunas afirmaciones sobre múltiplos y divisores.

En principio, las letras pueden ser reemplazadas por uno o varios números para realizar cálculos. Se intentará ir instalando, en los estudiantes, una práctica en la que estas letras no sean reemplazadas para realizar cuentas y lograr un resultado (como puede ser el caso de las fórmulas de áreas), sino más bien para poder leer y transformar las expresiones con el objetivo de tomar algunas decisiones respecto de la expresión en las que estas letras están involucradas.

Cuarta actividad para docentes del taller:

Resolver las tres actividades siguientes, analizando posibles resoluciones de los estudiantes así como también la intensidad didáctica de cada una de ellas.

Actividad 5:

Sin hacer las cuentas, estudien qué número se puede sumar en cada caso para que la afirmación sea verdadera. ¿Pueden encontrar más de un número? Expliquen sus respuestas.

El resultado de $5 \times 48.343 + 30 + \dots$ es múltiplo de 5.

El resultado de $3 \times 348.319 + 52 + \dots$ es un número par.

El resultado de $3 \times 8.327 + 12 + \dots$ es múltiplo de 3.

El resultado de $45 \times 748.317 + 2 + \dots$ es múltiplo de 5.

El resultado de $24 \times 713.317 + 11 + \dots$ es múltiplo de 3

Actividad 6:

a.- ¿Es cierto que si en $16x + 15 + a$ se reemplaza la letra a por el número 44, el resultado es múltiplo de 4?

b.- ¿Con qué otros números podrían reemplazar la letra a para que el resultado de $16x + 15 + a$ sea múltiplo de 4?

Actividad 7:

Primera Parte:

a.- ¿Es cierto que con la expresión $2m + 1$ se obtienen números impares para cualquier valor de la variable m ? Expliquen su respuesta.

b.- ¿Es cierto que con la expresión $2t + 4$ se obtienen múltiplos de 4 para cualquier valor de la variable t ? Expliquen su respuesta.

c.- ¿Es cierto que con la expresión $9n + 3$ se obtienen múltiplos de 3 para cualquier valor de la variable n ? Expliquen su respuesta.

Segunda parte:

Determinen si las expresiones dan como resultado números pares para cualquier valor de m , para ningún valor de m o para algunos valores de m .

- a. $4m+2$
- b. $(2m+1).6$
- c. $(m+1).5$
- d. $(2m+1).7+2$

En las actividades anteriores se introduce un trabajo con el uso de los cuantificadores (para todo valor, para algunos valores, para ningún valor de la variable) asociados al estudio de la validez de afirmaciones generales. Se espera que los estudiantes, apoyados en el tipo de trabajo desplegado en actividades anteriores, exploren asignando diferentes valores a las variables y que, a partir de allí, elaboren conjeturas que luego tendrán que validar

Quinta actividad para los docentes del taller:

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> - Resolver las actividades 8 y 9 - Analizar producciones de los estudiantes referidas a las actividades 8 y 9. |
|---|

A partir del análisis de estas dos actividades, se reflexionará con los participantes del taller, acerca de las diferencias entre leer información de una expresión dada y la producción de fórmulas que cumplan con ciertas condiciones.

Actividad 8:

Completen cada expresión para formar una afirmación verdadera:

2. $m + \text{-----}$ es par para cualquier valor de la variable.
5. $(m+2)+\text{-----}$ es múltiplo de 5 para cualquier valor de la variable

Actividad 9:

En cada caso, escriban una expresión con una variable para formar una afirmación verdadera.

- a. La expresión.....da un número impar para cualquier valor de la variable.
- b. La expresión..... da un múltiplo de 6 para cualquier valor de la variable.
- c. Ningún valor de la variable hace que la expresión de un múltiplo de 6.

Sexta actividad para los docentes del taller:
--

Resolver y analizar la actividad 10 teniendo en cuenta que se trata de la primera actividad en la que se proponen transformaciones de expresiones algebraicas para leer información de las nuevas expresiones obtenidas.
--

Las reflexiones que generen los participantes del taller, a partir de los análisis matemático didácticos de la actividad 10, serán la base para analizar el inicio de un tipo de actividad para los estudiantes de la ES: transformar una expresión algebraica en otra para poder leer, de la nueva expresión, la información que se necesita para decidir cuáles son los valores de la variable para los que se cumple la afirmación.

Se espera reflexionar sobre una idea de equivalencia de expresiones algebraicas apoyada en procesos de transformación: “dos expresiones son equivalentes si al transformar una obtengo la otra”.

Actividad 10:

En cada caso, estudien para qué valores de la variable n :

- a. $8n+2n$ termina en 0
- b. $3n+2n$ es múltiplo de 5
- c. $3n+2n+1$ da par
- d. $3n + 3 + n$ es múltiplo de 4

En un trabajo futuro, los estudiantes seguramente tendrán que aprender ecuaciones. Un trabajo algebraico como el desplegado en esta propuesta, ofrece buenas condiciones para analizar y discutir con los participantes del taller que una ecuación no es una igualdad con una incógnita, sino que la letra representa una variable y que la condición de igualdad puede cumplirse para algunos valores, para todos o para ningún valor de la variable.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense making in formal Mathematics. For the Learning of Mathematics. 14 (3); 24-35.

Cambriglia, V., Sadovsky, P, Sessa, C. (2010). Procesos colectivos de generalización, en III REPEM – Memorias. Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

<http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem10/memorias/comunicaciones/Trabajos%20Inves/CB%2049.pdf>

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En Bednardz, N. et al (ed), Approaches to algebra; pp. 65-86.

Sadovsky, P (2005). Enseñar matemáticas hoy. Miradas, sentidos y desafíos. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires. Editorial Libros del Zorzal.

Textos escolares y documentos curriculares de referencia:

Mrio. de Educación de la Nación Argentina. Núcleos de Aprendizajes Prioritarios para la Escuela Secundaria Superior (NAP).

http://repositoriorecursosdownload.educ.ar/repositorio/Download/file?file_id=1a820389-3f95-4bfb-9d54a4630322f7c1&rec_id=110570

Documento de Actualización Curricular. 7° grado. Publicado en Dirección General de Planeamiento Educativo de la Dirección de Currícula y Enseñanza. CABA.

<http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/integrado.pdf>

Sessa, C. et al. (2015), *Hacer matemática 7/1*, Buenos Aires, Argentina, Editorial Estrada

Sessa, C. et al. (2016), *Hacer matemática 1/2*, Buenos Aires, Argentina, Editorial Estrada