T02

LOS NÚMEROS RACIONALES Y UN POSIBLE TRABAJO PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

Cecilia Lamela, Cintia Mendoza & Sabrina Maffei

Universidad Pedagógica - UNIPE
Camino Parque Centenario 2565 – (B1897AVA)
Gonnet, Buenos Aires, Argentina
cecilia.lamela@unipe.edu.ar, cintiam_87@yahoo.com.ar

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación:
Se presentará una Propuesta didáctica para la Educación Secundaria en el marco de la Didáctica de la Matemática

Palabras clave: propuestas de enseñanza, números racionales, intervención docente, espacios colectivos de trabajo, generalización de procedimientos.

RESUMEN
En este taller se trabajará una propuesta de enseñanza para la Escuela Secundaria sobre cuestiones de los Números Racionales: Propiedad de densidad, orden y comparación, recta numérica.
La propuesta aborda distintas tareas para los estudiantes y tienen por objetivo: reflexionar sobre el trabajo realizado, posibilidad de acceder a las razones por las cuáles un cierto conocimiento funciona de una cierta manera, lograr cierto nivel de fundamentación para los conceptos y las propiedades, generalizar y comparar procedimientos, establecer la verdad o falsedad de enunciados.
Analizaremos, además, producciones de estudiantes de escuelas secundarias bonaerenses.
A propósito de estos análisis se trabajará una posible forma de abordar y cuestionar ciertas "creencias" que los estudiantes se construyen sobre estos números, como: "la fracción a/b se encuentra entre los enteros a y b" "entre dos fracciones existen finitas fracciones" entre otras. Ponerlo en discusión puede favorecer a los estudiantes a avanzar en el estudio de este campo numérico.
Finalmente se propone reflexionar sobre el lugar del docente y los estudiantes en la elaboración de teoría. Lo que un docente proponga hacer a sus estudiantes, las preguntas que habilita, los intercambios que propicie, las intervenciones que realice, permitirán un tipo de conocimiento producido por los estudiantes.

DESTINATARIOS: docentes de Matemática, formadores de docentes de Matemática y estudiantes del profesorado de Matemática.

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

El taller está organizado en diversos tipos de actividades para los asistentes:

- Análisis matemático-didáctico de algunas de las actividades de la propuesta de enseñanza "Números Racionales: un posible trabajo para la escuela secundaria" documento que forma parte de la colección ENTRAMA del Ministerio de Educación de la Nación.
- Análisis de producciones de estudiantes de escuelas secundarias de la Provincia de Buenos Aires.
- Reflexión sobre la elaboración de teoría a partir del trabajo de los estudiantes.

A su vez, el taller los separamos en cuatro partes:

1. Componer cantidades
2. La representación en la recta numérica: su complejidad, la recta como recurso para generar nuevo conocimiento.
3. Orden y comparación de los números racionales en sus distintas representaciones
4. Densidad de los números racionales.

1. Componer cantidades

El estudio de los números racionales comienza en la escolaridad primaria de nuestros estudiantes. Sin embargo se continúa en la escuela secundaria básica. La pregunta que surge es qué abordar en este momento del estudio de los números racionales con nuestros estudiantes de 1º, 2º o 3º año. Es por ello que en esta parte de la propuesta se trabajará con tres actividades para comenzar a trabajar con el estudio de los números racionales. En ellas se trabajarán dos aspectos de los números racionales, por un lado la composición de cantidades a partir de otras expresadas en fracciones, y por otra, ubicar números racionales entre enteros.

Se les propondrá a los asistentes que se organicen en pequeños grupos para trabajar la siguiente actividad

Primera actividad del taller

Una intención de este trabajo es cuestionar ciertas creencias que se construyen los chicos. A propósito de esto vamos a presentar tres actividades que podrían ser trabajadas en cualquier año de la escolaridad. Les proponemos pensar un posible escenario de discusión respecto a las resoluciones que podrían surgir por parte de los chicos.

Actividad 1: La Heladería

a) En una Heladería se arman potes de helados de distintos tamaños para su venta. El encargado de la Heladería decidió armar una tablita que le permitirá organizar su trabajo, sabiendo rápidamente cuántos potes de helados necesita según el peso de cada uno para envasar dos kilos de helado. Completar la tabla.

Si los potes tienen	*Necesito*
½ Kg.	
¼ Kg.	
⅛ Kg.	
⅓ Kg.	
1/6 Kg.	

b) Como su trabajo se agilizó con el armado de la tabla, el encargado decidió armar una tabla pero para envasar 3 kilos de helado ¿Es correcta la tabla que armó? En caso de que alguna cantidad de potes sea incorrecta, corregirla.

Si los potes tienen:	*Necesito:*
¼ Kg	*12 potes*
½ Kg	*6 potes*
⅓ Kg.	*10 potes*
1/6 Kg.	*16 potes*
⅛ Kg	*24 potes*

c. Tres clientes realizaron en la heladería una compra de cierta cantidad de helado. La balanza marcó los siguientes pesajes: 2,25 kg; 3,5 kg y 1,75 kg. Sabiendo que el empleado cuenta con potes de 1 kg, ½ kg, ¼ kg, ⅛ kg, ⅓ kg y 1/6 kg ¿qué potes pudo haber utilizado para armar los pesajes anteriores?
d. ¿El empleado pudo haber utilizado solo potes de ½ kg para armarlos? ¿Y de 1/4? ¿Y de 1/8? ¿Y de 1/3?
e. ¿Cómo podría armar el empleado 1,25 kg y 2,75 kg con potes de distintos pesos si cuenta con todos los potes menos con los de 1kg? Propone dos maneras distintas de armar dichos pesajes.

Actividad 2: Entre enteros
Estos números se encuentran entre 0 y 3. Colócalos en la columna correspondiente, explicando cuál es el criterio que utilizas para ubicarlos.
3/7 14/5 11/9 8/3 5/6 2 5/8 3/4

Entre 0 y 1	*Entre 1 y 2*	*Entre 2 y 3*

Actividad 3
¿Cuáles son los enteros más próximos a los siguientes números racionales?
33/7 9/5 47/4 -9/5 - 12/3 -84/9 125/10 12,5 -4,11 -3 ¼

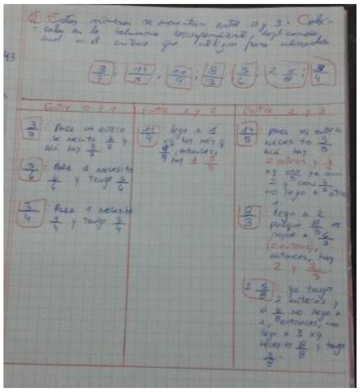
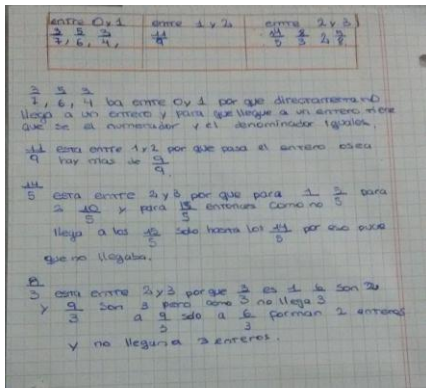
La actividad 1 permite establecer a los estudiantes ciertas relaciones ya que al apoyarse en un contexto pueden relacionar el tamaño de los potes con la cantidad que se necesita para armar ciertos kilos de helado.
Estas conclusiones a las que se puede llegar con los estudiantes en el espacio colectivo, serán insumo para trabajar el ítem b) del problema. Afianzando en este ítem las conclusiones a las que se abordaron en el ítem anterior.
El ítem 1c permite a los chicos ver la relación que existe entre la escritura decimal y fraccionaria de un número racional.
La actividad 2 tiene como intención que los estudiantes puedan elaborar criterios para ubicar fracciones entre dos enteros. Es un buen momento de apelar a la definición de fracción[1] a través de preguntas como *¿cuántos séptimos se necesitan para completar un entero? ¿Con 3/7 se tiene más o menos que un entero?*

[1] En todo este trabajo se toma la definición de fracción: *"Si necesito n veces una cierta cantidad para completar un entero esa cantidad se puede expresar como 1/n".* Y a partir de esto se trabajar con las fracciones del estilo m/n como aquellas que m veces 1/n forman m/n. Este modo de ver a las fracciones permitiría, por un lado, que si se necesitan n veces 1/n para obtener un entero entonces se puede expresar dicho entero como n/n. Y del mismo modo se puede expresar k enteros como k.n/n. Cabe aclarar que esta escritura se utiliza sólo en términos para los docentes. Por otra parte esto sería un apoyo para la resolución de cálculos mentales con fracciones. Por ejemplo, al resolver 2/3 +2 es posible expresar al 2 como 6/3. Si se debiera resolver 4/3x7 es posible expresar al 4/3 como 4x1/3 y como 4x7 es 28, entonces se obtiene 28 de ⅓ es decir 28/3.

Esta actividad pone en juego varios recursos. Un recurso que se espera que aparezca es la posibilidad de transformar los enteros en fracciones y comparando el valor del numerador. Por ejemplo en el caso de 14/5 ubicándolo entre 2 y 3 recurriendo a que en 2 enteros hay 10 de 1/5 y en 3 enteros hay 15 de 1/5.

Otra estrategia que los estudiantes podrían emplear es pensar cuántas veces entra el denominador en el numerador. Por ejemplo, para 14/5, el 5 entra dos veces en el 14 y sobra 4 entonces, 14/5 está entre 2 y 3.

Tenemos dos producciones de estudiantes que se analizarán de manera colectiva con los asistentes del taller que abordan las estrategias que se anticiparon al momento de la elaboración de la actividad

Esta tarea de ubicar números racionales tanto en su expresión fraccionaria como en su expresión decimal entre enteros, que se realiza en la actividad 3, amplía las estrategias que se elaboraron en la actividad anterior. Es necesario considerar que el trabajo con racionales negativos precisa que los estudiantes recuperen los criterios de orden de los números enteros y a su vez, se construyan nuevos criterios de orden para este nuevo campo numérico.

En conclusión, la intención de esta tarea de ubicar entre enteros es reconocer tanto a la expresión decimal como a las fracciones respecto al entero positivo y negativo; reconocer que un número entero (positivo y negativo) se puede escribir como una fracción; distinguir que si un número decimal o una fracción está entre a y b, el opuesto de ese número estará entre -b y -a; reforzar la noción de número mixto y lo que esta expresión permite ver.

Segunda actividad del taller

Los chicos han trabajado con tres actividades, ellos tienen construidas ideas acerca de los números racionales tanto en su expresión decimal como fraccionaria. Entonces, teniendo en cuenta dicho escenario, pensar qué afirmaciones o conclusiones podrían dar los estudiantes al momento de proponerles una actividad de cierre.

Se trabajará en el taller junto a los asistentes que es posible proponer en el aula un momento de síntesis. Luego del trabajo con estas tres actividades sería un buen momento donde el docente podría proponer preguntas tales como: *¿es cierto que todo número entero puede escribirse como fracción?, ¿es cierto que si un número está ubicado entre a y b, su opuesto estará entre -a y -b?* y de este modo generar algunas conclusiones. Solo a modo de ejemplo: *las expresiones de los números mixtos o decimales son más fáciles de ubicar entre enteros porque se puede ver su parte entera, todo número entero se puede escribir como fracción aparente.* De este modo se puede dar un cierre a las ideas y se afiancen los conocimientos.

Tercera actividad del taller

Como dijimos, queremos cuestionar ciertas creencias de los chicos.
En la actividad que sigue se propone una serie de afirmaciones que las elegimos para discutir porque son cuestiones que aparecen bastante seguido en nuestras aulas. Y decidimos ponerlas a discusión.
En ese sentido en este tipo de actividad cada docente podría agregar otras cuestiones propias de sus estudiantes.
Les proponemos pensar posibles argumentos que pueden poner en juego los chicos para decidir por la validez o falsedad de cada una de las afirmaciones

Actividad

En un curso de secundaria básica los estudiantes estaban debatiendo sobre las distintas relaciones que tienen las fracciones. La docente del curso recopilo lo que decían sus estudiantes y escribió en el pizarrón:
I- La mitad de 4/6 es ⅔ porque 2 y 3 son la mitad de 4 y 6
II- La mitad de 4/6 es 2/6 porque 2 es la mitad de 4
III- La mitad de 1/10 es 1/5 porque 5 es la mitad de 10
IV- La mitad de 1/5 es 1/10
V- La tercera parte de 3/5 es ⅕ porque necesito 3 veces 1/5 para formar 3/5
VI- La tercera parte de 3/5 es 3/15 porque al realizar el gráfico me queda eso
Indicar si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar tu respuesta.

Esta misma actividad se podría realizar a partir de las afirmaciones que realizan los estudiantes en las actividades anteriores. El docente podría recopilar en el pizarrón las afirmaciones que van realizando sus propios estudiantes sin darle valor de verdad a las mismas, para que sean discutidas colectivamente.

En este momento proponemos a los docentes realizar un tipo distinto de trabajo con los estudiantes, el cual tendría como objetivo sistematizar los conocimientos que se van poniendo en discusión en el espacio colectivo. Esta nueva forma de trabajo consta de "*elaborar teoría*" con los chicos y se podría realizar luego de una discusión colectiva que se produce en función de la actividad propuesta. Este es un trabajo interesante pero también es un tipo de trabajo diferente.

A continuación proponemos un posible trabajo de armado de estrategias para calcular, por ejemplo, la mitad de una fracción, que se puede dar luego del trabajo en el espacio colectivo con la actividad anterior.

Se les puede pedir a los chicos que, por grupos, elaboren algunas estrategias, lo más generales posibles, para calcular la mitad de una fracción. Y el docente propone al total de la clase estudiar si esas estrategias sirven siempre, a veces o no sirven. Cuando todo el curso llegue a un acuerdo -tomar la afirmación tal cual fue formulada o bien reformularla o ajustarla-, se les puede pedir a los estudiantes que lo escriban en sus carpetas como una conclusión del trabajo con esta actividad.

Cuarta actividad del taller

Propongan estrategias que podrían proponer los estudiantes, sean estas correctas, parcialmente correctas o no, para calcular la mitad de una fracción.

A modo de ejemplo podría aparecer:
- *Para calcular la mitad de una fracción hay que dividir por 2 al numerador*
- *Para calcular la mitad de una fracción hay que duplicar el denominador.*

En el caso de la primera afirmación, se podría discutir que esa estrategia sirve siempre y cuando el numerador sea par. Y en ese caso reformularla del siguiente modo:

- *Para calcular la mitad de una fracción, si el numerador es un número par, hay que dividir por 2 al numerador.*

En cambio la segunda estrategia sirve para cualquier fracción.

2. La representación en la recta numérica: su complejidad, la recta como recurso para generar nuevo conocimiento.

En esta parte de la propuesta se trabajará sobre la representación en recta numérica. Esta representación permite retomar ciertas nociones de los números racionales como las abordadas en las actividades anteriores -ubicar entre enteros, escritura de número mixto- y además permite abordar la idea de fracciones equivalentes.

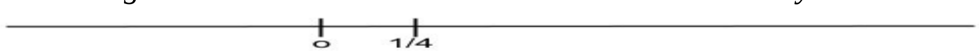
Sabemos que la representación de los números racionales en una recta numérica resulta en muchas ocasiones difícil para nuestros estudiantes. Y esto es así porque esta representación lleva una complejidad: diferenciar entre el lugar que ocupa, por ejemplo 1/3 y la medida 1/3. En una recta el lugar para el número 1/3 es único, sin embargo la distancia entre 1/3 y 2/3 o entre 13/3 y 14/3 mide 1/3. Es decir, en la recta numérica se tienen longitudes que representan 1/3 de la unidad pero el número 1/3 se ubica solo en la primera longitud de 1/3 a la derecha del 0.

Otra complejidad al momento de trabajar la representación en recta numérica es que los números se anotan en un orden y conservando una escala. Y esta escala cambia de recta en recta. Por otro lado esa escala queda fijada al tener dos números. Sobre estas cuestiones se trabajará en los problemas que se presentan a continuación.

Quinta actividad del taller

A continuación les presentamos una actiivdad para trabajar con rectas numéricas.
¿Qué posibles resoluciones tanto correctas como "erróneas/parciales" podrían realizar los estudiantes?

1. En la siguiente recta se encuentran ubicados los números 0 y ¼.



a) Señalen en esta recta el lugar que ocupa el número 1/8. ¿Y qué lugar ocuparía el 3/8? ¿Y el 3/2?

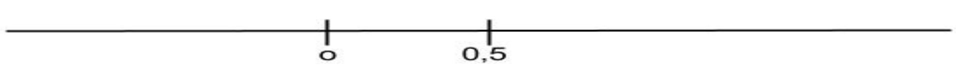
b) También en la recta anterior, ubiquen el 0,75; 1,5; 0,25; 0,5 y el 1,25.

2. En esta recta están representados los números 0 y 3/2.

Señalen en la misma el lugar que ocupa el número 1/2, 1, y 3/4

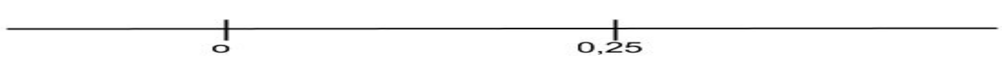
¿Donde ubicarían el 1/5?

3. En la siguiente recta se encuentran ubicados los números 0 y 0,5.



¿Dónde ubicarían 1/6? ¿Y 4/3?

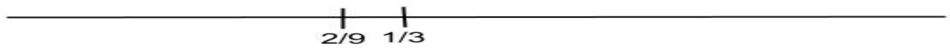
4. Los números 0 y 0,25 se encuentran ubicados en la siguiente recta:



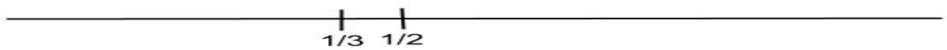
¿Dónde ubicarían 1/5?

¿Dónde ubicarían 1/3?

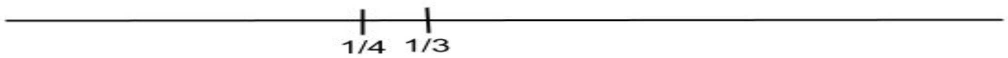
5. En la siguiente recta se encuentran ubicados los números 2/9 y 1/3



¿Dónde ubicarían el 0, el 1 y el 4/3?
6. En la siguiente recta se encuentran ubicados los números 1/3 y 1/2.



¿Dónde ubicarían el 0 y el 1?
7. En la siguiente recta se encuentran ubicados los números 1/4 y 1/3.



¿Dónde ubicarían el 2/3 y el 3/4?

En particular nos detendremos en el análisis de los problemas 1, 2 y 3 que servirá para la actividad que se propondrá luego: análisis de producciones de los chicos. En estas tres actividades se evoca nuevamente lo trabajado anteriormente en el problema de la heladería, que es la relación entre mitades, terceras partes, dobles etc. Sin embargo las mismas al ser planteadas desde otro contexto, invitan a los estudiantes a pensar dichas relaciones desde la recta numérica. También los números elegidos en dichas actividades permite a los estudiantes recurrir a la unidad, si bien no es necesario muchas veces tenerla para ubicar los números pedidos. Pero para aquellos estudiantes que presenten alguna dificultad, el tener de referencia la unidad les permitirá avanzar en su tarea.

Respecto al problema 2, se busca que los alumnos puedan establecer relaciones como:el triple de ½ es 3/2 y que por lo tanto ½ va a estar ubicado en la tercera parte del segmento. Al haber identificado la ubicación del ½, es posible representar el entero y a partir de allí ubicar el ¾, ya sea dividiendo el segmento comprendido entre 0 y 1 en cuatro partes o reconociendo que ¾ "está en medio" del segmento comprendido entre ½ y 1.

En el problema 3, una posible resolución de los chicos que anticipamos que pueda suceder es que midan la distancia entre 0 y 0,5 como es 3 cm y hay que ubicar ⅙, dividan esa parte en 6 y tomen 1. ¿En qué están pensando los estudiantes cuando realizan esta resolución? En la definición "tradicional" de que el denominador indica las partes en que se divide el entero y se toman tantas partes como indica el numerador. Es importante no desestimar las producciones de ellos. Ya que apoyarse en este tipo de resoluciones que podríamos llamar "erróneas" dará lugar a una reflexión sobre los procedimientos involucrados y a partir de ahí generar nuevos conocimientos.

A partir del tercer problema se busca que los alumnos puedan establecer relaciones entre racionales que poseen escrituras distintas. De todos modos la introducción de expresiones decimales puede apoyarse en los problemas anteriores en donde se trabajó con las equivalencias 0,5=½; 0,25=¼; 0,75=¾.

Podría decirse que la realización de esta actividad junto con el análisis de las equivalencias anteriores permite dar un apoyo a la noción de *fracciones equivalentes* como dos números que representan una misma cantidad y que *ocupan* el mismo lugar en la recta numérica.

En las rectas 4 al 7 esta relación no es tan directa. Si bien la recta 5 involucra una relación entre novenos y tercios (que podría considerarse "directa"), la misma no es tan sencilla de trabajar.

Sexta actividad del taller

Una vez discutidas y analizadas didácticamente la actividad de rectas numéricas anterior, se les propondrán a los asistentes al taller discutir producciones de estudiantes de escuelas secundarias de la Provincia de Buenos Aires.

A continuación les presentamos diversas fotos de producciones de estudiantes para los problemas 1, 2 y 3.
Les proponemos que para cada grupo de fotos analicen.
¿De qué modo aborda cada estudiante el mismo problema?
¿Qué relaciones podemos encontrar en las producciones de los distintos estudiantes?
¿De qué modo se puede imaginar una discusión colectiva al poner en relación esas resoluciones?

Problema 1

Foto 1

Foto 2

Problema 2

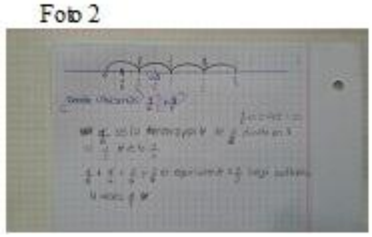
Foto 1

Foto 2

Problema 3

Foto 1

Foto 2



Las producciones elegidas ponen en juego gran parte del análisis realizado anteriormente.
En particular la intención es discutir:

- En el trabajo con rectas numéricas aparece un doble juego para los chicos: las relaciones entre las fracciones y la relación con la escala para esa recta particular. De qué modo separar dónde ubicar ¼ de la medida que hay, en cm, entre 0 y ¼.
- Si se tiene la distancia entre 0 y 3/2, hay que partir en 3 esa distancia. Esta resolución entra en contradicción con un tipo de trabajo más “tradicional” que se mencionó anteriormente.
- Ante un mismo problema, se puede apelar a conocimientos diferentes: 1/6 es la tercera parte de ½ o bien ½ + ½ =1 y 1/6 es el entero dividido en 6 partes iguales. Poner en discusión ambas resoluciones permite conocer más acerca de las fracciones, en particular las relaciones entre 1/6, ½ y el entero.

3. Orden y comparación de los números racionales en sus distintas representaciones

Poder decidir entre dos números cuál es mayor y cual es menor, permite unir ideas de los números racionales, ya sea en su expresión fraccionaria como decimal.

Cuando se buscan estrategias de comparación de fracciones estamos fomentando que los chicos puedan buscar estrategias contingentes a los números utilizados. Con esto queremos decir que no estamos esperando que aparezca un único método de comparación.

A modo de ejemplo, si el único método que aparece como óptimo para comparar fracciones es aquel que permite buscar fracciones equivalentes a las dadas, que tengan igual denominador, ante la posibilidad de comparar 253/120; 7/2 pierde su efectividad. Porque en este caso es posible analizar que la primera fracción está entre 2 y 3 y sin embargo la segunda se encuentra entre 3 y 4.

También es posible empezar a cuestionar ciertas ideas que se construyen nuestros estudiantes, por ejemplo, pensar que una expresión decimal es mayor cuantos más números tiene detrás de la coma sin advertir el valor que ocupa cada cifra detrás de la coma.

Por último, es posible proponer una actividad de armar un paso a paso que permita ordenar varios números, en donde se tienen que poner, en simultáneo diferentes comparaciones.

Séptima actividad para el taller

Les pedimos que anticipen de qué modo los chicos pueden decidir qué número es mayor en cada caso. Identifiquen posibles argumentaciones y dificultades que podrían surgir al momento de comparar.

Actividad

¿Cuál es el número mayor en cada caso? Explica cómo lo pensaste

a) 6/5 ; 5/6	*b) 7/11 ; 10/11*	*c) 7/10 ; 7/8*
d) 2, 32 ; 2, 317	*e) 2,5 ; 20/7*	*f) 3 2/7 ; 25/7*
g) 245/219; 7/2	*h) 14/13 ; 17/16*	*i) 4,56102 …. 4,5602*

En esta actividad se busca lograr que los estudiantes puedan comparar dos fracciones indicando cual es mayor o menor utilizando todas las relaciones que se emplearon en los trabajos anteriores y otras relaciones que se pondrán en juego dependiendo de las estrategias que utilicen.

Las estrategias de comparación son contingentes a los números involucrados. Unas estrategias tal vez sirvan para un par de números y no así para otros. Es por esto que proponemos diferentes pares de números a comparar para propiciar la aparición de diversas estrategias en tanto complejidad y en tanto a relaciones entre fracciones.

Octava actividad para el taller

Análisis de un registro de clase

Se les propondrá a los asistentes leer un registro de clase y analizar las discusiones que se generaron al comparar 7/10 y 7/8

A (Mel): Habíamos pensado que el ⅞ es mayor porque le falta un número al ⅞ para llegar al entero, en cambio en el otro le faltan 3 y es como más grande.

P: ¿Entendieron? ¿Quién puede decirlo?

A (Daiana): es lo mismo porque está más aproximado al denominador. Porque al 7/10 le faltan 3 y al otro 1…

La profesora se acerca a Daiana y le pide que explique con otras palabras lo que ella dijo. En ese momento Santiago escucha y le dice a la docente que no se cumple siempre. Se produce una

pequeña discusión entre ellos, la profesora vuelve a acercarse al pizarrón y decide compartir con el grupo lo que Santiago plantea.
P: Santiago dijo recién… ¿Pero qué pasa si a los dos le falta 1? (se dirige a Santiago) ¿Cuáles eran los ejemplos que dijiste? 5/6 y 9/10. ¿Qué hacemos ahí?
A: son iguales.
P: ¿son iguales?
A: Si.
A: No.
P: ¿Serán iguales? ¿Cuánto le falta a este?
En este momento se genera la discusión, donde algunos alumnos dicen que son iguales y otros dicen que no.
P: (haciendo referencia al 5/6) a ver, ¿le falta 1?
A: si.
A: pero a ese le falta 1/6.
P: ah! pero no le falta un "cualquier cosa", ¿a este que le falta?
A: 1/6.
P: le falta 1/6 para completar.
A: y al otro le falta 1/10...
P: y a este le falta 1/10 para completar, le falta 1 pero uno es ⅙ y el otro es 1/10. Entonces, ¿son iguales?
A: no!!
P: ¿1/6 es lo mismo que 1/10?
A: no!!
P: entonces no le falta lo mismo, si no le falta lo mismo no pueden ser iguales. Pero entonces, ¿Quién es más grande?
A: 5/6.
P: ustedes dicen que 5/6 es más grande. ¿Por qué?
Varios alumnos intentan a la vez decir por qué, en ese momento una alumna dice que 9/10 es más grande. Como varios alumnos están hablando al mismo tiempo, la profesora intenta organizar el debate.
Santiago le dice a la profesora que tiene un ejemplo para que se pueda ver mejor la diferencia, entonces la profesora lo invita a decirles a sus compañeros qué otros ejemplos está pensando.
Santiago: Yo tengo otro ejemplo para que lo vean mejor: ½ y 99/100, hay uno de diferencia pero es mayor...
P: Ahí a Santiago se le ocurrió otro que es más fácil de ver. Miren el ejemplo de Santiago, ¿Cuál es tu ejemplo?
Santiago: ½ y 99/100.
P: ¿a los dos le falta 1?
A: siii.
P: ¿A este (señalando el ½) qué le falta?
A ½.
P: ¿y a este? (señalando 99/100)
A: 1/100.
P: Volvamos un poco a la idea de Santiago. ¿Acá se ve que no le falta lo mismo? ¿Quién es más grande?
A: 99/100.

P: ¿99/100 es más grande?
A: Si.
P: ¿por qué es más grande?
A: Porque... (Los alumnos balbucean)
P: ¿Al ½ cuánto le falta…
A: 0.5.
P: 0,5 o ½.
A: La mitad.
P: La mitad. En cambio acá ¿Cuánto está completo y cuanto le falta? (señalando el 99/100).
A: 99/100.
P: Tiene completo 99/100 y ¿le falta?
A: Le falta 1/100
A: 0,99 tiene completo.
P: Si esto es 0,99 (la profesora señala en el pizarrón 99/100) y este ¿qué es? (Señalando el ½).
A: 0,5.
P:¿Entonces quién es más grande??
A: el 99/100.
P: Porque esto y esto (marcando los faltantes: ½ y 1/100) ¿Cómo son? ¿½ o 1/100 es más grande?
A: el ½.
P: ¡Como es más grande le falta más!
A: ahhh!
P: A este le falta ½!!! Que es un montón… en comparación con este: 1/100
P: Mirando acá (retomando el problema anterior) a éste le falta 1/6 y a este 1/10. ¿Entonces cuál es más grande 1/6 o 1/10?
A: (Balbuceo) …1/6 ...1/10.
P: Imagínense si a un chocolate lo divido en 10 partes y tomo 1 ¿Es más grande que si lo divido en 6 partes y tomo 1?
A: No. Va a ser más grande 1/6.
Santiago: Porque si lo divido en 10 las partes van a quedar más chicas….
P: ¿Escucharon lo que dijo Santiago?, Si lo divido en 10 las partes me quedan más chiquitas, si lo divido en 6 las partes son un poco más grandes. Entonces ¿quién es más grande, éste o este? (marcando el 5/6 y el 9/10).
A: Es más grande 9/10.
Santiago: Por eso el razonamiento del grupo de Mel no se puede usar siempre.

En este registro es posible analizar una nueva discusión que se genera a propósito de la intervención de Santiago: se pasa de comparar las fracciones ⅞ y 7/10, a realizar la nueva comparación entre las fracciones 5/6 y 9/10. A su vez la docente "se habilita" a correrse por un momento del ejercicio que se estaba discutiendo para comparar y poner el foco en los nuevos números que Santiago propone para comparar. La discusión que sigue, que pone en duda la estrategia planteada por Mel, podría no haberse dado si la docente no lo habilitaba.
En este momento los alumnos empezaron a hablar de otras estrategias para darse cuenta que el 5/6 es menor al 9/10, entonces la docente toma la decisión de cortar con el nuevo debate para poder cerrar la idea anterior es decir, para cerrar la idea de Santiago.

Los docentes, muchas veces, debemos elegir y dar prioridad a ciertas voces y callar otras, para en este caso cerrar una idea y dejarla en claro para todos.

4. Densidad

La noción de densidad permite profundizar el estudio de los números racionales. Por un lado, se reinvierten las estrategias de comparar y ordenar números para poder encontrar otro número entre dos dados, ya que esta tarea obliga a encontrar un número distinto a los que se dan y que cumpla a la vez que tienen que ser menor que el mayor de los números y ser mayor que el menor de los números. Por otro lado, comenzar a discutir y profundizar esta idea permite comprender la diferencia entre los conjuntos numéricos que los chicos vienen estudiando. En el conjunto de los números enteros, siempre existe un número entero anterior y uno siguiente inmediatos. Sin embargo, debido a la propiedad de densidad, no es posible encontrar un número racional anterior ni siguiente inmediato de otro número racional. Esta noción es compleja de atrapar y muchas veces los chicos van y vienen sobre estas cuestiones. Será necesario entonces brindar a los estudiantes el tiempo que sea necesario para poder revisarlas una y otra vez.

A su vez, proponer un estudio sobre la noción de densidad permite cuestionar creencias que posiblemente se construyeron nuestros estudiantes al trabajar con números enteros, por ejemplo, relacionar la noción de infinito con “algo muy grande” en lugar de algo que “no es posible de contar”. Sin embargo en el conjunto de los números racionales es posible encontrar una cantidad infinita de números en un intervalo acotado. Es decir, entre 1 y 2 hay infinitos números aún cuando es posible “comenzar en 1 y finalizar en 2”. Esta idea de una cantidad infinita de números en un intervalo acotado puede ser disruptiva.

Por último, la idea de densidad posiciona a los chicos en un mejor lugar al momento del estudio de funciones cuyos gráficos tienen asíntotas ya que los estudiantes pueden comprender “que me puedo acercar tanto a la asíntota como quiero y no tocarla”. Del mismo modo, esta idea podría ayudar a entender el concepto de límite de una función.

Novena actividad para el taller

Les presentamos la actividad “No te quedes sin nada”

Participantes: 2 personas.

Reglamento: Cada jugador, por turno deberá restarle al 1 un número positivo. Aquel jugador que llegue al 0 será el que pierda la partida.

¿Cómo se imaginan una jugada por parte de los chicos? ¿En dónde se frenarían? ¿Qué posibles intervenciones realizarían?

La finalidad de esta actividad es que los estudiantes apoyados en la propiedad de densidad, de manera explícita o no, puedan analizar que no es posible encontrar un número posterior inmediato. Esto quiere decir que no es posible encontrar un número positivo “justo antes del 0”, o el posterior más próximo del 0. Y con esto afirmar que aunque se tenga un número “chico” es posible restar otro número menor a este sin llegar a cero, con lo cual siempre se va a poder restar algo y seguir jugando

Décima actividad para el taller

A continuación se muestra los registros de varias parejas de jugadores jugando a “No te quedes sin nada”:

Partida 1	Partida 2	Partida 3
1	**1**	**1**

- 0,99 →jugador 1 --------------------------	**- 0,75→jugador 3** --------------------------	**- 0,5→jugador 5** --------------------------
0,01 **- 0,005 →jugador 2** -------------------------	**0,25** **- 0,24→jugador 4** -------------------------	**0,5** **- 0,2→jugador 6** -------------------------
0,005 **- 0,00499→jugador 1** -------------------------	**0,01** **- 0,005→jugador 3** -------------------------	**0,3** **- 0,15→jugador 5** -------------------------
0,0001 **- 0,00009999→jugador 2** -------------------------	**0,005** **- 0,004 →jugador 4** -------------------------	**0,15** **- 0,1 →jugador 6** -------------------------
0,00001 **- →jugador 1** --------------------------	**0,001** **- →jugador 3** --------------------------	**0,05** **- →jugador 5** -------------------------

Si se les presenta estos registros a los estudiantes preguntando qué debe decir el jugador de turno para dejar sin chances de jugar a su compañero, analizar:
¿Qué posibles resoluciones correctas o no anticipan que van a realizar los chicos?

Se podría analizar para estas partidas que es esperable que se utilice el recurso de agregar ceros después de la coma para poder construir un número decimal más chico que el que se tiene para restar y de este modo asegurarse la continuidad en el juego. Es decir, si lo que quedó es 0,00001 se puede restar un 0,000009.
En el caso de la partida 3 los estudiantes podrían responder que el jugador 5 no tiene oportunidad de seguir jugando porque no hay otro decimal más chico que 0,05. Otros estudiantes podrían responder que es posible restar números como por ejemplo 0,01, 0,02, 0,03 o 0,04 recuperando la idea anterior de que existen otros decimales más chicos. O puede ser el docente quien podría volver a traer para toda la clase lo analizado anteriormente.
La pregunta a instalar en el espacio colectivo es “si es posible dejar sin chances al compañero” o dicho de otro modo “si es posible hacer perder al otro”.

REFLEXIÓN FINAL

Hemos querido presentar y analizar una propuesta para trabajar sobre ciertas cuestiones de los números racionales que no son habituales en el trabajo con estos números: relaciones que derivan de trabajar con la recta numérica, comparar dos números racionales que posibilitan elaborar estrategias de comparación, realizar un juego para trabajar con la propiedad de densidad. Permitiendo, además, con este trabajo cuestionar ciertas “creencias” que tienen nuestros estudiantes respecto a estos números y poniendo luz en dichas cuestiones.
A partir de trabajar con esta propuesta se planteó a los profesores analizar diferentes producciones de los estudiantes permitiendo así reflexionar sobre lo sucedido en determinas clases de Matemática, en donde se le dio lugar al estudiante de elaborar teoría a partir del trabajo producido con números racionales, ya sea ubicando números en la recta, comparando dos números o jugando. Y en donde el rol del docente, tanto sus intenciones, como intervenciones, como aquellas discusiones que habilita o fomenta, permitió un tipo de conocimiento producido por sus estudiantes.

REFERENCIAS

Carrasco, D.; Lamela, C. (2005) Matemática fracciones y números decimales: 6to grado: apuntes para la enseñanza. “Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza 2004-2007.” Sadovsky, P. (coord.) 1ª ed. Buenos Aires: Secretaria de Educación. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires

Carrasco, D.; Lamela, C. (2005) Matemática fracciones y números decimales: 7mo grado: apuntes para la enseñanza. “Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza 2004-2007.” Sadovsky, P. (coord.) 1ª ed. Buenos Aires: Secretaria de Educación. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires

Della Santa, S.; Lamela; C.; Mendoza, C. *“Números Racionales: un posible trabajo para la escuela secundaria”* Material elaborado por la UNIPE para ENTRAMA, Proyecto de producción de materiales para la formación contínua en el marco del proyecto de “Mejora Educativa” del Ministerio de Educación de la Nación. Material en edición.

Duarte, B. (2010) *Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en Matemática: La función exponencial, el Razonamiento Matemático y la Intervención Docente en la Escuela Media.* Tesis doctoral. Universidad de San Andrés, Escuela de Educación.

Fioriti, G; Bifano, F.; Itzcovich, H.; Sessa, C.: Documentos sobre racionales para primer y segundo año. Ministerio de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Napp, C., Novembre, A., Sadovsky, P., y Sessa, C. (2000). *La Formación de los Alumnos Como Estudiantes. Estudiar Matemática*. Documento elaborado dentro de la serie Apoyo a los Alumnos de Primer Año en los Inicios del Nivel Medio. Editado por el Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Secretaría de Educación – Dirección General de Planeamiento.

Quaranta, M.E., Wolman, S. (2003). Discusiones en la clase de matemática. Qué, para qué y cómo se discute. En Panizza, M. (comp.). *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas.* Buenos Aires: Paidós.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy: miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.