T01

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS: UNA PROPUESTA PARA EL AULA

Carolina Benito, Cecilia Lamela & Federico Maciejowski

Universidad Pedagógica - UNIPE
Camino Parque Centenario 2565 – (B1897AVA)
Gonnet, Buenos Aires, Argentina.
carrolbet@gmail.com , cecilia.lamela@unipe.edu.ar, mfedericoalan@gmail.com

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación:
Se presentará una Propuesta didáctica para la Educación Secundaria en el marco de la Didáctica de la Matemática

Palabras clave: propuesta de enseñanza, razones trigonométricas, tablas trigonométricas, gestión de la clase, intervención docente, elaboración de teoría.

RESUMEN

En este taller se trabajará con una propuesta para la enseñanza de las Razones Trigonométricas que fue elaborada por la Universidad Pedagógica (UNIPE) y forma parte de un documento de la colección ENTRAMA del Ministerio de Educación de la Nación.
La propuesta analizada en este taller se enmarca en una concepción de la clase de matemática como un ámbito en el que se despliega actividad matemática, en donde se les propone a los chicos formular preguntas, ensayar respuestas para esas preguntas y eventualmente dejar cuestiones pendientes; reflexionar sobre las propias producciones y sobre las de otros. Una parte central es el trabajo con las definiciones de las razones trigonométricas las cuales son elaboradas con los estudiantes a partir del trabajo realizado en el aula.
Es así como en este taller se propone reflexionar sobre el lugar del docente y de los estudiantes en la elaboración de teoría. Lo que un docente proponga hacer a sus estudiantes, las preguntas que habilita en el aula, los intercambios que se propicien, las intervenciones que realice, van a permitir un tipo de conocimiento producido por nuestros estudiantes.

DESTINATARIOS: docentes de Matemática, formadores de docentes de Matemática y estudiantes del profesorado de Matemática.

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

En la propuesta de enseñanza que se trabajará en este taller se presenta una entrada posible al trabajo con las Razones trigonométricas en la escuela secundaria. Para ello, se plantea una situación problemática en un contexto extramatemático en el cual la razón entre un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo adquiere un determinado sentido.
En una primera instancia de trabajo, los estudiantes podrán decidir si un ángulo dado es mayor, menor o igual que otro poniendo en juego diferentes estrategias de comparación, aún sin conocer la amplitud de esos ángulos. Luego de las primeras actividades, se toma en consideración la razón entre un cateto y la hipotenusa como un “valor óptimo” que permite

de algún modo caracterizar al ángulo considerado. Esto resulta un buen punto de apoyo para definir junto con los estudiantes el coseno de un ángulo no sólo como la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa sino también como aquel "número" que permite saber si dos ángulos agudos (de dos triángulos rectángulos diferentes) son congruentes.
En el taller, el análisis de las actividades y las posibles intervenciones del docente, permitirán discutir otras cuestiones más generales en relación al proyecto de enseñanza que un docente se propone. De esta manera, las intervenciones que un docente realice, las preguntas que habilite, las discusiones que propicie y la manera de gestionar la clase, estarán ligadas a dicho proyecto de enseñanza.
En este sentido, se espera que el trabajo en el taller permita visualizar un posible escenario donde el docente no comunica resultados sino que toma la decisión de que la clase se convierta en un espacio donde es posible generar conocimiento matemático y al mismo tiempo donde él es el responsable de institucionalizar el saber puesto en juego.

A continuación se presentan tres bloques para el trabajo en el taller:

Bloque I: "Buscando un método para comparar ángulos en triángulos rectángulos" (análisis de las primeras actividades de la secuencia).

<u>Actividad 1 de la secuencia planificada:</u>
Un complejo recreativo en el que se realizan deportes extremos ofrece un circuito de tirolesas mediante el siguiente folleto:

Esta primera actividad para los alumnos tiene la particularidad de no tener una consigna en su enunciado. De esta manera, en la planificación de la secuencia se previó un momento de la clase en el que se lee el folleto del complejo turístico y el docente realiza diferentes preguntas con el fin de analizar el contexto que propone la situación. Como parte de este "ida y vuelta" con los alumnos se espera que surja la primera consigna para que ellos estudien.

Primera actividad del taller

A partir de la actividad 1 les proponemos pensar: *¿Qué preguntas se pueden hacer, de manera oral y para el total de la clase para comenzar a "entender" la información del folleto?*

En este primer intercambio con los participantes del taller se espera explicitar que hay características de las tirolesas del complejo que se pueden conocer mediante una "lectura" directa del folleto. Por ejemplo, cuál es la de mayor recorrido o cuál es la que desciende una altura mayor. En cambio, preguntas vinculadas a la inclinación de las tirolesas requieren otro tipo de análisis.
Luego se compartirá la siguiente pregunta, que forma parte de la secuencia sobre razones trigonométricas:

Si se quiere elegir, entre la tirolesa B y la C, la que sea más empinada, ¿cuál se debería elegir? ¿Y entre las tirolesas A y B?

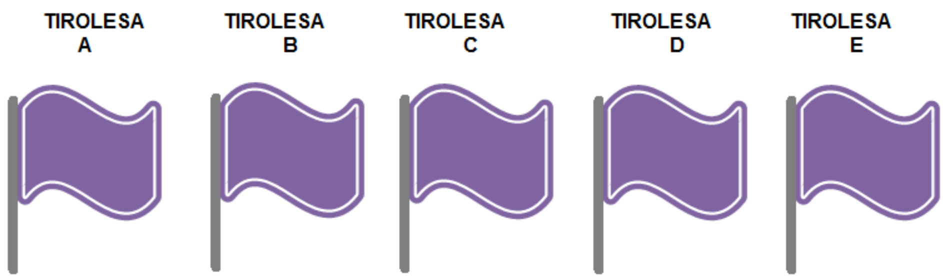
Segunda actividad del taller

Con respecto a la pregunta planteada para los alumnos: *¿Qué posibles resoluciones podrían abordar los chicos al comparar dos tirolesas (en este caso B con C y A con B), ya sea resoluciones "correctas", "erróneas", resoluciones parciales o apoyadas en conocimientos intuitivos y/o que funcionen?*

Se espera que aparezcan algunas conjeturas como: "la más empinada es la más alta", "la más empinada es la que recorre mayor distancia", "si en menos recorrido desciende más entonces es más empinada". También se podría anticipar que algunos alumnos realicen un dibujo a escala, entre otras estrategias.
Se propondrá una puesta en común entre los asistentes al taller en la cual se habilite la discusión no sólo sobre las diferentes estrategias sino también sobre la necesidad de ponernos de acuerdo al decir qué significa que una tirolesa sea más empinada, ¿qué vamos a tomar como válido en el aula? ¿de qué ángulo hablamos cuando nos referimos al ángulo de inclinación? Es una intención que se vincule la inclinación con un ángulo.

<u>Actividad 2 de la secuencia planificada:</u>

a. ¿Cuál de las tirolesas tendrá la mayor inclinación? ¿Cómo se dan cuenta?
b. ¿Cuánto desciende cada tirolesa al recorrer 1 metro sobre el cable?
c. Los encargados del complejo recreativo quieren utilizar un banderín con estrellas para indicar el nivel de dificultad de cada tirolesa y así poder diferenciarlas. El banderín correspondiente a la tirolesa menos inclinada tendrá una estrella y la cantidad de estrellas aumentará gradualmente a medida que aumente el nivel de dificultad, esto es, a medida que aumente la inclinación de la tirolesa.



Indica la cantidad de estrellas que colocarías en cada banderín.

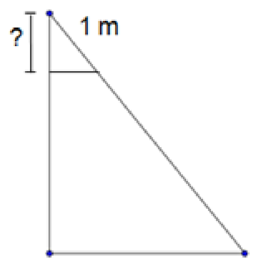
El ítem a) plantea la necesidad de desplegar estrategias de comparación. Para su abordaje los estudiantes tendrán que tomar algunas decisiones. Por ejemplo, ¿qué par de tirolesas conviene comenzar a analizar?, ¿de qué modo realizar la comparación?, ¿es necesario comparar todas las tirolesas?, ¿cómo organizar la información del problema y los resultados parciales de las mismas?
Será interesante discutir en el espacio colectivo del taller todas estas cuestiones.

Tercera actividad del taller

Teniendo en cuenta la consigna a) de la actividad 2, les pedimos que:

- *anticipen de qué modo los chicos pueden decidir cuál es la tirolesa más empinada. Identifiquen posibles argumentaciones.*
- *identifiquen posibles dificultades que podrían surgir al comparar las 5 tirolesas y posibles intervenciones que podría realizar el docente en aquellos casos en los cuales la comparación pueda resultar más compleja.*

Será interesante comparar diferentes formas de gestionar el trabajo en el aula con esta actividad 2: ¿En qué momento se puede realizar una puesta en común? ,¿cuál puede ser el aporte si se realiza luego de resolver el ítem a?, ¿cuáles pueden ser las intenciones de la pregunta b?
La altura que desciende cada tirolesa al recorrer un metro sobre el cable permite de algún



modo “cuantificar” la inclinación de una tirolesa y será denominado, en una primera etapa de trabajo, como *“razón de inclinación”*. Más adelante será definido como el coseno del ángulo de inclinación (en el caso que se tome el ángulo entre la altura y la hipotenusa) o el seno del ángulo de inclinación (en el caso que se tome el otro ángulo).

Momento de síntesis:

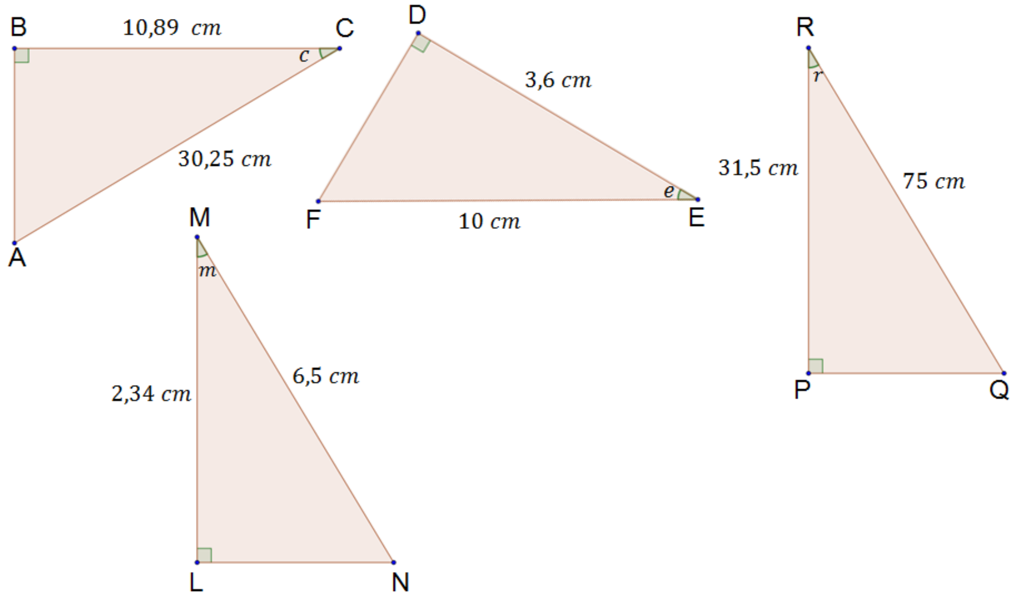
Se presentará una actividad pensada para los estudiantes que podrá funcionar como un momento de síntesis luego de las actividades 1 y 2. La misma se organiza en base a las distintas conjeturas que fueron circulando por el aula y tiene como objetivo determinar criterios para comparar tirolesas, estableciendo algunas conclusiones parciales.

Bloque II: "Conociendo el valor de los ángulos a partir de los lados de un triángulo rectángulo. Primera definición: coseno de un ángulo"

Se presentarán las actividades 3 y 4 de la secuencia, con algunos comentarios. Posteriormente se entregará la siguiente actividad:

Actividad 5 de la secuencia planificada:

Decidan si los ángulos c, e, r y m tienen la misma amplitud.



Cuarta actividad del taller:

> *Considerando la actividad 5 de la secuencia:*
> *¿Qué estrategias podrían poner en juego los estudiantes para realizar esta actividad sabiendo que trabajaron las actividades anteriores y todavía no conocen la definición de las razones trigonométricas?*

Se espera que en el espacio colectivo del taller no sólo se discuta sobre las diferentes estrategias sino también sobre el cambio de contexto para esta actividad, la forma en la que se han presentado los datos y la intención de relacionar siempre el cateto adyacente al ángulo a comparar con la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Esta actividad será tomada como "referencia" para poder definir en el aula **con** los estudiantes el coseno de un ángulo. Es decir, es un momento en el cual se elabora teoría en la clase.

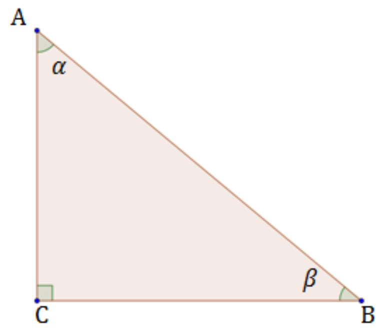
En el taller, se reflexionará sobre las siguientes cuestiones: ¿En qué condiciones se llega a la definición del coseno?, ¿cuál es el rol del docente en este momento?

En las siguientes actividades de la secuencia proponemos un trabajo para poner en juego estas ideas:

- Si se conoce el valor del coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, pero no las medidas de los lados de dicho triángulo, hay infinitos triángulos rectángulos que tienen ese ángulo agudo, con lo cual no es posible conocer las medidas de los lados de ese triángulo.
- Qué valores puede tomar el coseno de un ángulo. Por ejemplo, ¿puede ser que $\cos\alpha = 2$?

Actividad 8 de la secuencia planificada:

Decidan, en cada caso, si es posible construir un triángulo rectángulo ABC que cumpla lo pedido. Si piensan que es posible, indiquen las medidas de sus tres lados. Si piensan que no se puede, expliquen por qué.



i. Que tenga un ángulo α cuyo coseno sea 0,5 y que la hipotenusa mida 8,3 cm.
ii. Que tenga un ángulo α que cumpla $cos\ \alpha = 0{,}5$.
iii. Que tenga un ángulo β tal que $cos\ \hat{\beta} = 4$ *y que la hipotenusa mida 8, 3 cm.*
iv. $cos\ \hat{\alpha} = 2$ *y el cateto adyacente al ángulo α mida 7,5 cm.*
v. $cos\ \hat{\beta} = 0{,}25$ *y el cateto adyacente a* $\hat{\beta}$ *mide 6 cm.*

Quinta actividad del taller

Si sabemos que el coseno de un ángulo es 0,25 , ¿cuánto mide este ángulo? *Ensayar posibles respuestas por parte de los chicos para responder esta pregunta*

En la secuencia planificada, para determinar la medida del ángulo que se está considerando, se propone la *utilización de las tablas trigonométricas*. De este modo, se puede determinar la medida de un ángulo, sabiendo el valor del coseno y a la inversa, determinar el valor del coseno del ángulo conociendo la amplitud del mismo. Posteriormente, este trabajo se podrá realizar utilizando la calculadora científica.

Momento de síntesis

Se propondrá una discusión con los participantes del taller en torno al uso de la calculadora para el cálculo de las razones trigonométricas. Nosotros (los docentes), ¿podemos calcular los resultados que entrega la calculadora? Es decir, dado un ángulo determinar el coseno y dado el valor del coseno de un ángulo determinar el ángulo.
¿En qué momento de la enseñanza de las razones trigonométricas se enseña el uso de la calculadora? ¿Se hace explícito por qué la utilizamos?

Bloque III: “Segunda definición: Seno de un ángulo. Relación entre seno y coseno de ángulos complementarios”

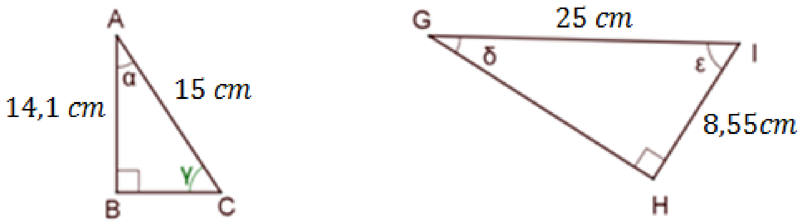
Se comenzará con el estudio de una actividad de la secuencia cuyo objetivo es crear buenas condiciones para definir el seno de un ángulo agudo.

Sexta actividad del taller

La actividad 9 está pensada de modo que permita generar las condiciones para que se pueda definir el seno de un ángulo. La tarea que tienen que realizar los chicos es diferente de lo que vienen haciendo hasta ahora ya que en este caso tienen que analizar una producción que no es propia.
¿De qué modo se ponen en juego las razones seno y coseno en las resoluciones de Estela y Adrián?
¿Qué se necesita discutir en el espacio colectivo para que luego se pueda definir el seno de un ángulo a partir de lo producido por los estudiantes?

Actividad 9 de la secuencia planificada:

En los triángulos ABC y GHI, $\overline{AB} = 14{,}1\ cm$, $\overline{AC} = 15\ cm$, $\overline{HI} = 8{,}55\ cm$ *y* $\overline{GI} = 25\ cm$.



Adrián y Estela no se ponen de acuerdo:

- *Adrián : "para mí, los ángulos* α *y* δ *no son iguales porque si calculás el* $\cos\alpha = \frac{14{,}1}{15} = 0{,}94$ *y si calculás* $\cos\delta = \frac{8{,}55}{25} = 0{,}342$*".*
- *Estela: "eso que decís no es correcto, porque como el* $\cos\alpha$ *es* $0{,}94$*, en la tabla ese ángulo es de 20º. Y la cuenta* $\frac{8{,}55}{25} = 0{,}342$ *es el coseno de* ε*, no de* δ*. Y en la tabla ese ángulo es de 70º. Si* $\varepsilon = 70°$ *entonces* $\delta = 20°$*.*
 α *y* δ *miden lo mismo".*

¿Cuál de los dos tienen razón? ¿Es cierto que α *y* δ *son iguales?*

Una nueva cuestión que pone en juego esta actividad es que a partir de una razón distinta a $\frac{cateto\ adyacente\ a\ \delta}{hipotenusa}$, precisamente mediante la razón $\frac{cateto\ opuesto\ a\ \delta}{hipotenusa}$, podría determinarse cuál es la amplitud del ángulo δ. Esto puede verse en palabras de Estela y tiene que ver con la posibilidad de determinar, mediante la tabla, su ángulo complementario. De esta manera, esta razón también permite caracterizar, de algún modo, al ángulo δ.
Posteriormente a la definición del seno, en la actividad 10, se propone analizar esta relación: *conociendo el coseno de un ángulo es posible conocer el seno del ángulo complementario.* Se comentará esta actividad a los participantes del taller.

Momento de síntesis

Como cierre del taller se reflexionará sobre el modo de abordar la definición de las razones trigonométricas en esta secuencia, de qué forma se va avanzando en ciertas "conjeturas provisorias", definiciones "incompletas" y cómo el trayecto realizado en las primeras actividades permite dar un sentido al concepto definido.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.

Benito, C., Lamela, C., Maciejowski, F. *Razones trigonométricas: relaciones invariantes entre los lados de triángulos rectángulos semejantes*. Material elaborado por la UNIPE para ENTRAMA, Proyecto de producción de materiales para la formación contínua en el marco del proyecto de "Mejora Educativa" del Ministerio de Educación de la Nación. Material en edición.

Boyer, C. (1999). La trigonometría y las técnicas de medición griegas. En *Historia de la matemática* (pp. 211-232). Madrid, España: Alianza Editorial.

Duarte, B. (2010). *Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en Matemática. La función exponencial, el razonamiento matemático y la intervención docente en la escuela*. Tesis doctoral. Universidad de San Andrés, Escuela de Educación.

Etchemendy, M., Zilberman, G. (2013). Hablar y escribir en la clase de matemática: interacciones entre alumnos y maestros. En Broitman, C. (comp.). *Matemáticas en la escuela primaria: saberes y conocimientos de niños y docentes*. Buenos Aires: Paidós

Itzcovich, H., Novembre, A., Carnelli, G., y Lamela, C. (2007). *Matemática 5 ES*. La Plata: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. Programa textos escolares para todos.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada. IPN-CICATA, México.

Napp, C., Novembre, A., Sadovsky, P., y Sessa, C. (2000). *La Formación de los Alumnos Como Estudiantes. Estudiar Matemática*. Documento elaborado dentro de la serie Apoyo a los Alumnos de Primer Año en los Inicios del Nivel Medio. Editado por el Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Secretaría de Educación – Dirección General de Planeamiento.

Proulx, J. (octubre, 2003). L'histoire de la trigonométrie comme outil de réflexion didactique. *Bulletin AMQ*, Vol XLIII (3), 13-27.

Quaranta, M.E., Wolman, S. (2003). Discusiones en la clase de matemática. Qué, para qué y cómo se discute. En Panizza, M. (comp.). *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas.* Buenos Aires: Paidós.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy: miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Sadovsky, P., Tarasow, P. (2013). Transformar ideas con ideas. El espacio de discusión en la clase de matemática. En Broitman, C. (comp.) *Matemáticas en la escuela primaria: saberes y conocimientos de niños y docentes*. Buenos Aires: Paidós.

Sadovsky, P.; Sessa, C.: (2000) Interacciones en la clase de matemática: interferencias no previstas para situaciones previstas. *Projeto-Revista de Educaçao*. Vol II.3, 7-11. Porto Alegre, Brasil.

Yackel, E. Cobb, P. (1996). Normas sociomatemáticas, argumentación y autonomía en matemática. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 27, No. 4,* 458-477.