

Universidad Nacional de La Pampa
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

**La matemática en las imágenes
médicas: Tomografía
Computarizada**

Monografía

Para la aprobación del seminario

Investigación matemática en el siglo XXI

Profesor: Dr. Pedro Willging

Autor

Romina Luciana Muñoz

Noviembre 2015

Introducción

La Tomografía Computarizada (TC) es uno de los avances tecnológicos más importantes utilizados en medicina para el diagnóstico de enfermedades. El objetivo de esta modalidad de imagen médica es lograr la visualización de la estructura interna del cuerpo humano sin transgredir en lo más mínimo su integridad, es decir, lograr una visualización no invasiva a partir de una reconstrucción, punto a punto, de la zona del cuerpo a examinar.

En esta monografía veremos que el papel de la matemática fue fundamental para el desarrollo de la TC. En 1917 el matemático Johann Radon demostró que es posible recuperar una función de dos variables cuando se conocen todas sus integrales de línea, es decir, se puede reconstruir la imagen de un objeto si se tiene de él la suficiente información en cada línea que lo cruza, entonces, lo que se busca es una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ conociendo sus integrales de línea en todas direcciones. En el caso de la tomografía la información necesaria para reconstruir la imagen se obtiene al hacer pasar rayos X a través del cuerpo, midiendo la atenuación que sufren al atravesar los diferentes tejidos.

Veremos cómo se reconstruye analíticamente esta función utilizando la transformada de Radon para lo cual, además, se requiere del teorema de la proyección de Fourier.

El fundamento matemático para la reconstrucción de imágenes existía gracias a Radon, pero no así los instrumentos necesarios, como el equipo de Rayos X y la máquina capaz de almacenar y tratar los datos obtenidos, para poder ponerlo en práctica.

Fue en la década de 1970 con el desarrollo computacional, que permitió el almacenamiento y tratamiento de una gran cantidad de datos, cuando los ingenieros electrónicos Cormack y Hounsfield utilizaron los resultados de Radon para la construcción del primer tomógrafo.

Tomografía Computarizada. Funcionamiento

Un escáner de Tomografía Computarizada consta de una estructura circular, denominada gantry, donde están contenidos una fuente de rayos X, para la generación de la radiación, y los detectores, para la medición de dicha radiación luego de atravesar al paciente, el cual se encuentra recostado en una cama que se mueve lentamente a través del gantry (Fig. 1, Fig. 2).

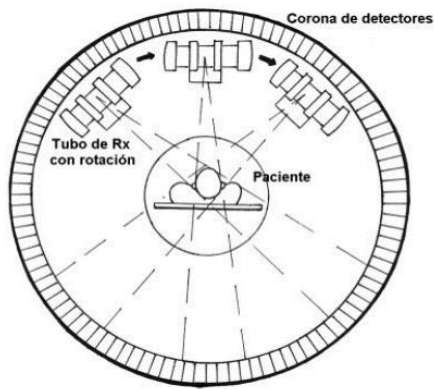


Figura 1.

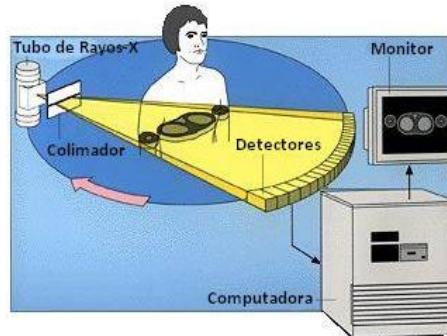


Figura 2.

La fuente de rayos se desliza por el gantry disparando haces angostos de rayos X cuya intensidad disminuirá al traspasar cada tejido del cuerpo (Fig. 1). La intensidad final del haz al salir del cuerpo es recolectada por los detectores, ubicados directamente al lado opuesto del tubo de rayos X, y esta información se transmite a una computadora. Cuando la fuente de rayos X completa una rotación, la computadora, haciendo uso de algoritmos basados en técnicas matemáticas, construye un corte de imagen 2D del paciente. Cuando se completó el primer corte, la cama se mueve hacia el gantry una cierta distancia y nuevamente se dispara un haz de rayos escaneando una nueva sección transversal, de la cual también se construye la imagen. Este proceso se repite hasta que se recolecta el número de cortes deseados (Fig.3).

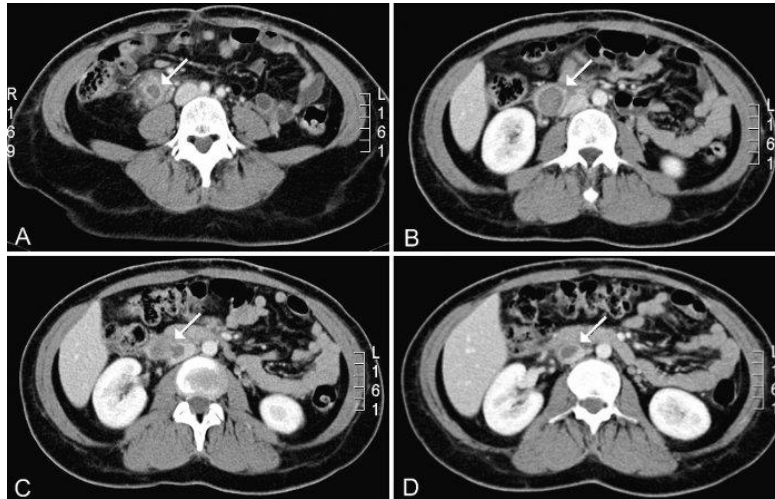


Figura 3. Tomografía computarizada de abdomen y pelvis, donde se tomaron cuatro cortes. Se observa un defecto de llenado en la vena ovárica derecha (A y B, flechas), con extensión a la vena cava inferior (C y D, flechas).

Cualquier objeto que es radiado, en este caso el cuerpo humano, absorbe parte de esa radiación. Esta absorción se cuantifica por medio de una función conocida como coeficiente de atenuación. Cada material tiene un coeficiente de atenuación característico determinado por sus propiedades físicas. La TC se basa en la reconstrucción de esta función a partir de sus proyecciones.

El principio básico en TC es que la reconstrucción de la estructura interna de un objeto se logra a partir de sus múltiples proyecciones. Este fue el problema que en 1917 resolvió J. Radon y que en 1966 el ingeniero electrónico Allan Cormack volvió a tratar y a “redescubrir” al intentar determinar la distribución de densidades de los distintos tejidos del cuerpo. Antes de la tomografía se utilizaba la radiografía para observar el interior del cuerpo. En ella también se utilizan los rayos X que son capaces de atravesar el tejido blando, como piel y músculo, mientras que son bastante atenuados por el tejido denso, como los huesos, razón por la cual dejan su “sombra” en ciertas películas. Así se tenía la posibilidad de observar los huesos sin tener acceso directo a ellos pero, sin embargo, las radiografías tenían sus limitaciones, entre las principales la incapacidad para determinar el detalle del tejido blando de un órgano. Fue éste el problema en el que Cormack se interesó y buscó solucionar.

En los procesos radiológicos se suponía que la radiación atravesaba material homogéneo, pero en realidad los diferentes tejidos tienen distinta densidad y por lo tanto esta técnica presentaba errores en los resultados. Cormack se planteó entonces el problema de determinar la densidad de un objeto a partir de la atenuación de los rayos que lo atravesaban dirigidos en distintas direcciones [1].

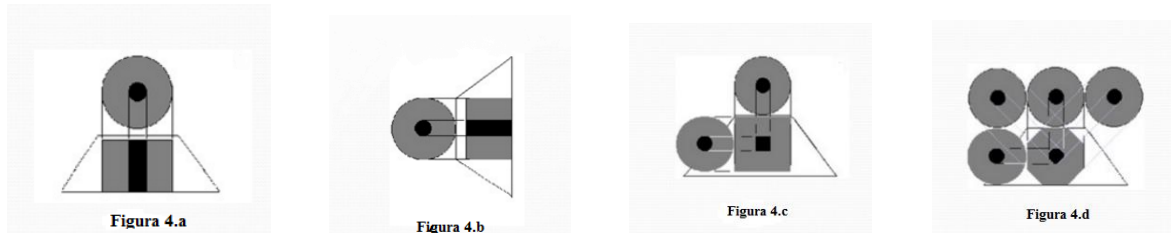
El problema trataba de determinar, en primer lugar, los niveles de atenuación de los rayos al atravesar una sección del cuerpo y en segundo lugar, con la información obtenida, reconstruir el objeto desconocido determinando su densidad en cada punto.

Era prácticamente el mismo problema que Radon había resuelto. Él estudió la transformación que relaciona a una función $f(x, y)$ de valores reales en una región determinada, con la integral de dicha función sobre una recta dada, es decir, con su integral de línea a lo largo de la recta. Este era un modelo muy apropiado para el problema de los rayos y sus atenuaciones, siendo la función $f(x, y)$ la función de coeficiente de atenuación y las rectas sobre las que se integra cada rayo proyectado. Así, con esta transformada, a la función de coeficiente de atenuación $f(x, y)$ del objeto se le asigna su integral a lo

largo de una recta L . Geométricamente cada una de estas integrales es una proyección del objeto en la dirección de la recta L .

Esta transformada, llamada transformada de Radon y que representamos con la letra \mathfrak{R} , es invertible. Por lo tanto, aplicando la transformada inversa a las proyecciones obtenemos la función $f(x, y)$ que describe al objeto desconocido, en nuestro caso, una sección transversal del cuerpo humano.

Una visualización básica de lo que hace la computadora para reconstruir la imagen es la siguiente.



En la figura 4.a se muestra una representación esquemática de un miembro, por ejemplo un brazo, y una de sus proyecciones (*tomando $\theta = 90^\circ$ respecto al eje horizontal*). El color negro representa una densidad alta, como la que tienen los huesos, y el color gris una densidad media, como la de los tejidos blandos, en este caso, el músculo. En la figura 4.b se muestra otra de sus proyecciones, con $\theta = 180^\circ$. La figura 4.c muestra lo que hace la computadora con cada una de las proyecciones obtenidas anteriormente. En ella vemos que ahora la “sombra” del hueso queda delimitada por un cuadrado, al agregar más proyecciones como en la figura 4.d, donde se dispone de cuatro proyecciones: 45° , 90° , 135° y 180° , la imagen obtenida empieza a semejarse al objeto real.

En el planteo del problema tendremos en cuenta los siguientes aspectos:

- Los rayos X viajan en líneas rectas y los haces son monocromáticos.
- Al interactuar con la materia los rayos X se atenúan, es decir, su intensidad decrece (excepto cuando interactúan con el aire).
- Cada material está caracterizado por su coeficiente de atenuación μ .
- La intensidad I de cada haz de rayos se atenúa de acuerdo con la ley de Beer:

$$\frac{dI}{ds} = -\mu I$$

donde ds es la longitud de arco de la trayectoria descrita por el haz. (Extraído de [5])

Veremos ahora como plantear matemáticamente el problema de reconstruir una imagen y una manera de solucionarlo.

Definiciones previas

1. Problema inverso

Los *problemas directos* son aquellos que tienen una orientación *causa-efecto*, es decir, se tiene información sobre las causas que describen un proceso y la solución nos conduce a “descubrir” el efecto de tales causas. Por ejemplo, el problema de calcular las ganancias de un capital invertido a una tasa de interés dada, después de una cantidad de años, es un problema directo.

Los *problemas inversos* son aquellos en los que se tiene una información parcial sobre los efectos o resultados producidos y se quiere conocer las causas que provocaron dichos efectos, estos problemas tienen orientación *efecto-causa*. El problema de calcular el número de años y la tasa de interés necesarios para acumular un capital determinado es un problema inverso. Algunos otros ejemplos son: el diagnóstico de una enfermedad a partir de los síntomas; hallar al asesino a partir de los datos de la víctima y de la escena del crimen.

La tomografía computarizada constituye un problema inverso ya que se busca determinar la distribución de densidades dentro del cuerpo humano a partir de las mediciones de los rayos X atenuados que lo atraviesan.

2. Coeficiente de atenuación lineal

El coeficiente de atenuación lineal μ refleja la habilidad de un material para absorber radiación y es directamente proporcional a la densidad del material. A medida que el coeficiente de atenuación μ del material aumenta, más blanco aparecerá éste en la imagen, debido a que ha absorbido una dosis alta de radiación. Los materiales con baja atenuación dejan pasar más rayos X a través de ellos y por eso se ven más negros en la imagen [3]. Los tejidos más densos absorben los rayos X, de manera que la película fotográfica queda inexpuesta en la zona correspondiente a los mismos. En cambio, en las zonas correspondientes a tejidos blandos, que no son capaces de absorber tal cantidad de rayos X, la película fotográfica queda totalmente expuesta a la radiación y por tanto adquiere el color negro. La ley de Beer, aplicada a la intensidad del rayo que viaja a lo largo de una recta L, establece que la relación entre la intensidad inicial I_0 y la intensidad I_1 recibida por el detector se calcula con la fórmula siguiente [2].

$$\frac{I_0}{I_1} = e^{\int_L \mu(x) dx}$$

3. Transformada de Fourier

Recordemos la definición de la transformada de Fourier y de su inversa, en una y dos dimensiones, de una función $f(\xi)$ y de una función $f(x, y)$ respectivamente.

Transformada de Fourier en una dimensión

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

y su inversa

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \xi} dx$$

Transformada de Fourier en dos dimensiones

$$\mathcal{F}f(s, u) = \hat{f}(s, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-2\pi i(sx+uy)} dx dy$$

y su inversa

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s, u)e^{2\pi i(sx+uy)} dx dy$$

4. Transformada de Radon

Dada una función continua f en el plano \mathbb{R}^2 y de soporte compacto y un vector $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^2$ con $|\omega| = 1$ que forma un ángulo θ con el eje horizontal, la integral de línea de la función f a lo largo de la recta $L(\theta, s)$, que es perpendicular a $\vec{\omega}$ y que está a una distancia s del origen (fig.5), será denotada por

$$\mathfrak{R}f(s, \theta) = \int_{L(\theta, s)} f(x, y) ds, \quad s \in \mathbb{R}, |\omega| = 1$$

donde identificamos al vector $\vec{\omega}$ con el ángulo θ que lo determina, por ello en la notación $\mathfrak{R}f(s, \theta)$ expresamos θ en lugar de $\vec{\omega}$ [4]. Esta integral de línea es lo que se define como la transformada de Radon de la función $f(x, y)$.

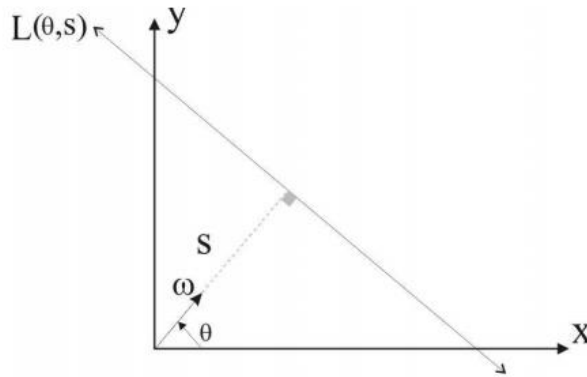


Figura 5.

La transformada de Radon transforma un sistema de coordenadas (x, y) en otro (s, u) que se obtiene rotando el sistema un ángulo θ .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix}$$

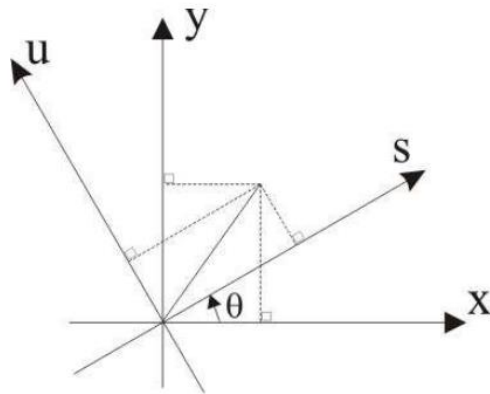


Figura 6.

Entonces podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right) = \mathfrak{R}f(s, \theta) = \int_{L(\theta, s)} f(x, y) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du$$

De aquí en adelante usaremos la notación $\mathcal{P}_\theta f(s) = \mathfrak{R}f(s, \theta)$

Obtención de las proyecciones

Supongamos que buscamos obtener la imagen de una sección transversal del cuerpo, a la cual dividimos en unidades de volumen llamadas vóxeles (fig. 7). A cada uno de estos vóxeles se le asignará la atenuación efectiva de los rayos al atravesarlo.

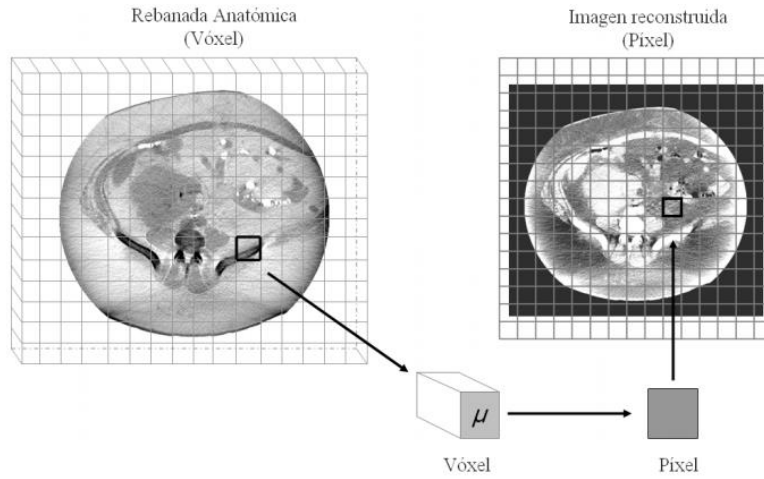


Figura 7.

Consideremos un rayo de intensidad inicial I_0 atravesando esta sección transversal a lo largo de una recta L , pasando por cada vóxel. La intensidad I_1 del rayo al alcanzar el detector depende de la distancia recorrida y de la atenuación $\mu(x)$ de cada punto de la trayectoria, atenuación que debe obedecer la ley de Beer:

$$I_1 = I_0 \cdot e^{-\int_L \mu(s) ds}$$

la cual se puede reescribir

$$p(s) = \ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right) = \int_L \mu(s) ds$$

lo cual se define como la proyección de la función μ a lo largo de la recta L .

Estas proyecciones $p(s, \theta)$ se guardan en una matriz llamada sinograma (fig. 8). Aquí θ es el ángulo que forma el haz de rayos X con el eje horizontal del sistema de coordenadas.

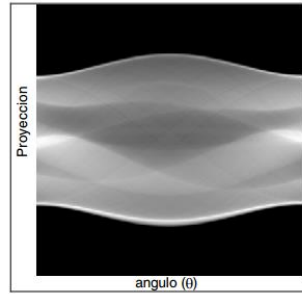


Figura 8. Sinograma

Una vez que se tiene esta matriz de proyecciones se aplican algoritmos con el objetivo de retroproyectar este sinograma para reconstruir la imagen. Este método conocido con el nombre de Retroproyección Filtrada se sigue aplicando hoy en día en TC debido a su rapidez [7].

Valor de píxel. Unidad de Hounsfield

Con este proceso a cada píxel, correspondiente a un vóxel dado, se le asigna un valor de información numérica representando un nivel de brillo y densidad. El valor numérico de cada píxel se denomina unidad de Hounsfield (UH) y se relaciona con el coeficiente de atenuación del tejido contenido en el vóxel correspondiente.

$$UH = \frac{\mu_{tejido} - \mu_{agua}}{\mu_{agua}} \cdot 1000 \text{ UH}$$

donde μ_{tejido} es el coeficiente de atenuación del rayo en el tejido que atraviesa, μ_{agua} es el coeficiente de atenuación de ese rayo en el agua y la constante 1000 es un factor de corrección [3].

El resultado de la reconstrucción de la imagen es una matriz de números (valores de UH) asignados a cada uno de los píxeles de la matriz. Cada uno de estos valores es convertido en un tono de gris para conformar la imagen reconstruida (fig.7).

Planteo matemático

Supongamos una sección transversal del cuerpo humano atravesada por un fino haz de rayos X de intensidad inicial I_0 . Sabemos que los distintos tejidos del cuerpo absorberán parte de la radiación, de acuerdo con un coeficiente de atenuación μ , disminuyendo la intensidad inicial del rayo [5].

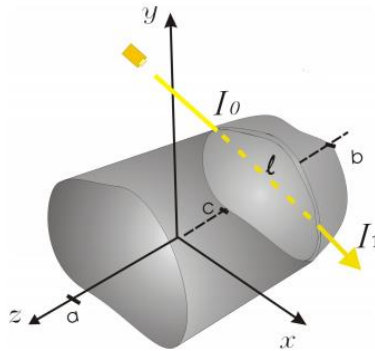


Figura 9.

Fijamos un sistema de coordenadas x, y, z como se muestra en la figura 9. El valor de cada píxel de la imagen generada será proporcional al valor del coeficiente de atenuación para el haz de rayos al atravesar el vóxel correspondiente a ese píxel. El coeficiente de atenuación de cada rebanada o corte transversal estará dado por

$$\mu_c(x, y) = \mu(x, y, c)$$

donde $c \in [a, b]$ es un valor fijo; $x, y \in \mathbb{R}$.

Denotamos $\mu_c(x, y) = f(x, y)$.

Al interactuar el haz de rayos X con la sección transversal su intensidad disminuirá satisfaciendo la ley de Beer

$$-dI = f(x, y)I ds$$

Denotando con L la trayectoria descrita por el haz y con I_0, I_1 su intensidad antes y después de atravesar el corte, separamos variables e integramos la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \frac{-dI}{I} &= f(x, y) ds \\ -\int_{I_0}^{I_1} \frac{dI}{I} &= \int_L f(x, y) ds \\ -(\ln I_1 - \ln I_0) &= \int_L f(x, y) ds + C \end{aligned}$$

$$\ln I_0 - \ln I_1 = \int_L f(x, y) ds$$

$$\ln \left(\frac{I_0}{I_1} \right) = \int_L f(x, y) ds$$

El miembro de la derecha en la última igualdad es lo que definió como la transformada de Radon, en este caso, de la función de coeficiente de atenuación f :

$$\mathfrak{R}\{f(x, y)\} = \int_L f(x, y) ds = \ln \left(\frac{I_0}{I_1} \right)$$

Tanto I_0 como I_1 son conocidos, el primero es la intensidad con la que parte el rayo y el segundo es la intensidad con la que llega a los detectores, donde es medida después de atravesar el cuerpo.

A la cantidad anterior Radon la denomino proyección de $f(x, y)$ a lo largo de la recta L y demostró que conociendo todas sus proyecciones es posible determinar la función f . Más precisamente, probó que si f es continua y de soporte compacto, entonces está determinada de manera única por todas sus proyecciones y dio una fórmula explícita para recobrar f .

El trabajo de Radon resuelve completamente el problema de la reconstrucción de la función, pero en la práctica es imposible conocer todas las proyecciones de f ya que no se pueden hacer infinitas mediciones debido a que una radiación excesiva sería dañina para el paciente. Por lo tanto, solo se dispone de un número finito de proyecciones de la función a partir de las cuales se la debe reconstruir. Es por ello que la imagen obtenida será una aproximación lo más fiel posible, pero una aproximación al fin, de la imagen real.

Este es el verdadero problema de la Tomografía Computarizada para el cual se han obtenido fórmulas que proporcionan aproximaciones óptimas de f en términos de ese número finito de proyecciones.

Resolución

Reconstrucción de imágenes

Hemos dicho que el problema de la reconstrucción de la imagen consiste en asignar la atenuación adecuada a cada vóxel dadas las proyecciones $\mathcal{P}_\theta f(s)$. Para esta asignación se pueden utilizar métodos analíticos o algebraicos. En este trabajo se desarrolla solo uno de los métodos analíticos: el Método de la Retroproyección Filtrada (Filtered Back Projection). En [4] se puede ver el desarrollo de un método algebraico.

Este método analítico de resolución se basa en la fórmula conocida como **Teorema de la proyección de Fourier**.

Método de la Retroproyección Filtrada

Tomamos la transformada de Fourier en una dimensión de una proyección y notaremos que es igual a una rebanada de la transformada de Fourier en dos dimensiones del objeto original.

Consideremos $\theta = 0^\circ$ en la ecuación de la proyección $\mathcal{P}_\theta f(s) = \mathfrak{R}f(s, \theta)$:

$$\mathcal{P}_0 f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos 0 - u \sin 0, s \sin 0 + u \cos 0) du$$

$$\mathcal{P}_0 f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, u) du$$

Ahora calculamos la transformada de Fourier bidimensional de la función $f(x, y)$ para el caso particular $u = 0$

$$\hat{f}(s, 0) = \mathcal{F}f(s, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(sx+0y)} dy dx$$

$$\hat{f}(s, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(sx)} dy dx$$

$$\hat{f}(s, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] e^{-2\pi i(sx)} dx$$

$$\hat{f}(s, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_0 f(x) e^{-2\pi i(sx)} dx$$

$$\hat{f}(s, 0) = \widehat{\mathcal{P}_0 f}(s)$$

Es decir, la transformada de Fourier bidimensional de f evaluada en el eje x se puede hallar integrando f en la recta vertical $L_{(0,s)}$ (proyectando f) y después calculando la transformada de Fourier unidimensional de la función resultante, finalmente podemos despejar f tomando transformadas inversas.

Generalizando decimos que $\hat{f}(s, \theta)$ (esto es la transformada de Fourier bidimensional de la función original f) evaluada en una recta que forma un ángulo θ con el eje x y que pasa por el origen debe coincidir siempre con $\widehat{\mathcal{P}_\theta f}(s)$, esto es, con la transformada unidimensional de Fourier de la proyección de f , y luego, por lo tanto, tomando transformadas inversas podemos despejar f .

Teorema de la proyección de Fourier

Sea $\mathcal{P}_\theta f(s)$ la integral de línea de f sobre la recta $L_{(\theta,s)}$ parametrizada de la siguiente manera

$$\begin{cases} x = s \cos \theta - u \sin \theta \\ y = s \sin \theta + u \cos \theta \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

Entonces para f suficientemente regular se tiene

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} |r| \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} dr d\theta$$

Para una demostración del teorema se puede consultar [4].

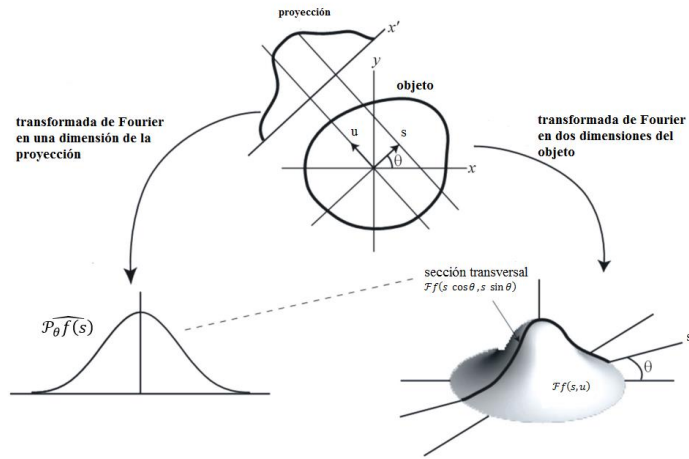


Figura 10. Teorema de la proyección de Fourier

El teorema de la proyección de Fourier afirma que la transformada unidimensional de Fourier de la proyección de la función $f(x, y)$, obtenida a partir de rayos que forman un ángulo θ con el eje x , es igual a una sección transversal de la transformada bidimensional de Fourier del objeto a lo largo de la línea recta que pasa por el origen formando un ángulo θ con el eje s .

La ecuación $f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |r| \mathcal{P}_\theta \widehat{f}(r) e^{2\pi i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} dr d\theta$, dada en el teorema de Fourier, es la principal ecuación empleada en el método de la retroproyección filtrada (*backprojected*), uno de los métodos analíticos más utilizados en los algoritmos para la reconstrucción de la imagen. Para más información sobre éste y otros métodos no mencionados en este trabajo se pueden consultar [2], [4], [9], [10].

Validación de los algoritmos

Para validar un algoritmo de reconstrucción la práctica usual consiste en realizar una simulación de reconstrucción por computadora, sobre imágenes artificiales, usando ese algoritmo propuesto. Estas imágenes se simulan superponiendo elipses y asignando a cada una de ellas diferentes coeficientes de atenuación. Se utilizan elipses porque su proyección puede calcularse exactamente (ver [12]), por lo tanto, si la imagen no puede ser reconstruida razonablemente mediante el algoritmo que se está probando, se tiene la certeza de que el fracaso no se debe a proyecciones defectuosas sino a un fallo en el algoritmo.

El modelo “Head Phantom” de Shepp-Logan es el más utilizado en el análisis de la precisión de los algoritmos de reconstrucción de imagen. En este modelo se proporciona una imagen, denominada *phantom*, que representa una cabeza humana basada en un conjunto de 10 elipses, simulando el cráneo, el cerebro, tumores, un hematoma y ventrículos.

Simulación con Octave

Podemos generar estos phantoms utilizando Octave. En primer lugar se generará una imagen patrón y luego se buscará reconstruirla a partir de sus proyecciones.

Para generar la imagen patrón de la cabeza usamos el programa *P.1*, obteniendo la siguiente imagen



Figura 11. Imagen patrón de una sección transversal de la cabeza

En ella se observa la simulación del cráneo, el cerebro, y otras características representados todos ellos con elipses.

Con el programa *P.2* se reconstruye la imagen anterior a partir de un número n de proyecciones.

Tomando 10 proyecciones para su reconstrucción obtenemos la siguiente imagen

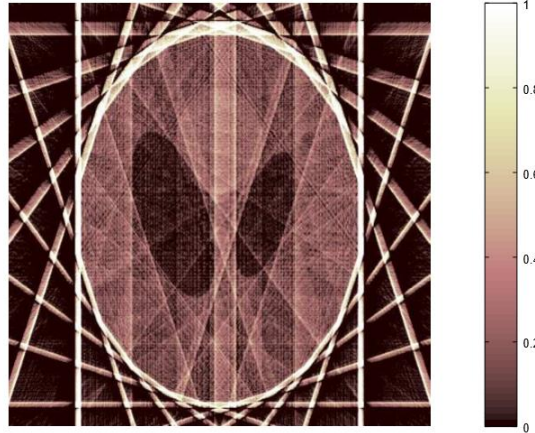


Figura 12. Reconstrucción de la imagen patrón a partir de 10 proyecciones

Tomando 15 proyecciones para su reconstrucción obtenemos la siguiente imagen

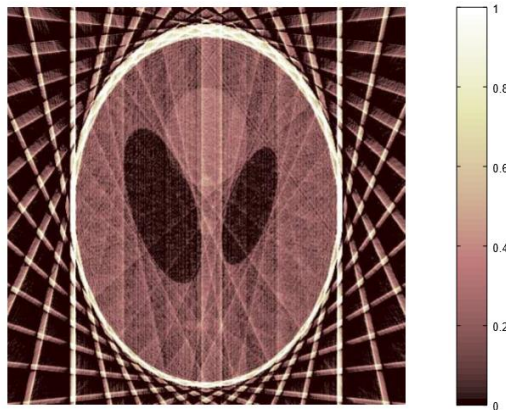


Figura 13. Reconstrucción de la imagen patrón a partir de 15 proyecciones

Tomando 30 proyecciones para su reconstrucción obtenemos la siguiente imagen

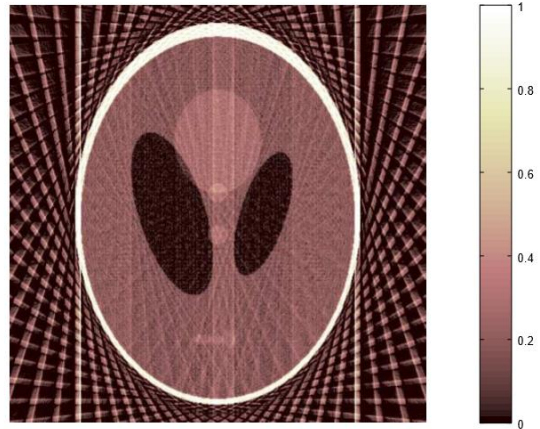


Figura 14. Reconstrucción de la imagen a partir de 30 proyecciones

Tomando 100 proyecciones para su reconstrucción obtenemos la siguiente imagen

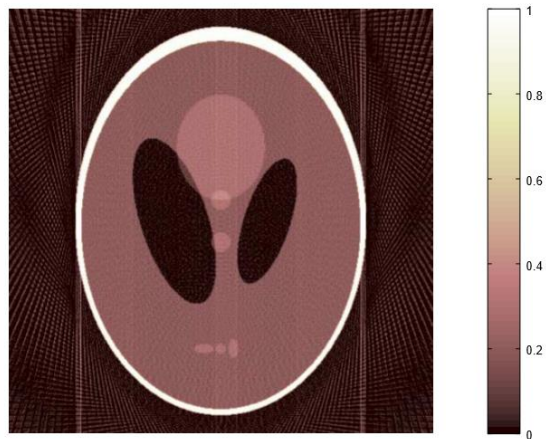


Figura 15. Reconstrucción de la imagen a partir de 100 proyecciones

Tomando 250 proyecciones para su reconstrucción obtenemos la siguiente imagen

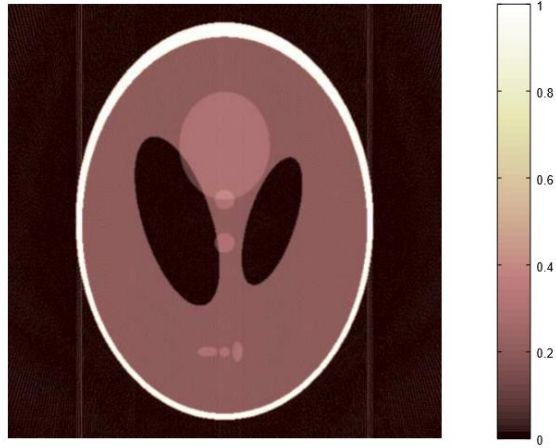


Figura 16. Reconstrucción de la imagen a partir de 250 proyecciones

Tomando 300 proyecciones para su reconstrucción obtenemos la siguiente imagen

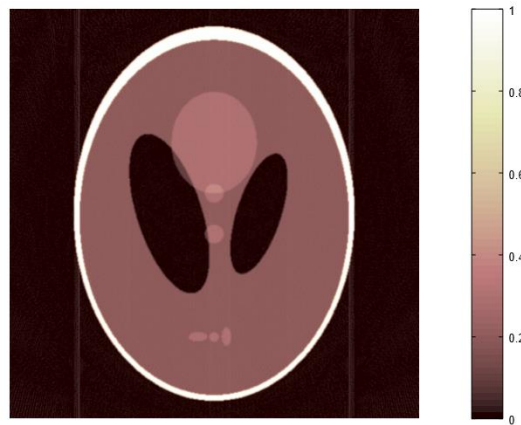


Figura 17. Reconstrucción de la imagen a partir de 300 proyecciones

Programa P.1 ¹

% El comando phantom genera la imagen patrón de una cabeza humana

```
X=phantom(512);
```

```
imshow(X);
```

```
colormap(pink);
```

%Se muestra la imagen formada por las 10 elipses representando una sección transversal de la cabeza

Programa P.2 ¹

%Reconstrucción de la imagen patrón usando N proyecciones

```
n=input('Ingrese el número de proyecciones:n= ');
```

```
h=180/n;
```

```
theta=[0:h:180];
```

```
[R,a]=radon(X,theta);
```

```
imshow(iradon(R,h));
```

```
colormap(pink);colorbar;
```

¹ Programa extraído de [4].

Conclusiones

Hemos visto cómo se puede resolver el problema inverso de recuperar una función en dos variables $f(x, y)$ conociendo todas sus integrales de línea, denominadas proyecciones, a partir de los resultados obtenidos en 1917 por Radon.

La solución al problema de reconstrucción de imágenes médicas, que resuelve la tomografía computarizada, se obtiene conociendo solo una cantidad finita de las proyecciones de la sección transversal estudiada, por lo tanto, la imagen recuperada es una aproximación de la imagen real.

En esta monografía se expuso uno de los métodos existentes para el tratamiento de este problema, a partir del cual se construye el algoritmo que finalmente entrega la imagen. Se mostró que este algoritmo de reconstrucción requiere de la utilización de diversas áreas de la matemática, como análisis de Fourier, álgebra lineal, trigonometría, y se desarrolló algunos de esos conceptos matemáticos empleados para la construcción del algoritmo.

Los diferentes algoritmos existentes presentan un pequeño grado de imprecisión, es por ello que se continúa trabajando en ellos, no solo para obtener imágenes cada vez más precisas y de alta calidad, sino también para disminuir el tiempo de su adquisición y para minimizar la dosis de radiación utilizada. En la actualidad también se trabaja con análisis multifractal sobre las imágenes médicas para optimizar la distinción entre los diferentes tejidos, se puede ver [13] para consultar sobre esto último.

Bibliografía

- [1] A. M. Cormack, *Early two dimensional reconstruction and recent topics stemming from it*. Nobel Lecture, (1979).
- [2] C. L. Epstein, *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*. Pearson Prentice Hall (2003).
- [3] J. C. Ramírez Giraldo, C. Arboleda Clavijo, C. H. McColloug, *Tomografía computarizada por rayos X: fundamentos y actualidad*. Revista Ingeniería Biomédica. Vol. 2 (2008), ISSN 1909-9762.
- [4] E. Chávez Ramírez, *Solución al problema inverso Tomografía Computarizada, Tratamiento numérico*. Tesis (2009). Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú.
- [5] I. Trejo Lorenzo, *Aspectos Matemáticos de la Tomografía Computarizada*. Tesis (2008). Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.
- [6] G. Kontaxakis, J. J. Vaquero, A. Santos, *Reconstrucción de imagen en tomografía por emisión de positrones*. Revista Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Vol. 96 (2002).
- [7] R. A. Isoardi, *Optimización de análisis y registración de imágenes tomográficas*. Tesis doctoral (2010). Centro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica, Argentina.
- [8] S. C. Bushong, *Manual de Radiología para Técnicos*. Harcourt (1998).
- [9] F. Natterer, F. Wübbeling, *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. SIAM (2001).
- [10] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*. SIAM (2001).
- [11] J. Radon, *Über die bestimmung von funktionen durch ihre intergralwerte langsgewisser mannigfaltigkeiten (On the determination of functions from their their integrals along certain manifolds)*, Berichte Saechsische Akademie der Wissenschaften (1917). Disponible en: http://people.csail.mit.edu/bkph/other/Radon_English_1917.pdf
- [12] S. Galindo Uribarri, *Principios Matemáticos de la Reconstrucción de Imágenes Tomográficas*, Ciencia Ergo Sum. Vol. 10. Universidad Autónoma del Estado de México (2004).
- [13] A. Silvetti, C. Delrieux, *Análisis Multifractal Aplicado a Imágenes Médicas*, Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica, UNS-CONICET (2010).