CB 37

ANÁLISIS DE LOS DIEZ PROBLEMAS DE APOLONIO UTILIZANDO EL PROGRAMA GEOGEBRA COMO RECURSO

Néstor Oscar Komarnicki & Jorge Reynaldo Bogado

Instituto Superior de Formación Docente N° 100 (Avellaneda)
Av. Belgrano N° 355 Avellaneda – P^{cia} de Buenos Aires - Argentina
Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Avellaneda
Av. Ramón Franco N° 5050 Villa Domínico – P^{cia} de Buenos Aires – Argentina
nkomarnicki@yahoo.com.ar

Palabras clave: Construcciones geométricas, Problemas, Informática, Práctica docente, Publicación.

RESUMEN
El proyecto surge del pedido expresado por estudiantes del Profesorado de Matemática del I. S. F. D. N° 100, sobre la necesidad de conocer la aplicación del programa informático GeoGebra incluido en las netbooks del Programa "Conectar Igualdad" y obtener conocimientos geométricos generales, puesto que la carga horaria reservada a estos contenidos en los diseños curriculares vigentes en la Provincia de Buenos Aires es limitada, lo que dificultaba a los practicantes enfrentar con éxito su enseñanza. El presente proyecto se llevó a cabo con los estudiantes de 3° y 4° del Profesorado de Matemática y se centró en una investigación referida a las construcciones geométricas con la aplicación del programa GeoGebra, con la finalidad de generar y publicar material de consulta. En esta presentación se ha elegido el tema de los problemas de Apolonio, para ejemplificar el abordaje de los distintos contenidos desarrollados.

INTRODUCCIÓN
Distintas líneas en la didáctica de la matemática, han buscado mejorar la enseñanza de este conocimiento, a través de la interpretación del proceso educativo implicado y el planteo de diferentes estrategias de trabajo. Sin embargo, debido posiblemente a la falta de articulación entre los saberes teóricos y la práctica docente, pareciera suceder que los docentes del área se encuentran, en un estado de desinterés o indefinición, frente a la necesidad de adoptar un marco teórico didáctico, que les permita mejorar su propia práctica. Teniendo en cuenta esta situación, la iniciativa fue la formación de un grupo de estudio y discusión, conformado por profesores y estudiantes del 3° y 4° año del Profesorado de Matemática del I.S.F.D. N° 100 (Avellaneda) con la finalidad de trabajar sobre distintos temas que hacen a la práctica docente del área, desde una perspectiva basada en la reflexión sobre la práctica, que permitiera efectuar tomas de decisiones con un criterio adecuado. Siendo el primer tema a tratar: el rol socio-cultural de la Matemática a través de los problemas que enfrentó en el desarrollo de su Historia, trabajo que culminó con la publicación del libro: *100 Problemas que cambiaron la Historia de la Matemática*. Dicha temática fue el punto de inicio, de una serie de proyectos destinados a pensar el rol del profesor de Matemática desde su función social y cultural. Este

informe hace referencia al segundo proyecto desarrollado durante los años 2011, 2012 y 2013 que tuvo como objetivos:

- Comparar las construcciones geométricas generadas a través de herramientas manuales e informáticas, indagando sobre las ventajas y desventajas de ambos procedimientos y su valor didáctico.
- Utilizar y valorar los conocimientos relacionados con la geometría, en la creación de estrategias didácticas y en el reconocimiento de su valor social y cultural, para la mejora de la enseñanza de la disciplina en el nivel medio.
- Comprender los aportes de la geometría al mundo tecnológico, a la reflexión científica y al mundo artístico, como producto cultural que permiten la interpretación de la realidad para su transformación.
- Utilizar programas informáticos matemáticos para representar información, simular situaciones y comunicar resultados.

Objetivos del mini proyecto "Los diez problemas de Apolonio"

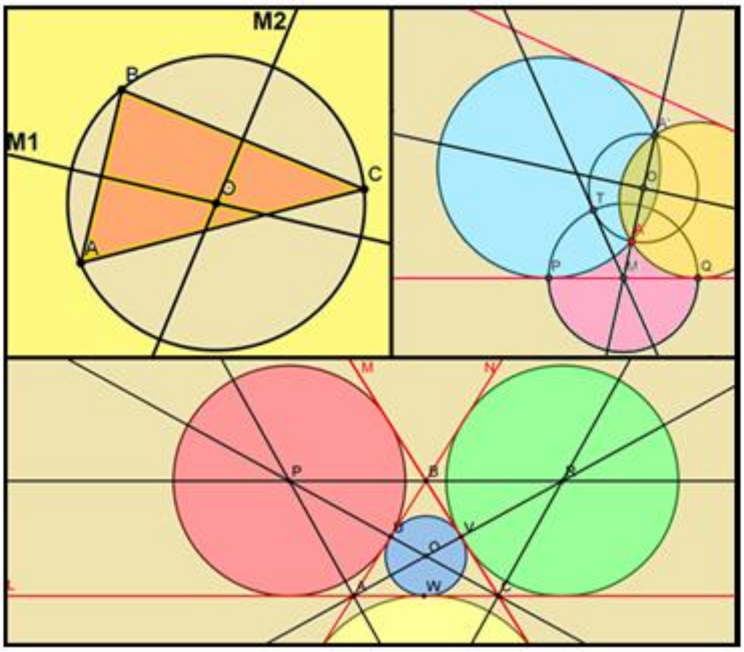
Enmarcado en el segundo proyecto denominado *100 construcciones geométricas con herramientas manuales e informáticas*, un grupo de cinco estudiantes conformado por Erika Altamirano, Melanie Cejas, Deborah Macri, María Luz Pereira y Viviana Pogonza, quienes fueron supervisadas por el Prof. Néstor Komarnicki dentro del espacio curricular *Historia de la Matemática*, se encargaron de investigar los problemas de tangencia de Apolonio, siendo los objetivos de referencia para el tratamiento de este tema los siguientes:

- Indagar en textos antiguos y modernos (incluyendo Internet), sobre las construcciones geométricas asociadas a los Problemas de tangencia de Apolonio.
- Verificar la viabilidad de dichas construcciones utilizando el programa GeoGebra.
- Seleccionar algunas de las construcciones para ser reproducidas con instrumentos manuales, a fin de comparar las ventajas y desventajas de ambos procedimientos.
- Corregir y mejorar, en caso de ser posible, los procedimientos de construcciones geométricas encontrados en fuentes bibliográficas y en Internet.
- Alcanzar coherencia en los procedimientos y en la nomenclatura de los elementos geométricos utilizados, dentro del tema y en relación a los otros temas seleccionados en proyecto general.
- Reflexionar sobre el concepto de tangencia en el desarrollo histórico de la matemática y en la aplicación práctica en el escenario escolar del nivel medio.

MARCO DE REFERENCIA DEL TRABAJO DESARROLLADO

La Geometría en el nivel medio parece ocupar un rol secundario detrás del álgebra y la geometría analítica, en esta posición no parece constituirse en un conocimiento significativo, y por lo tanto, a los estudiantes se les dificultaría desarrollar un pensamiento matemático que les permita afrontar con éxito las exigencias del mundo actual, puesto que se verían privados de importantes saberes que hacen referencia directa a la interpretación de la realidad. Nuestra afirmación se basa en las posturas didácticas de Julio Rey Pastor, Luis Santaló, Miguel de Guzmán, entre otros, quienes vieron a la geometría como una parte integral y fundamental de la matemática. Dentro de estos conocimientos, las construcciones geométricas brindarían el sustento necesario para la comprensión de complejos conocimientos abstractos, como históricamente la geometría sintética preparó el camino para la llegada del álgebra y la geometría analítica.

La utilización del programa GeoGebra, permite lograr construcciones geométricas precisas, reconociendo e investigando interactivamente las características y propiedades de distintos entes geométricos. Pero además, no es menos significativo su aporte estético en la generación y presentación de los resultados. Lograr una buena presentación también produce un efecto de satisfacción y orgullo por parte del/de la estudiante, además de ayudar a crear un mejor vínculo entre el/la estudiante y el conocimiento matemático. La creatividad es un elemento casi olvidado en la enseñanza de la matemática del nivel medio y superior, solo suele aparecer en forma tibia en la resolución de problemas, pero es necesario que también se encuentre presente en cada tema que se trabaje dentro del área, para esto deberíamos tener en cuenta que la búsqueda del valor estético es un punto clave para entrar en el terreno de creatividad.



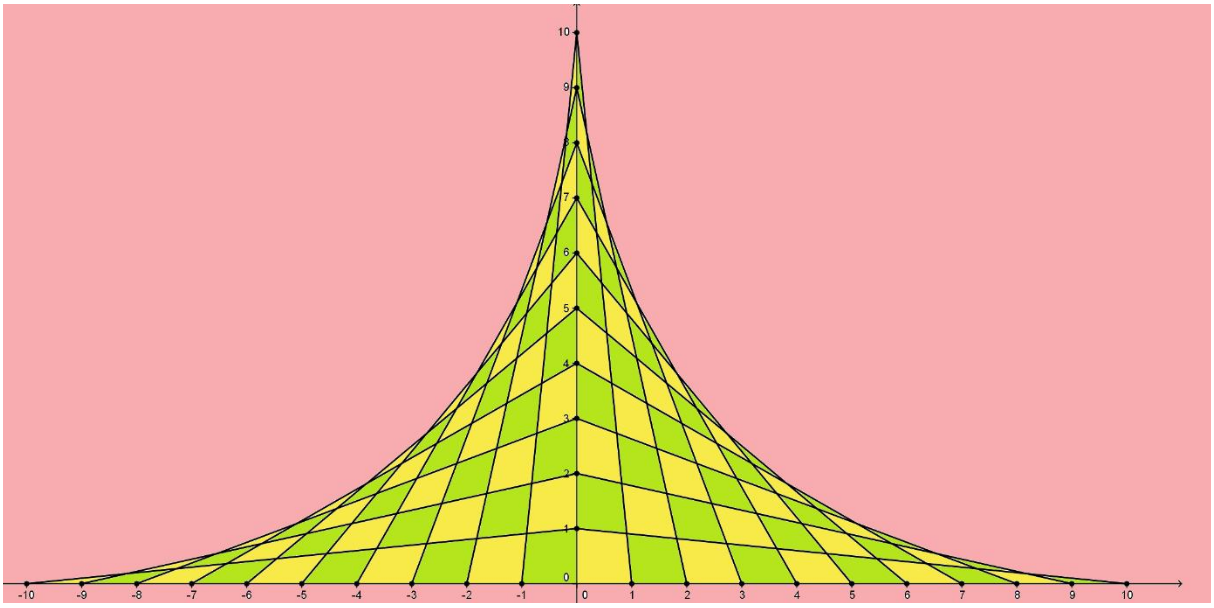
Las construcciones geométricas, como las que observamos en la figura anterior, tienen un valor estético que enriquece su valor matemático.

¿Qué aportan las construcciones geométricas en la enseñanza de la matemática?

Históricamente las construcciones geométricas fueron parte fundamental de la matemática, los antiguos egipcios la utilizaban para medir terrenos y los griegos plantearon, haciendo base en ellas, los famosos problemas de la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo agudo, la duplicación del cubo y la división del círculo. Para estos problemas clásicos la dificultad se hallaba en que solo se podía utilizar una regla no graduada y el compás, para su resolución. Por siglos la matemática se afirmó en estas construcciones y en el libro *Elementos* de Euclides, tal es así que los problemas que hoy se resuelven mediante ecuaciones, solían enfrentarse mediante el auxilio de la geometría, hasta que el álgebra hizo su aparición primero durante la Edad Media en el mundo musulmán y luego en el Renacimiento italiano.

En Argentina las construcciones geométricas formaron parte de la enseñanza secundaria común hasta las décadas del '60 y del 70', cuando por influencia de las didácticas basadas en la matemática moderna empezaron a desaparecer de los textos escolares y del currículo oficial. Hasta hace unos pocos años atrás, todos estos conocimientos se redujeron a una eventual construcción relacionada con la regla del paralelogramo en el área de Física y por último la aparición de la llamada Física conceptual daría la despedida, por ahora definitiva, de estos saberes en el nivel medio.

En la actualidad, paralelamente a esta desaparición forzada, los estudiantes suelen realizar dibujos espontáneos que involucran conocimientos en el área de las construcciones como el siguiente, en donde se manifiesta una atracción hacia las formas simples que determinan, a través de un procedimiento adecuado, estructuras más complejas.



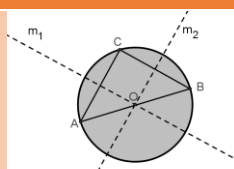
Recreación de un dibujo estudiantil realizado en forma espontánea en el desarrollo de las clases, mientras los adolescentes enfrentan ejercicios combinados o resoluciones de ecuaciones.

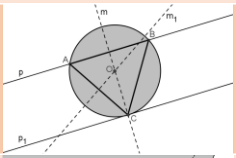
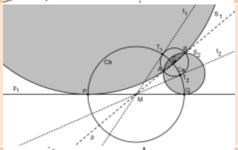
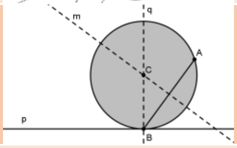
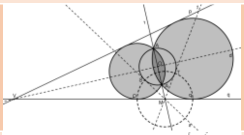
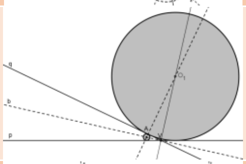
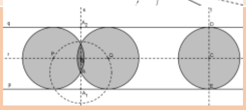
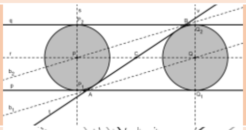
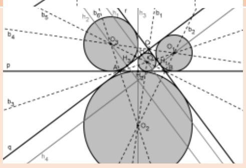
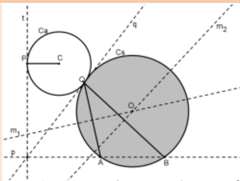
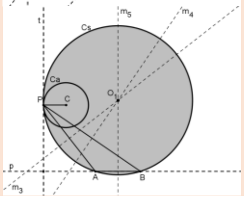
Cada construcción geométrica abre un mundo de posibilidades de discusión y de reflexión porque son parte de la cultura viva de la Humanidad. Para ejemplificar sobre este punto se puede tener como referencia los siguientes problemas geométricos.

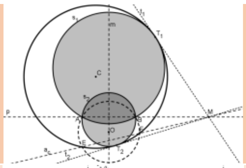
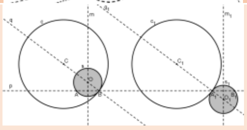
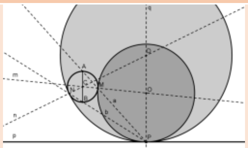
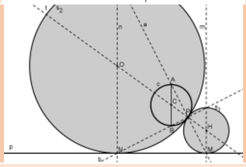
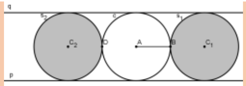
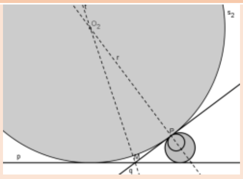
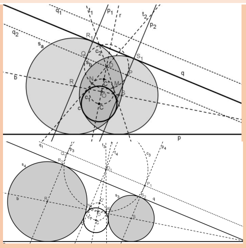
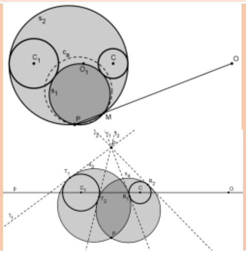
Descripción breve de los diez problemas de Apolonio

Apolonio de Perga (262 – 190 a.C.) es célebre por su trabajo sobre las cónicas, pero también escribió un tratado sobre Tangencias. En esta obra, describe el problema que hoy es conocido como Problema de Apolonio: *"Dados tres objetos tales que cada uno de ellos puede ser un punto, una recta o una circunferencia, dibujar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados".*

En el siguiente cuadro pueden observarse los enunciados de los diez problemas que se desprenden del problema principal con sus variantes y la construcción geométrica definitiva utilizada en la publicación del libro *100 Construcciones Geométricas con Herramientas Manuales e Informáticas*, elegida en función de alcanzar una mejor visualización y coherencia con el resto las construcciones.

Problema	Enunciado del Problema	Construcción geométrica
1	**Trazado de la circunferencia que pasa por tres puntos**	

2	**Trazado de la circunferencia tangente a dos puntos y una recta**	
	Caso 1: Los dos puntos dados A y B se encuentran en la recta p, paralela a la recta p_1	
	Caso 2: La recta a la que pertenecen los puntos A y B no es paralela a la recta p_1	
	Caso 3: Cuando uno de los puntos está sobre la recta p	
3	**Trazado de la circunferencia tangente a un punto y dos rectas**	
	Caso 1: Las rectas se cortan y el punto se encuentra entre ellas	
	Caso 2: El punto dado se encuentra en una de las rectas dadas	
	Caso 3: El punto A está comprendido entre dos rectas paralelas p y q.	
4	**Trazado de la circunferencia tangente a 3 rectas.**	
	Caso 1: Siendo dos de las rectas paralelas.	
	Caso 2: Las tres rectas se intersecan entre sí formando un triángulo	
5	**Trazado de la circunferencia tangente a una circunferencia y dos puntos**	
	Caso 1: Los puntos A y B son exteriores a la circunferencia dada	 

	Caso 2: Si los puntos A y B son interiores a la circunferencia dada	
	Caso 3: Si uno de los puntos está en la circunferencia dada y el otro punto es exterior (o interior) a dicha circunferencia	
6	**Trazado de la circunferencia tangente a una circunferencia, una recta y un punto**	
	Caso 1: El punto P está en la recta p dada	
	Caso 2: El punto P está en la circunferencia c dada	
7	**Trazado de la circunferencia tangente a una circunferencia y dos rectas**	
	Caso 1: Cuando las rectas p y q son paralelas y la circunferencia c es tangente a las dos rectas	
	Caso 2: La circunferencia c dada es tangente a una de las rectas	
	Caso 3: La circunferencia c está comprendida entre dos rectas p y q no paralelas entre sí y no es tangente a las mismas	
8	**Trazado de la circunferencia tangente a dos circunferencias y un punto**	
	Caso 1: Cuando el punto P es exterior a ambas circunferencias	

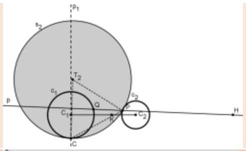
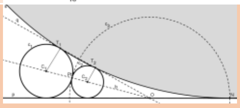
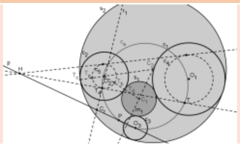
	Caso 2: Cuando el punto P se encuentra en una de las circunferencias	
9	**Trazado de la circunferencia tangente a dos circunferencias y una recta p**	
10	**Trazado de la circunferencia tangente a tres circunferencias dadas**	

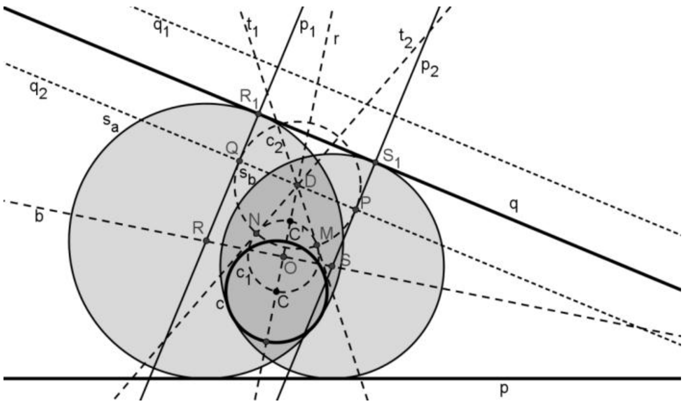
Tabla correspondiente a los diez problemas de que se desprenden del problema general y sus construcciones asociadas.

En el siguiente apartado se da un ejemplo de cómo se describió una construcción geométrica en el trabajo de referencia.

Problema 7 - Trazado de la circunferencia tangente a una circunferencia y dos rectas

Caso 3: La circunferencia c está comprendida entre dos rectas p y q no paralelas entre sí y no es tangente a las mismas

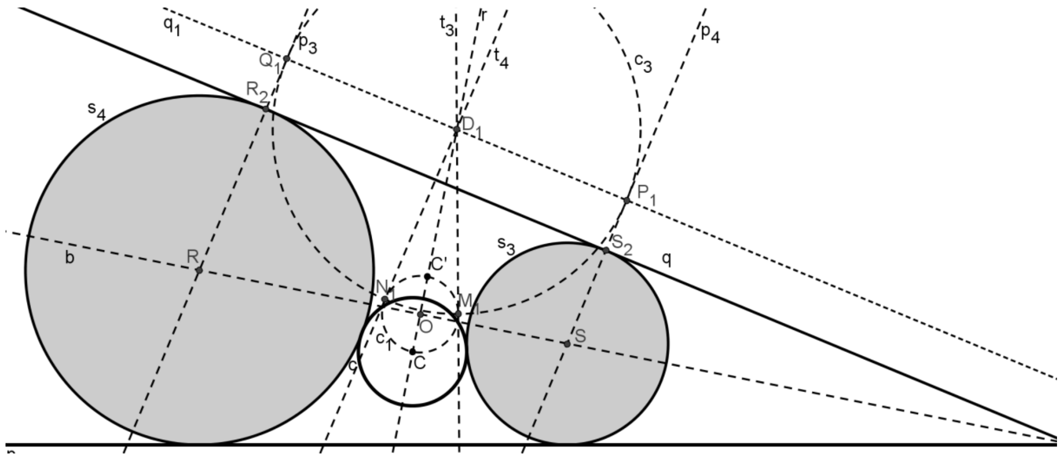
1. A ambos lados de la recta q construimos dos rectas paralelas q_1 y q_2, a una distancia igual a la del radio de la circunferencia dada.
2. Hallar la recta b bisectriz del ángulo formado por las rectas p y q, y el punto simétrico C' del centro C respecto de b.
3. Trazar la recta c que pasa por los puntos C y C', marcar el punto D en el lugar donde se intersecan las rectas r y q_2, y el punto O donde se intersecan las rectas b y r.
4. Trazar la circunferencia c_1 con centro en el punto O y radio $\overline{OC}$. Luego trazar las rectas t_1 y t_2 tangentes a esta circunferencia respecto al punto D, marcando los puntos de tangencia M y N.
5. Trazar la circunferencia c_2 con centro en el punto D y radio $\overline{DN}$.
6. Hallar los puntos P y Q, lugares donde se interseca la recta q_2 con la circunferencia c_2.
7. Trazar las rectas perpendiculares p_1 y p_2 a la recta q_2, que pasan por los puntos P y Q respectivamente.
8. Marcar el punto R en el lugar donde se intersecan las rectas p_1 y la b, y el punto S en el lugar donde se intersecan las rectas p_2 y la b.
9. Los puntos R y S son los centros de las circunferencias buscadas cuyos radios son $\overline{RR_1}$ y $\overline{SS_1}$.



Obtención de las dos primeras soluciones del problema 7

A continuación mostramos como obtener las otras dos soluciones del problema (circunferencias s_3 y s_4).

1. Conservamos, además de las rectas y circunferencia dadas, las rectas: q_1, b, O
2. y r, los puntos C y C', y la circunferencia c_1.
3. Marcamos el punto D_1 en el lugar donde se intersecan las rectas r y q_1.
4. Trazamos las rectas tangentes t_3 y t_4 a la circunferencia c_1 respecto al punto
5. D_1, marcando los puntos de tangencia M_1 y N_1.
6. Trazar la circunferencia c_3 con centro en el punto D_1 y radio $\overline{D_1N_1}$.
7. Hallar los puntos P_1 y Q_1, lugares donde se interseca la recta q_1 con la circunferencia c_3.
8. Trazar las rectas perpendiculares p_3 y p_4 a la recta q_2, que pasan por los puntos Q_1 y P_1 respectivamente.
9. Marcar el punto R en el lugar donde se intersecan las rectas p_3 y la b, y el punto S en el lugar donde se intersecan las rectas p_4 y la b.
10. Los puntos R y S son los centros de las otras circunferencias buscadas cuyos radios son $\overline{RR_2}$ y $\overline{SS_2}$.



Obtención de las soluciones faltantes del problema 7

Algunos de los conocimientos necesarios para la resolución de los problemas.

- Tangencia de una circunferencia a puntos, rectas y otras circunferencias.
- Rectas paralelas y perpendiculares.
- Bisectriz de un ángulo.
- Incentro y circuncentro de un triángulo.
- Punto medio y mediatriz de un segmento.
- Equidistancia.
- Homotecia y puntos de homotecias.
- Eje radical y centro radical entre dos circunferencias.

Además, se pueden trabajar otros conocimientos geométricos asociados con los problemas, como: *Por tres puntos no alineados puede trazarse una única circunferencia* y con saberes heurísticos generales como *un problema puede no tener solución, puede tener una, varias o infinitas*, en el caso del décimo problema se puede llegar a encontrar ocho soluciones. En la escuela media, el trabajo centrado en una escasa variedad de problemas hace que las/os estudiantes lleguen a creer que todo problema tiene una solución y que esta es única.

ETAPAS Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Los pasos seguidos para realizar el trabajo de investigación fueron:

1. Planteo del problema por parte de los estudiantes del Profesorado de Matemática quienes necesitaban aplicar el programa GeoGebra y enseñar contenidos geométricos en sus prácticas docentes, en abril del 2011.
2. Consulta a los profesores Alberto Guzzetti (UTN - FRA) y Camilo Díaz (Ex Director del I.S.F.D. y T. N° 24 – Quilmes – P^{cia} Buenos Aires) ambos ex integrantes del grupo de Matemática en el Programa ProCiencia del Conicet y a los profesores del I.S.F.D. N° 100 (Avellaneda – P^{cia} Buenos Aires) Guido Drassich y Alejandro Montenegro, quienes ayudaron a seleccionar el grupo de construcciones geométricas que sería necesario trabajar, en abril del 2011.
3. Distribución de los once temas seleccionados (construcciones básicas, triángulos, polígonos, irracionales, cónicas, desarrollos de cuerpos, mosaicos, rompecabezas, **problemas de Apolonio**, curvas mecánicas y trigonometría) a once grupos de estudiantes del 3° y 4° año de matemática, que serían trabajados en el espacio de las asignaturas Historia de la Matemática y Metodología de la Investigación Educativa en Matemática, en mayo del 2011.
4. Investigación de fuentes bibliográficas y de Internet por parte de los grupos. En particular fue difícil el trabajo sobre los problemas de Apolonio, por encontrar pocos libros que hicieran referencia al tema y por ubicar muchas páginas de Internet que en realidad repetían un mismo texto, cuyo contenido, a pesar de ser valioso, contenía demasiados errores. En esta parte del trabajo hubo que repetir las construcciones varias veces hasta encontrar la lógica encerrada en el procedimiento que llevará a una respuesta correcta. De mayo a agosto del 2011.
5. Presentación del primer borrador grupal, corrección y devolución, en setiembre y octubre del 2011.
6. Presentación del borrador final realizado por cada grupo, en noviembre del 2011.
7. Primera compaginación del trabajo en formato digital, incorporación de anexos en algunos capítulos, realización del prólogo, corrección general y envío de la versión digital a los estudiantes que participaron en el proyecto. De diciembre del 2011 a marzo del 2012.
8. Corrección grupal por parte de los estudiantes de los capítulos en formato papel, en abril y mayo del 2012.
9. Elección de una forma de presentación adecuada para todas las construcciones y nueva realización de las construcciones. De abril a agosto del 2012.
10. Reelaboración total de los capítulos referidos a triángulos y a trigonometría. De setiembre a diciembre del 2012.
11. Corrección general del trabajo general y preparación del borrador para publicar por parte del coordinador del proyecto. Consulta a la Prof. Margarita Rodríguez para mejorar el texto del prólogo. De enero a abril del 2013.
12. Búsqueda de presupuesto para la publicación. De mayo a julio del 2013.
13. Corrección de las pruebas de galera, en agosto y setiembre del 2013.
14. Publicación del libro en octubre del 2013.
15. Presentación del libro en el Congreso Latinoamericano de GeoGebra llevado a cabo en la ciudad de Presidencia Roque Sáenz Peña - P^{cia} del Chaco por la Universidad Nacional del Chaco Austral en noviembre del 2013.

CONCLUSIÓN

El trabajo en equipo realizado en los dos proyectos mencionados, lleva a pensar las asignaturas como espacios de investigación, rompiendo el esquema del triángulo didáctico (cuyos vértices son: docente, saber y estudiante) y proponiendo por este camino, la interacción con otros estudiantes y docentes, posibilita abrir el debate. Si bien cada profesor debe poseer los conocimientos necesarios para llevar adelante su propuesta, en la práctica al indagar en nuevos terrenos, se coloca también en actitud de investigador y como tal, se permite estar en un espacio intermedio entre el conocer y el desconocer. El docente que se conecta con su propio desconocimiento, con actitud de enfrentarlo, compartiendo sus dudas con colegas, investigando y aprendiendo, mejora su capacidad de enseñar y seguir aprendiendo.

Se suele Entender que las clases funcionan como compartimentos estancos, todo lo que sucede en el aula termina en el aula, y los docentes buscan solo compartir éxitos, a la vez que esconden sus fracasos. El trabajo en equipo, muestra los aciertos y los errores, permitiendo un mejor aprovechamiento de los primeros y creando caminos de solución para los segundos. La visión del docente dueño y señor de su cátedra, debe finalizar con una forma nueva de recrear la práctica, en función de los nuevos requerimientos de conocimientos específicos, la aplicación de nuevas tecnologías y de la reflexión sobre la práctica.

En el presente informe, se ha buscado mostrar como los problemas de Apolonio y otros temas geométricos, han servido para conformar un grupo de trabajo destinado a construir su propio conocimiento y compartir los resultados alcanzados.

REFERENCIAS

- Cabrera, E. S. & Medici, J. D. (1947). *Geometría Analítica*. Librería del Colegio. Buenos Aires.
- Guzmán Ozámiz, M. (1994). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. Universidad Complutense de Madrid. Madrid.
- Kasner, E. Y Newman, J. (1985). *Matemáticas e Imaginación.* (Hyspamérica. Buenos Aires.
- Komarnicki, N., Montenegro, A., Rodríguez, L. & Drassich, G. (2012). *100 Problemas que cambiaron la historia de la matemática* (Dunken. Buenos Aires).
- Komarnicki, N. & Colaboradores. (2013). *100 Construcciones Geométricas con Herramientas Manuales e Informáticas.* Dunken. Buenos Aires.
- Kraitchik, M. (1946). *Matemáticas recreativas*. El Ateneo. Buenos Aires.
- Ortega Y Sala, M. (1914). *Geometría – Tomo I – Parte elemental.* Librería de los Sucesores de Hernando. Madrid.
- Pozo Municio, J. & Otros. (1994). *La solución de problemas.* Santillana. Madrid.
- Puig, L. (1992). *Aprender a resolver problemas, aprender resolviendo problemas* Universidad de Valencia, Departamento de Didáctica de la Matemática. Barcelona.
- Rey Pastor, J. & Puig, A. (1965). *Geometría racional - Tomo I – Geometría Plana.* Colección Didáctica Elemental – Madrid.