CB 36

HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE UN MARCO DE REFERENCIA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS: UN ESTUDIO ONTO-SEMIÓTICO A LA PRÁCTICA DE LAGRANGE

Silvia Etchegaray & Claudina Canter
Universidad Nacional de Río cuarto
setchegaray@exa.unrc.edu.ar, ccanter@exa.unrc.edu.ar

Palabras Clave: Estructuras Algebraicas, EOS , Lagrange, Configuración epistémica.

RESUMEN

En la primera parte de este trabajo presentamos algunos estudios sobre los diferentes niveles de algebrización en los que, se propone, deberían transitar los futuros docentes y desde este lugar delimitamos y caracterizamos el problema de la formación de Profesores en Matemática respecto al significado de las estructuras algebraicas. En este sentido, en la segunda parte se estudian los aspectos más relevantes de la práctica innovadora realizada por Lagrange en el proceso de construcción de la Teoría Algebraica de ecuaciones utilizando herramientas conceptuales y metodológicas del EOS. Por último, se sintetiza la complejidad onto-semiótica de las prácticas que conforman la génesis de la construcción de las estructuras algebraicas y se proponen algunos criterios a tener en cuenta para la construcción de tipos de tareas epistémicamente idóneas para la formación de profesores.

INTRODUCCIÓN

El diseño de propuestas áulicas tendientes a promover el aprendizaje significativo por parte de los alumnos de los distintos niveles educativos es uno de los objetivos que se plantean en el seno de la Didáctica de la Matemática. Un indicador del interés en este tema puede observarse tanto en las publicaciones-revistas internacionales (Journal of Mathematics Teacher Education, Revista Electrónica Conrado, Revista aula, Revista cielo, entre otras) como en las producciones que se socializan en los congresos o reuniones de Educación matemática.

Una de las áreas donde se está trabajando acerca del diseño de tareas, es el álgebra. En este sentido, desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) realizaron una investigación en la cual determinaron distintos niveles de algebrización que consideran necesarios a transitar en la formación inicial del profesor para la enseñanza primaria. Los autores antes mencionados sostienen que una práctica matemática se considera algebraica si pone en funcionamiento cierto tipo de objetos y procesos, denominados “algebraicos”. Se consideran objetos algebraicos a: relaciones binarias —de equivalencia o de orden— y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o antisimétrica), operaciones y sus propiedades, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos (números, transformaciones geométricas, etc.), funciones y estructuras, sus tipos y propiedades (semigrupo, monoide, semimódulo, grupo, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc.).

Consideramos importante que en la formación inicial de profesores de matemática se promueva el tránsito y la reflexión por los niveles de algebrización antes mencionados y se profundice el estudio sobre nuevos niveles de algebrización que atrapen la complejidad de la construcción de las estructuras algebraicas. Para que esto sea posible es necesario que se diseñen tareas idóneas para cada uno de los mencionados niveles y se amplíen los marcos de referencia institucional que den cuenta de la complejidad onto-semiótica de los sistemas de prácticas algebraicas que ponen al descubierto las configuraciones y procesos necesarios para la emergencia de las estructuras (grupo, anillo, modulo, cuerpos etc.) .

El Profesorado de Matemática de la Universidad Nacional de Río Cuarto tiene en su currículo justamente a la asignatura "Estructuras Algebraicas", la cual entre sus objetivos plantea promover la comprensión de la esencia del razonamiento estructural: estudiar relaciones y "propiedades de propiedades" de los elementos de un conjunto. Para lograr el objetivo mencionado es imprescindible formular situaciones con alta idoneidad epistémica que permitan ser diseñadas, implementadas y evaluadas en las clases ordinarias.

En el marco del EOS, la idoneidad epistémica es uno de los componentes de la idoneidad didáctica definida por Godino, Batanero y Font (2007). La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes: Idoneidad epistémica, Idoneidad cognitiva, Idoneidad interaccional, Idoneidad mediacional, idoneidad afectiva e Idoneidad ecológica. (Figura 1)

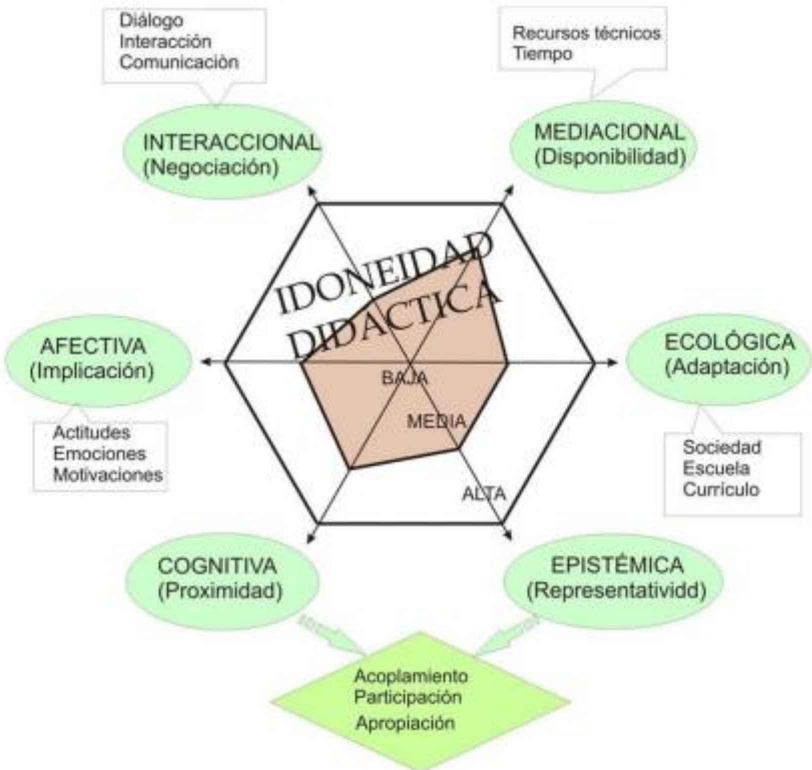

Figura 1: Idoneidad Didáctica (extraída de Godino, 2011).

La idoneidad epistémica se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. En este trabajo se avanza en post de constituir un significado de referencia para más tarde poder diseñar y analizar tareas que ayuden al desarrollo y comprensión de nuevos niveles de algebrización del conocimiento matemático.

Al respecto Etchegaray (2010), dice que si analizamos, desde esta perspectiva (analizando prácticas, objetos y procesos) a *la construcción histórica de las matemáticas se visualiza un tipo de progreso que pone en evidencia que las definiciones, propiedades y teoremas que objetivizan -a través de un lenguaje específico- el saber matemático "sabio", progresan en* *relación directa con la cultura de cada época y dependiendo de los contextos que determinan sus usos.*

En este sentido, se decidió estudiar los aspectos más relevantes de la práctica innovadora realizada por Lagrange (1736 - 1813) en el proceso de construcción de la Teoría Algebraica de Ecuaciones, es decir, qué tipo de preguntas fueron apareciendo a lo largo de su trabajo, desde qué "lugar" (concepciones/conocimientos) fueron abordadas y cuáles de ellas son las que movilizaron cambios importantes en la perspectiva de análisis del problema estudiado[1] en el marco de la cultura matemática de la época. Estas preguntas son muy importantes pues el desarrollo de una Teoría está directamente vinculado con el problema que se pretende resolver: si no existen cambios de dirección en la búsqueda de respuestas es muy difícil que exista un verdadero avance.

OBJETIVOS, MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

El objetivo de esta investigación fue poner en evidencia cuáles son los elementos determinantes (objetos y procesos) para que se produzcan modificaciones en los sistemas de prácticas denominados por las autoras "quiebres" [2] en el desarrollo de una teoría, ya que estos tipos de cambios nos proporcionan elementos singulares para poder pensar en una enseñanza con alta *idoneidad epistémica.*

Se trabajó sobre los ***sistemas de prácticas,*** relevados del libro Galois' Theory of Algebraic Equations (Tignol 2002), para luego reconocer las ***configuraciones de objetos y procesos matemáticos***, emergentes e intervinientes en dichas prácticas matemáticas.

En una práctica matemática se ponen en juego situaciones–problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). (Godino, 2002).

La noción de juego de lenguaje ocupa un lugar importante en la descripción de la actividad matemática. Justamente Godino (2002, p.2489 dice: « Según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal – institucional; ostensiva - no ostensiva; intensiva – extensiva
(tipo - ejemplar); elemental – sistémica; expresión – contenido ».

En este trabajo únicamente aplicaremos la faceta dual intensiva-extensiva la cual tensiona los procesos de particularización/generalización que regulan decididamente la producción matemática analizada.

La técnicas de recolección de datos son indirectas ya que las prácticas matemáticas de Lagrange fueron extraídas del libro antes mencionado, es importante destacar que este trabajo sería más rico y objetivo si pudiéramos basarlos en los trabajos originales de Lagrange pero al no poder contar con ellos elegimos la bibliografía ya citada pues la misma respeta las ideas originales surgidas en cada época, según explicita el propio autor y por valoraciones de especialistas en el área del álgebra..

[1] El problema que ocupaba a la comunidad matemática en ese momento era poder determinar si para las ecuaciones de grado mayor o igual que cinco , sus raíces se podían describir dependiendo de operaciones racionales con sus coeficientes(parámetros)y raíces del respectivo grado, habida cuenta de que hasta las ecuaciones de grado cuatro lo habían podido demostrar.

[2] Llamaremos "quiebre" a aquellas prácticas matemáticas que consigan alguna modificación importante en alguno de los elementos de significado que caracterizan a dichas prácticas y de ese modo logren abrir nuevos caminos de indagación.

El trabajo del matemático Lagrange nos resulta iluminador para nuestro problema no solo porque pone en evidencia el sentido del uso de las permutaciones encontrándose la génesis de lo que hoy llamamos el “Teorema de Lagrange”, contenido esencial en la Teoría de Grupos y por ende contenido curricular nodal de Estructuras Algebraicas, sino porque dichos objetos son puestos a funcionar (como intervinientes y como emergentes con un nuevo significado) en el problema de la resolución de ecuaciones de grado mayor o igual a 5. Más aún, es a partir de este trabajo donde **emerge la primera conjetura** respecto a la imposibilidad de resolverlas por radicales, germen de la Teoría de Galois que resulta el contexto donde se objetiviza la primera estructura algebraica: la noción de grupo.
Para analizar en profundidad las investigaciones realizadas por Lagrange, en primera instancia estudiamos los métodos para la resolución de ecuaciones relevados por él con el objetivo de manipular con soltura los avances en técnicas logrados hasta ese momento cultural y como consecuencia comprender mejor las decisiones tomadas por el propio Lagrange. En segunda instancia confeccionamos tres configuraciones epistémicas correspondientes a –según nuestro criterio- los tres sistemas de prácticas diferentes que encontramos en relación a la específica producción matemática de Lagrange y que nos permiten adentrarnos finamente a entender el pensamiento y el particular uso relacional que hizo de objetos y procesos puestos en juego esta figura clave para el desarrollo de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas. A modo de ilustración del método utilizado, en este trabajo, detendremos nuestro análisis en la primera configuración epistémica del sistema de prácticas de Lagrange, y describiremos el modo en que interaccionan el lenguaje, las situaciones, los conceptos, los argumentos, las propiedades y los procedimientos en cada momento y tiempo cultural ante la problemática planteada, como así también detectaremos procesos que para nosotros explican el denominado “quiebre epistémico”. La herramienta teórica construida en el seno del EOS (configuración epistémica) y que se utilizó en este trabajo posibilitó la visualización -a través del juego dialéctico entre el análisis y la síntesis- de los momentos importantes en las prácticas de Lagrange que para nosotros significaron, en esta etapa de construcción matemática “quiebres” esenciales en la construcción de la Teoría de Ecuaciones.

ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE LAGRANGE

El trabajo de Lagrange, que sin duda fue clave para el desarrollo de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas, puede subdividirse en tres etapas: el estudio de los métodos existentes, el desarrollo de nuevos constructos matemáticos que le permitieron elaborar la primera conjetura que sostiene el desarrollo de la posterior Teoría de Galois y la elaboración de un método que pretendió ser general.
Hasta la segunda mitad del siglo XVIII, la teoría algebraica de ecuaciones había avanzado bastante en torno a la búsqueda y sistematización de técnicas que abarcaran la resolución de familias de ecuaciones. En esta época se contaban con varios métodos de resolución de ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, pero no se había podido elaborar un método para resolver por radicales ecuaciones de grado igual o mayor a cinco.
Esta imposibilidad de encontrar un método que resolviera una ecuación independientemente de su grado llamó la atención de Lagrange por lo que su primera gran decisión fue abocarse al estudio reflexivo de los métodos existentes. Tal como él mismo expresa su objetivo era:

“*… examinar varios métodos encontrados hasta la fecha para la solución algebraica de ecuaciones, para reducirlos a los* ***principios generales****, y para ver porqué estos métodos son exitosos en ecuaciones de tercer y cuarto grado y no lo son en grados mayores.”* (Citado por Tignol, 2002, p.127). Las negritas son decisiones de las autoras de este trabajo.

Para estudiar la articulación entre los distintos elementos de significado de esta práctica matemática se realizó la configuración epistémica (Anexo), en ella se puede observar cómo el tipo de problema planteado, que era determinar **cómo y porqué funcionan los métodos** existentes para la resolución de ecuaciones de hasta grado cuatro, supone un **proceso de búsqueda de invariantes** sobre métodos ya instituidos es decir con significados institucionales. Con este tipo de trabajo Lagrange logra caracterizar las raíces de las ecuaciones auxiliares, utilizadas para dar solución a las ecuaciones originales, poniendo al descubierto la expresión a partir de la cual son obtenidas y la estructura de dichas ecuaciones. Es decir pudo demostrar que los coeficientes de la ecuación son **polinomios simétricos en relación a las raíces de la ecuación original** (o sea encontró propiedades a propiedades ya establecidas) y además concluyó que el grado de la ecuación auxiliar está directamente relacionado con la cantidad de valores que toma la expresión que las origina al permutarse las raíces de la ecuación original.
Como puede observarse en este sistema de prácticas que estamos analizando, Lagrange realiza lo que podríamos denominar un "estudio estructural" de las ecuaciones algebraicas, ya que visibiliza los invariantes de las propiedades instituidas (raíces obtenidas por radicales y operaciones racionales, relación entre el grado de la ecuación y las permutaciones de las raíces). Esto es justamente así pues, estudió relaciones entre las propiedades de los elementos de una ecuación tales como coeficientes, incognita, parámetros, variables, obteniendo así "propiedades de propiedades" (Piaget y Garcia, 1984) Este trabajo sentó las bases para el surgimiento de nuevos objetos de estudio dentro del álgebra: las estructuras algebraicas.
El elemento de significado, asociado a las ecuaciones algebraicas, y el emergente más relevante de esta etapa dada las características de nuestro estudio, fue la conjetura que formuló en términos de un interrogante una vez analizados todos los métodos existentes, hasta ese momento:

"Como se desprende del análisis que acabamos de dar de los principales métodos para hallar las soluciones de ecuaciones, ***todos estos métodos*** *se reducen* ***al mismo principio general****, a saber: 1º, que la ecuación o ecuaciones dadas (las que usualmente se denominan ecuaciones reducidas) resulten ser de un grado menor que el grado de la propuesta o por lo menos descomponible en otras ecuaciones de grado menor; 2º, que los valores de las raíces buscadas pueden deducirse fácilmente de ellas.*
El arte de resolver ecuaciones consiste en ***descubrir las funciones de las raíces que tienen las propiedades*** *antes mencionadas, pero ¿es siempre posible encontrar tales funciones, para las ecuaciones de cualquier grado, es decir, para cualquier número de raíces? Esta es una pregunta que parece muy difícil de responder en general."* (Lagrange 1770, citado por Tignol, 2002, p. 136-137) (nuevamente lo resaltado en negrita es decisión de las autoras de este trabajo a los fines de evidenciar el tipo de objetos emergentes y procesos puestos a funcionar.)

Esta conjetura está vinculada con algunos resultados que obtuvo al buscar las razones del funcionamiento del método de Bezout que había pretendido formular un método general. Él observó que las raíces de la ecuación propuesta de grado n son de la forma $a_0 + a_1\omega + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1}$, donde ω es una raíz n-ésima de la unidad distinta de 1. Si ζ es una raíz primitiva n-ésima de la unidad, las n raíces de la unidad serán:1, $\zeta, \ \zeta^2, \dots, \ \zeta^{n-1}$.
Sustituyendo sucesivamente 1, $\zeta, \ \zeta^2, \dots, \ \zeta^{n-1}$ por ω se obtiene la siguiente expresión de las raíces:

$$x_1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$
$$x_2 = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots + a_{n-1}\zeta^{n-1}$$

$$x_3 = a_0 + a_1\zeta^2 + a_2\zeta^4 + \cdots + a_{n-1}\zeta^{2(n-1)} \ldots$$
$$x_n = a_0 + a_1\zeta^{n-1} + a_2\zeta^{2(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\zeta^{(n-1)(n-1)}$$

Luego, en general:

$$x_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j\zeta^{(i-1).j} \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

Este sistema es fácil de resolver para a_0, a_1, a_2, a_{n-1}: para obtener los valores de a_k, es suficiente multiplicar cada ecuación por una potencia adecuada de ζ de modo que el coeficiente de a_k sea 1, y sumando las ecuaciones resultantes obtenemos:

$$\sum_{i=0}^{n} \zeta^{-(i-1).k} x_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\sum_{i=0}^{n} \zeta^{(j-k).(i-1)}\right) \qquad (2)$$

Si $j \neq k$, entonces ζ^{j-k} es una de las raíces n-ésimas de la unidad distinta de 1. Por lo tanto ζ^{j-k} es una raíz de

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

Luego,

$$\sum_{i=0}^{n} \zeta^{(j-k).(i-1)} = 0$$

Luego, en el lado derecho de (2), todos los términos son cero salvo el correspondiente al índice $j = k$, el cual es na_k. Así la ecuación (2) queda:

$$a_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n} \zeta^{-(i-1).k} x_i\right) \qquad (3)$$

Es fácil ver que si x_1, x_2, x_3, x_4 son consideradas indeterminadas independientes, todos los valores obtenidos para a_k de todas permutaciones de x_1, x_2, x_3, x_4 son distintas. Por lo tanto, a_k es raíz de una ecuación de grado n!. **Sin embargo, Lagrange muestra que $a_k{}^n$ toma sólo (n-1)! valores.** Además, si n es primo, $a_k{}^n$ es una raíz de una ecuación de grado n-1 donde sus coeficientes pueden ser determinados por la soluciones de una ecuación simple de grado (n-2)! Así, para $n = 5$, la determinación de $a_k{}^5$ necesita de soluciones de una ecuación de grado 3!=6.

Si n no es un número primo, el resultado es más complicado. Usando un argumento similar al caso de n primo, Lagrange muestra que si $n = p.q$ donde p es primo, y si k es divisible por q , $a_k{}^p$ es raíz de una ecuación de grado $p - 1$ cuyos coeficientes dependen de una ecuación simple de grado $\frac{n!}{(p-1)p\,(q!)^p}$. Para $n = 4$ se sigue que $a_2{}^2$ puede ser hallada resolviendo una ecuación de grado $\frac{4!}{1.2.(2!)^2}$ =3, pero para $n = 6$, para determinar $a_3{}^2$ se necesita resolver una ecuación de grado $\frac{6!}{1.2.(3!)^2}$=10.

Como puede observarse cuando el grado de la ecuación es mayor o igual a cinco el grado de la ecuación auxiliar es mayor que el grado de la ecuación original.

A continuación en este contexto singular queremos aplicar el uso de la dualidad intensivo/extensivo para el análisis del proceso particularización/generalización concretizado en estas prácticas donde se observa un funcionamiento muy especial de los elementos genéricos y de los particulares.
El razonamiento matemático transita de un general (método de resolución de una ecuación general de un grado específico) a otro general (un método para todas las ecuaciones algebraicas) producto de un doble proceso de generalización, haciendo intervenir fases intermedias que consisten en poner a funcionar objetos particulares pero que están funcionando como generales que han sido producto de procesos simples de generalización. En efecto, esto se evidencia cuando se plantea por ejemplo:

- Si ζ es una raíz primitiva n-ésima de la unidad, las n raíces de la unidad serán:1, $\zeta,\ \zeta^2, \dots,\ \zeta^{n-1}$. O
- Si $j \neq k$, entonces ζ^{j-k} es una de las raíces n-ésimas de la unidad distinta de 1. Por lo tanto ζ^{j-k} es una raíz de

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

Por otra parte razonamientos como el siguiente:
Es fácil ver que si x_1, x_2, x_3, x_4 son consideradas indeterminadas independientes, todos los valores obtenidos para a_k de todas permutaciones de x_1, x_2, x_3, x_4 son distintas. Por lo tanto, a_k es raíz de una ecuación de grado n!;
son producto de un juego dialéctico entre particulares generales (x_1, x_2, x_3, x_4) y un general (valores de a_k) emergente de un doble proceso de generalización.
Analizando integralmente este razonamiento se plantea un dilema: si el mismo se aplica a un objeto concreto (por ejemplo en este caso ecuaciones de grado 5) es preciso que se tenga alguna garantía de que se razona sobre un objeto cualquiera para que se justifique la generalización en la que termina el razonamiento.

A MODO DE REFLEXIÓN FINAL

A lo largo del trabajo se ha podido observar, por un lado, que la génesis de los constructos matemáticos que se estudian en la asignatura Estructuras Algebraicas correspondiente a un espacio curricular de la formación inicial del Profesorado en Matemática de la UNRC se encuentran esencialmente en la producción de Lagrange; y por otro lado cómo la aplicación del EOS ha permitido detectar un fenómeno didáctico relevante relacionado con la enseñanza en tal espacio. El mismo se puede sintetizar como: la poca importancia que se le da en la formación inicial de profesores, a la complejidad semiótica que implica el paso del trabajo algebraico basado en el estudio de propiedades de elementos (lo que hace emerger a las ecuaciones y a los polinomios) al trabajo sobre ecuaciones y polinomios que implica estudiar propiedades o/y operaciones de propiedades. Los análisis ontológico-semióticos como el que aquí hemos realizado sobre las prácticas matemáticas realizadas por Lagrange (y, especialmente, el uso en este contexto de la dualidad intensivo/extensivo para tensionar los procesos de particularización y generalización) son análisis finos que consideramos deben ser complementados por otros análisis que permitan proponer alternativas idóneas epistémicamente a la hora de planificar situaciones para la enseñanza de las estructuras algebraicas. Elaborar situaciones que vinculen el trabajo con los polinomios con la construcción de grupos, sin duda sería muy importante pues sería un modo de establecer una relación entre los conocimientos preexistentes en los alumnos con el nuevo contenido propio de la asignatura. Además, también es importante plantear el análisis de los invariantes en las transformaciones a partir del estudio de las permutaciones ya que de este análisis emerge un nuevo objeto matemático, la estructura de grupo, tal lo explicitado con la construcción de las configuraciones.

REFERENCIAS

- Etchegaray, S. (2010). Reflexiones y aportes para repensar la enseñanza de la Matematica. *Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral. Facultad de Humanidades y Ciencias.YUPANA*". Nº5. 11-26
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284*
- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.
- Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las Ciencias, 32.1, 199-219.
- Godino, J. D. Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.*
- Piaget, J. & García,R (1984). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* Siglo XXI editores.
- Tignol J. P. (2002). *Galois' Theory of Algebraic Equations.* World Scientific.

ANEXO: Configuración epistémica del primer sistema de prácticas de Lagrange

LENGUAJE MATEMÁTICO

Simbólico: Incógnitas, números reales, símbolos para suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz. Igualdad, ecuación, sistema de ecuaciones, notación polinomial, etc.

Ejemplos:

$$X^3 + pX + q = 0$$

$$X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

$$R_n(X) = \Pi_\omega(X - \Upsilon(w))$$

$$y_1 = \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$$

$$\Phi(f)=0$$

$$b_1 = -\frac{x_1^2 + \omega x_2^2 + \omega^2 x_3^2}{x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3}$$

$$a_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n} \zeta^{-(i-1).k} x_i\right)$$

SITUACIÓN PROBLEMA

Determinar cómo y porqué funcionan los métodos existentes para la resolución de ecuaciones.

REGLAS

DEFINICIONES O CONCEPTOS

Previos: ecuación, raíz, coeficientes, polinomios, sistema de ecuaciones, raíces de la unidad, polinomios simétricos elementales, división de polinomios.
Emergentes: resolvente de Lagrange

PROCEDIMIENTOS

Previos: métodos de resolución de ecuaciones de 2°, 3° y 4° grado (uso de ecuación auxiliar), manipulaciones algebraicas (cambio de variable).
Emergentes: determinar las raíces de las ecuaciones auxiliares como función de las raíces de la ecuación propuesta y las raíces de la unidad.

PROPOSICIONES

Previas: fundamental del álgebra, teorema Teorema fundamental de fracciones simétricas.
Emergentes: La ecuación auxiliar utilizada para resolver una ecuación cúbica produce a lo sumo 3 raíces distintas. Las raíces de la ecuación auxiliar (para resolver una cúbica) son obtenidas a partir de la expresión $\frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)$ donde x_i son raíces de la ecuación original y ω es una raíz de la unidad. Si alguna expresión de x_1, x_2, x_3 es la raíz de la ecuación reducida, cualquier otra expresión obtenida a partir de ésta por permutaciones de x_1, x_2, x_3 también será una raíz.
Teorema: Sea f una fracción racional con n indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$. Si f toma m diferentes valores cuando las indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$ son permutadas de todas las formas posibles, entonces f es una raíz de la ecuación mónica $\Theta = 0$ de grado m, cuyos coeficientes son simétricos en $x_1, \ldots, x_n$. Si f es la raíz de otra ecuación $\Phi = 0$ con coeficientes simétricos en $x_1, \ldots, x_n$, entonces gr$\Phi \geq m a_k$ (coeficiente de la ecuación auxiliar del método de Bezout) es raíz de una ecuación de grado n! que ${a_k}^n$ toma sólo (n-1)! valores. Además, si n es primo, ${a_k}^n$ es una raíz de una ecuación de grado n-1 donde sus coeficientes pueden ser determinados por las soluciones de una ecuación simple de grado (n-2)!.
Primera conjetura: Para resolver las ecuaciones hay que descubrir las funciones de las raíces que tienen las propiedades antes mencionadas.

ARGUMENTOS

Utilizados: Demostraciones deductivas, Argumentos inductivos
Emergente: Razonamiento plausible