CB 33

VISUALIZACIÓN INTERACTIVA DE CÓNICAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UNA IMAGEN CONCEPTUAL DE LA DEFINICIÓN DE EXCENTRICIDAD

Oscar Enrique Ares

Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales – Universidad Nacional de San Luis
25 de Mayo 384 – Mercedes (San Luis)
oares@fica.unsl.edu.ar

Palabras Claves: geometría analítica, cónicas, visualización.

RESUMEN
En este trabajo se presenta el *diseño* de una propuesta didáctica utilizando nuevas tecnologías para la enseñanza del tema: *definición general de las cónicas y concepto de excentricidad*. Se debe destacar que una de las metas de comprensión que oriento el diseño de esta secuencia didáctica es la construcción de una imagen conceptual significativa que explique la aparición del producto xy en $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y que actúe como conocimiento inclusor del teorema de los ejes principales, en algebra lineal. Una fase del diseño es la construcción de una herramienta didáctica computacional que se materializa mediante la elaboración de un conjunto de archivos realizada en el entorno de programación de software *geogebra*. La *propuesta didáctica innovadora* es la utilización de esta herramienta didáctica computacional, conjuntamente con una *guía de actividades* que ordenan y articulan la secuencia didáctica.

INTRODUCCIÓN
La evolución que ha experimentado el software matemático, especialmente en la última década ofrece nuevas formas de *enseñar, aprender y hacer matemática.*
En el campo de la ingeniería didáctica, la utilización de software educativo, permite diseñar estrategias donde el alumno sea un participante más activo en la elaboración de su propio aprendizaje, realice tareas de exploración y elaboración de hipótesis en la que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones. Esto es la finalidad que se persigue con el diseño de esta propuesta didáctica, implementada utilizando el entorno de programación de ***geogebra***, en el tema de algebra y geometría analítica: *definición general de las cónicas y concepto de excentricidad*.

OBJETIVOS
Se pretende en el diseño de esta secuencia didáctica que el uso de la herramienta computacional permita la <u>*visualización interactiva*</u> del *concepto de excentricidad* al estudiar el cambio de forma de las cónicas que se produce al modificar distintos parámetros de las curvas y analizar cómo se corresponden con las definiciones y ecuaciones algebraicas. Al variar la excentricidad y mantener fijos el resto de los parámetros se generan *cónicas homofocales* y el alumno puede verificar primero en *forma exploratoria* y luego resolver algebraicamente la condición de *auto-ortogonalidad*, esto es, la familia de elipses y la familia

de hipérbolas de cónicas homofocales son trayectorias ortogonales entre sí. *Al* mismo tiempo el uso este recurso didáctico permite la *verificación experimental numérica e interactiva*, de las *definiciones de las cónicas* como lugar geométrico. Una de los ejes teóricos de la ingeniería didáctica de la secuencia, que fueron concretados, es que para enseñar a los alumnos un concepto matemático se debe presentar la reunión de distintos *registros de representación semiótica*, y su *coordinación*, específicamente la coordinación del registro geométrico, numérico y algebraico.

FUNDAMENTACIÓN

La imagen conceptual es la *primera asociación mental no verbal que aparece en nuestra mente* cuando el nombre del concepto es evocado (Tall y Vinner, 1981)

Puede tratarse de una impresión visual o una colección de impresiones o experiencias. si bien estas imágenes visuales, experiencias pueden luego traducirse en forma verbales, no es así como aparecen en primera instancia.

Para adquirir un concepto *no es suficiente con memorizar su definición*, debe poseerse una imagen conceptual del mismo. es decir, que el aprendizaje, la comprensión, la aplicación y desarrollo de los conceptos matemáticos involucra la construcción de un cierto tipo de estructura mental: la imagen conceptual

La utilización de la computadora como herramienta cognitiva favorece el diseño de "situaciones de acción, formulación y validación" e "institucionalización" (Brosseau, 1986)

Se asume como modelo teórico de los procesos cognitivos, el de la formación de imagen conceptual y visualización (Tall y Vinner, 1981). La visualización juega un papel importante en la construcción de la imagen conceptual.

Las etapas de la secuencia didáctica son: diseño, puesta en escena y análisis de resultados (Aguilar, P., Farfán, R. M., Lezama, J., Moreno, J. ,1997). En este trabajo, se muestra en detalle el *diseño y forma de utilizar la herramienta computacional*, conjuntamente con la *guía de actividades*, siendo motivo de otro trabajo, el análisis de la puesta en escena con el consiguiente análisis de resultados. Se menciona que los objetivos perseguidos, se alcanzaron en alto grado, como se desprende del análisis de las respuestas obtenidas de las guías de actividades entregadas, pero esencialmente se logró la *participación activa del alumno* en las actividades de la secuencia, es decir, en la construcción de su propio proceso de aprendizaje. De la distinción clásica de la didáctica entre proceso y producto de aprendizaje, con esta secuencia se logró valorizar el proceso.

TEORÍA UNIFICADA DE LAS CÓNICAS: EL CONCEPTO DE EXCENTRICIDAD

Breves consideraciones epistemológicas

La geometría es una de las más antiguas ciencias. Las cuestiones geométricas durante siglos estuvieron vinculadas a resolución de *problemas prácticos* que involucraban medir longitudes, áreas y volúmenes o determinar ángulos rectos para las esquinas de los edificios. Los egipcios con ayuda de la geometría *calculaban las dimensiones* de parcelas de tierra para reconstruirlas luego de una inundación. La palabra 'geometría', deriva de 'medición de tierra'. Los *griegos* introdujeron problemas de *construcción* en los que cierta línea o figura debe ser construida utilizando solo una regla de borde recto y un compás. La Geometría Griega fue la primera en ser *formal*. Parte de los conocimientos concretos y prácticos de las civilizaciones egipcia y mesopotámica, y da un *paso de abstracción al considerar los objetos entes ideales*

–un rectángulo ideal, en lugar de una pared cuadrada concreta, un círculo en lugar del ojo de un pozo, etc.– que pueden ser manipulados mentalmente, con la sola ayuda de regla y compás. Euclides (325 a. de C.- 265 a. de C), en su obra más famosa 'Los elementos', establece una *formulación axiomática de la geometría* y sintetiza todos los conocimientos de geometría plana y espacial, de aritmética y algebra desde la época de Thales de Mileto. Lo notable es que de uno de sus cinco postulados se derivan otras geometrías, las geometrías no-euclidianas, inventadas varios siglos después.
Apolonio, vivió entre los años 262-190 a. de C, resumió todo el saber de la época en ocho tomos de su obra titulada 'Las cónicas'. Allí quedan definidos definitivamente los nombres de las cónicas: parábola, elipse, hipérbola.
Los avances más importantes vendrían con Rene Descartes (1596-1650) y Pierre Fermat (1601-1665), considerados los *fundadores de la geometría analítica*. Descartes ideo una manera de identificar unívocamente un punto del plano mediante un par ordenado referido a un sistema de coordenadas, consistente en dos rectas graduadas que se cortan ortogonalmente. De los tres apéndices de su obra más importante: *'discurso del método'* y consiste en la *aplicación del algebra* del siglo XVI al análisis geométrico de las curvas obtenidas por los antiguos geómetras griegos. Dos siglos después Ampere, denomino a este método *geometría analítica.*
Sistemáticamente Descartes comenzaba por la condición del lugar geométrico de una curva y luego derivaba la ecuación algebraica, su compatriota Pierre Fermat comenzaba con una ecuación algebraica y deducía las propiedades geométricas de la curva. Así quedaron definidos los dos problemas más importantes de la geometría analítica:

I. Dada una ecuación *interpretarla geométricamente*, es decir, construir la gráfica correspondiente y hallar propiedades geométricas.
II. Dada una figura geométrica o lugar geométrico o condición que deben cumplir los puntos de la curva, *determinar su ecuación*.

Desde la perspectiva de una epistemología histórica se puede afirmar que en la antiguidad el denominador común a toda la matemática en los distintos pueblos había sido la geometría; el gran hallazgo de autores como René Descartes y Pierre de Fermat fue el hecho de que las *nociones geométricas podían convertirse en formulas algebraicas*. En consecuencia, históricamente primero el registro geométrico, luego el algebraico
Fue el matemático suizo *Leonarhd Paul Euler* quien en 1748 sistematizo el uso el uso de las coordenadas cartesianas –como las conocemos en la actualidad- en el plano y en el espacio, el sistema de referencia oblicuo y las coordenadas polares, dando *formalmente lugar a la geometría analítica*. La segunda parte de su libro *Analysin infinitorum* trata sobre geometría analítica. Estableció las fórmulas de transformación de los sistemas de coordenadas y clasifico las curvas algebraicas por el grado de sus ecuaciones, estudiando sus propiedades generales. Estudio en forma analítica y detalladamente las cónicas, problemas de tangentes, intersección de curvas, problemas de curvatura.

MARCO TEORICO

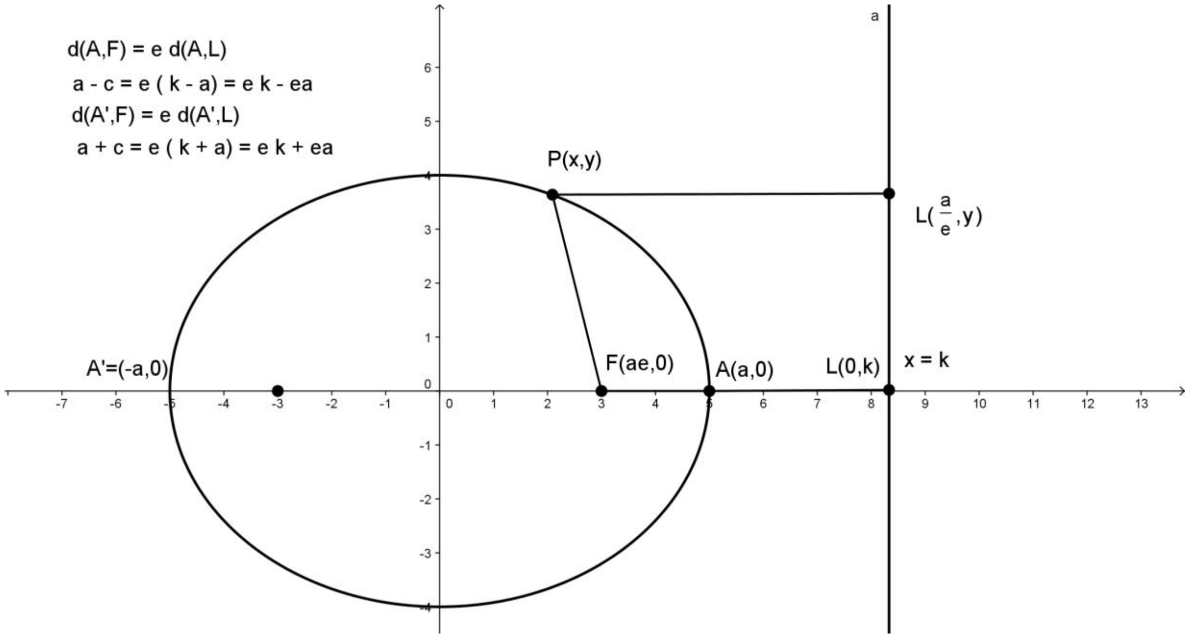
Fundamentos matemáticos

Se utilizara entre otras herramientas didácticas la noción de campo conceptual -Vernaud, 1981-, que permite abordar *varios conceptos de manera* ***simultánea***, ***organizada e integrada***, para la resolución de un *conjunto organizado de problemas*. El campo conceptual

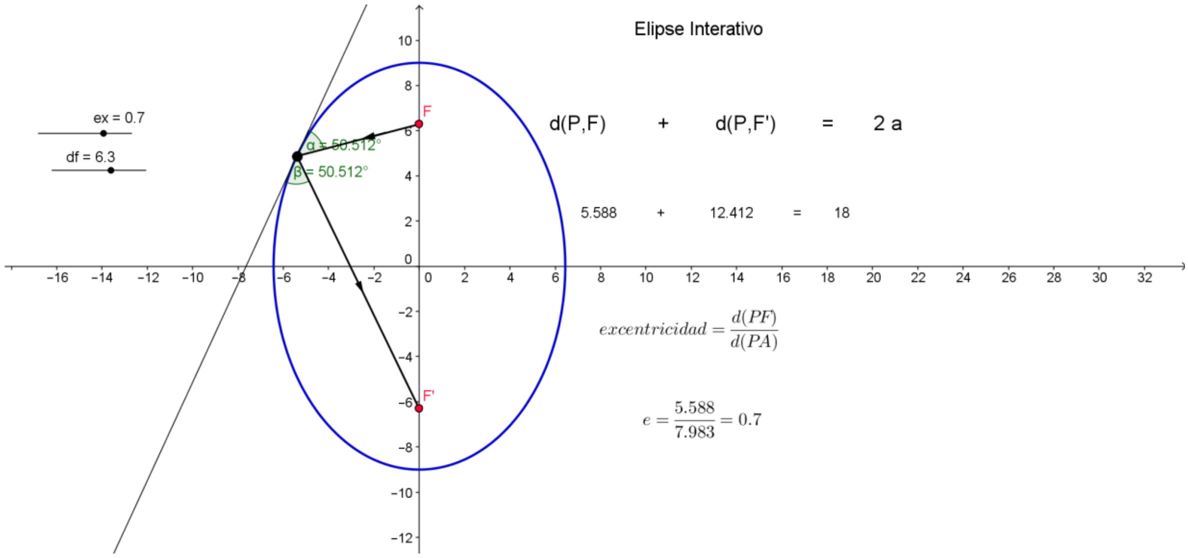
se forma alrededor de la definición de excentricidad que permite articular una teoría unificada de las cónicas.
La *excentricidad de una cónica* es un cociente de distancias –distancia de P(x,y) de la cónica al foco *dividido* distancia de P a la recta directriz- , no nulo, que se mantiene constante –constante positiva- para cualquier punto P de la curva:

$$e = \frac{\overline{PF}}{\overline{PL}} \leftrightarrow \overline{PF} = e\overline{PL}.$$

Definido un valor de *excentricidad* todos los puntos del plano que *verifican* el cociente, definen una *cónica*. La cónica se llama central si tiene centro de simetría. La cónica tiene vértices, denominados A y A´ en la figura.
Se determinara la expresión analítica para la excentricidad y la ecuación de las rectas directrices, para una cónica cualquiera.



Las ecuaciones insertas en la figura determinan un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de muy fácil solución $\begin{cases} a - c = ek - ea \\ a + c = ek + ea \end{cases}$ sumando miembro a miembro se determina k = $\frac{a}{e}$, es decir, la ecuación de la recta directriz es $x = \frac{a}{e}$. Restando miembro a miembro se determina $c = ea \leftrightarrow e = \frac{c}{a}$. ¿Cómo afecta la forma de una cónica especifica la variación de la excentricidad? Esta es la pregunta formulada al alumno, para que reconozca la importancia de la definición de excentricidad. La estrategia didáctica es realice una primera etapa de tarea exploratoria con la herramienta didáctica computacional.
Los parámetros que permite cambiar esta herramienta son la excentricidad y la distancia focal. Se puede verificar en registro numérico y gráfico, la suma de distancias a dos puntos fijos –focos- es constante y el valor de la constante 2a. Pero, además se verifica geométrica y numéricamente –ver los valores de ángulo incidente y reflejado- la propiedad óptica de la elipse, todo rayo emitido desde un foco se refleja en la curva y pasa por el otro foco.



Llevando la definición de la excentricidad a desarrollo algebraico, de manera conveniente, se ubica la recta directriz coincidente con el eje y, de un sistema de coordenadas cartesiano y el foco de coordenadas F(0,p) coincidente con el eje x, para cualquier P(x,y) de la cónica se verifica

$$e = \frac{\overline{PF}}{\overline{PL}} \leftrightarrow e = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x|}$$

Elevando miembro a miembro al cuadrado y haciendo pasaje de términos, fácilmente se llega a la expresión, que caracteriza la ecuación de las cónicas en función de la excentricidad:

$$(1 - e^2)x^2 - 2cx + y^2 + c^2 = 0$$

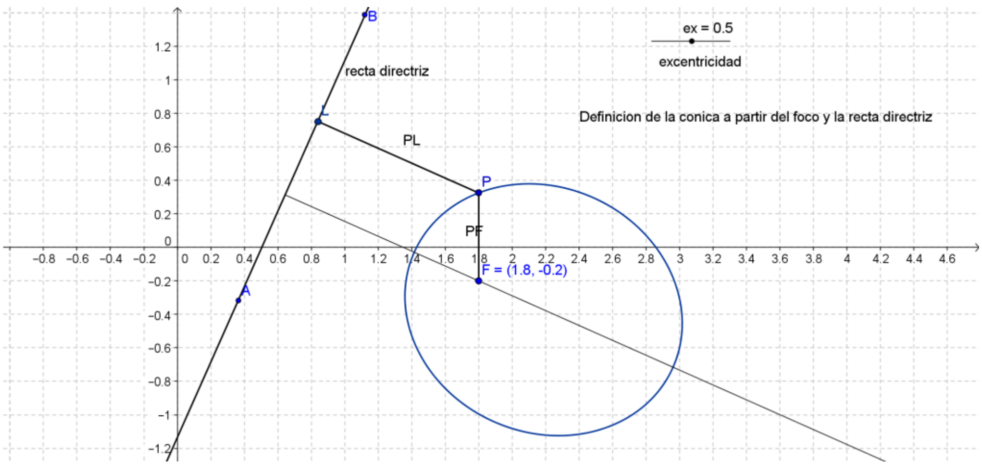
Para analizar la ecuación se distingue: I) e=0 II) $1 - e^2 > 0$ III) $1 - e^2 < 0$

A partir de esta ecuación general en función de la excentricidad, el alumno identificara las cónicas: elipse, parábola e hipérbola.

DESCRIPCIÓN DE LA HERRAMIENTA DIDÁCTICA COMPUTACIONAL QUE POSIBILITA LA VISUALIZACIÓN

La herramienta didáctica computacional interactiva que se describirá a continuación permite abordar una serie de problemas caracterizados por el siguiente tipo de enunciado: *dadas las coordenadas de un punto fijo F-foco- , la ecuación de una recta fija -directriz- y un valor de excentricidad hallar ecuación algebraica del lugar geométrico*.

La herramienta didáctica permite deslizar los puntos A y B –ver figura- y en consecuencia ubicar la recta directriz. Con el cursor ubicado sobre punto F situar el foco, del mismo modo que calibrar el valor de la excentricidad de acuerdo con los datos del problema. En consecuencia, se podrá visualizar la curva correspondiente a la cónica definida. Con esta importante referencia visual el alumno aborda la problemática en el registro algebraico con el objetivo de determinar la ecuación de la curva. Al mismo tiempo se ponen en juego conceptos de la teoría de la didáctica de la matemática como coordinación de distintos registros de representación semiótica. Muy importante para la formación de una imagen conceptual es la familia de curvas –elipses en este caso- que se obtienen al variar los parámetros, excentricidad, ubicación del foco y de la recta directriz.



EL TERMINO XY EN LA ECUACIÓN CUADRÁTICA EN DOS VARIABLES

Al hallar el alumno la ecuación del polinomio de segundo grado en dos variables igualado a cero, descubrirá la aparición del termino xy. ¿que indica geométricamente este término en la ecuación cuadrática? Descubrirá el alumno experimentalmente con herramienta didáctica computacional y luego analíticamente en registro algebraico que el producto cruzado xy significa rotación de la cónica. Al mismo tiempo le resultará significativo el aprendizaje puesto que xy es cero en la ecuación canoníca de ejes paralelos a los coordenados. Adicionalmente, la interactividad de la herramienta didáctica conjuntamente con el menú de herramientas de Geogebra, el botón vista algebraica proporciona la ecuación algebraica correspondiente que le permite al alumno *contrastar* sus respuestas. Una conclusión muy importante a la que seguramente llegara el estudiante es que cuando alinea la recta directriz paralela a uno de los ejes coordenados y en consecuencia el o los ejes de simetra de la cónica quedan paralelos a los ejes coordenados, desaparece de la ecuación algebraica –proporcionada por Geogebra- el termino xy.

El siguiente problema es un componente importante del *campo conceptual de la noción de excentricidad*, forma parte de la secuencia didáctica y se debe resolver en registro algebraico, numérico y verificar con la herramienta didáctica computacional indicada arriba.

Enunciado del problema

Objetivos: deducir la ecuación en coordenadas cartesianas de la cónica, a partir de un valor de excentricidad y vincular la aparición del término xy en la ecuación cuadrática con la orientación de la recta directriz respecto a los ejes coordenados.

Dada la ecuación general de la recta directriz, las coordenadas del foco y un valor numérico de la excentricidad, hallar la ecuación algebraica de la cónica.

Ecuación de la directriz: $x - y + 1 = 0$

Coordenadas del foco: $F(-1, -2)$

Valor de la excentricidad $e = 1/2$

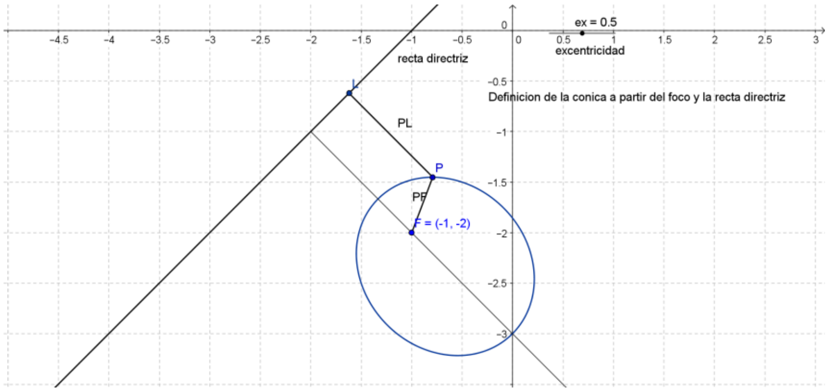
A partir de la definición de excentricidad, se obtiene:

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}}{\frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}$$

Trasponiendo términos y elevando miembro a miembro al cuadrado, resulta:

$$7x^2+2xy+7y^2+14x+34y+39=0$$

Donde surge el producto xy, ya que la cónica esta rotada.
Utilizando la herramienta didáctica computacional, podemos visualizar el problema anterior, fijando la recta directriz, ubicando el foco en (-1.-2) y asignado al deslizador excentricidad el valor ½.



UNA CONEXIÓN IMPORTANTE CON ALGEBRA LINEAL: TEOREMA DE LOS EJES PRINCIPALES

La teoría de situaciones didácticas introducidas por G. Brousseau (1983), se basa en una hipótesis acerca de la construcción del significado de una noción .. . *una nocion aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, ese relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, solo si es una solución de un problema. Tales problemas constituyen, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen la significación de la noción.*

La definición de excentricidad permite construir una teoría unificada de las cónicas. Al mismo tiempo permite establecer un *puente cognitivo* con el teorema de los ejes principales en $\mathbf{R}^2$, de algebra lineal, ya que permite explicar el origen del término xy en la ecuación cuadrática. El teorema de los ejes principales aplica sobre las formas cuadráticas que surgen en una diversidad de problemas importantes referentes a áreas tan diversas como las vibraciones mecánicas, la relatividad, la geométrica y las estadísticas. Aquí se aplica a las secciones cónicas y *permite eliminar el producto cruzado xy* a través de una *rotación* apropiada de los ejes coordenados –nuevos ejes coordenados- facilitando el reconocimiento de la cónica, puesto que finalmente resulta su expresión en forma estándar –canonica-, pero también simplifica la forma de la matriz asociada a la forma cuadrática, siendo esta última diagonal.
Dada la ecuación

$$ax^2+2bxy+cy+dx+ey+f=0$$

Correspondiente a una cónica C, y supóngase que

$$x^t A x = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

es la forma cuadrática asociada. Entonces se puede hacer girar los ejes de coordenadas de modo que la ecuación para C en el nuevo sistema x´y´ tenga la forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

Donde no aparece el producto cruzado de los términos x´y´, siendo la matriz asociada diagonal. λ_1 y λ_2 son autovalores de A siendo P la matriz que diagonaliza ortogonalmente a A, en la expresión **x** = P **x´.**

Desde la perspectiva de teorías cognitivas es muy importante la *red de conexiones* que establece un conocimiento, en este caso el campo conceptual de excentricidad, que permite anclar nuevos conocimientos.

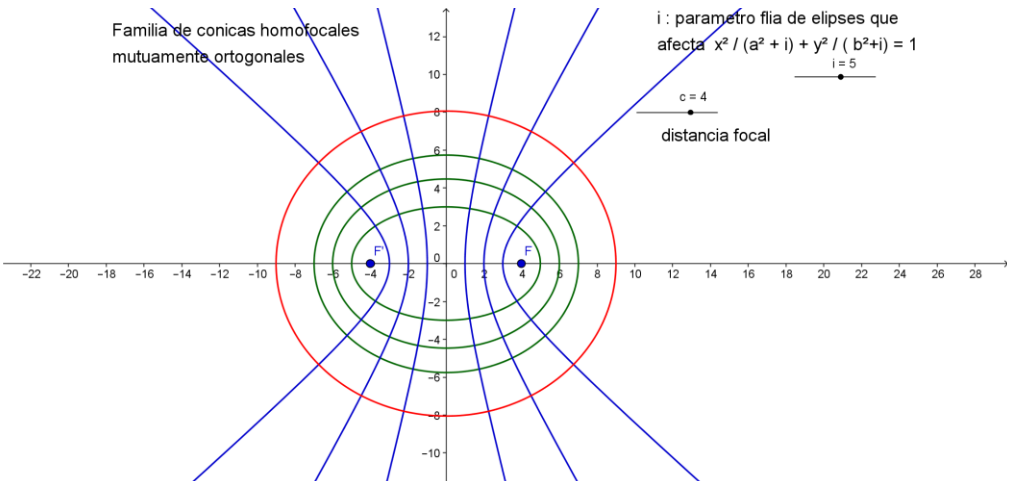
VISUALIZACIÓN DE FAMILIA DE CÓNICAS HOMOFOCALES Y TRAYECTORIAS ORTOGONALES

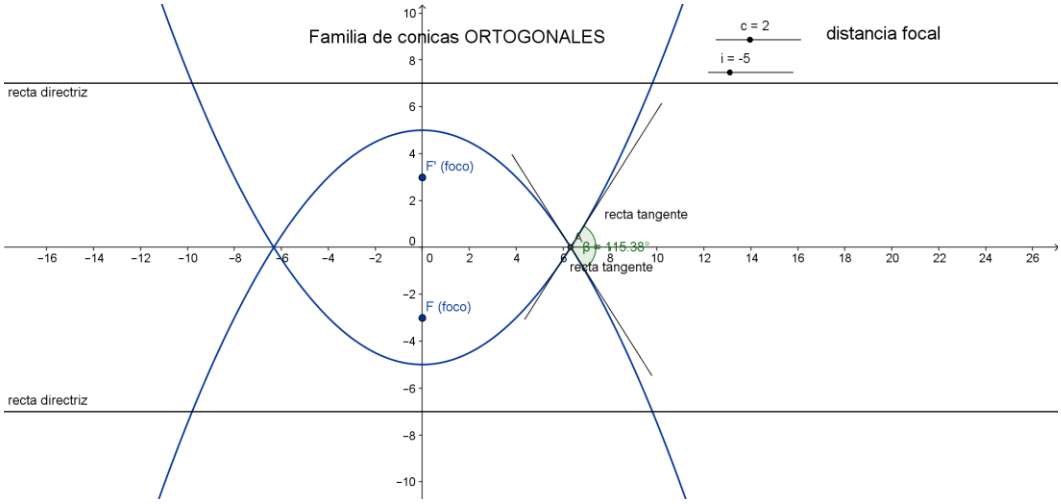
Se considera el importante caso de las cónicas *homofocales*, es decir, aquellas que tienen el mismo foco y responden a la ecuación:

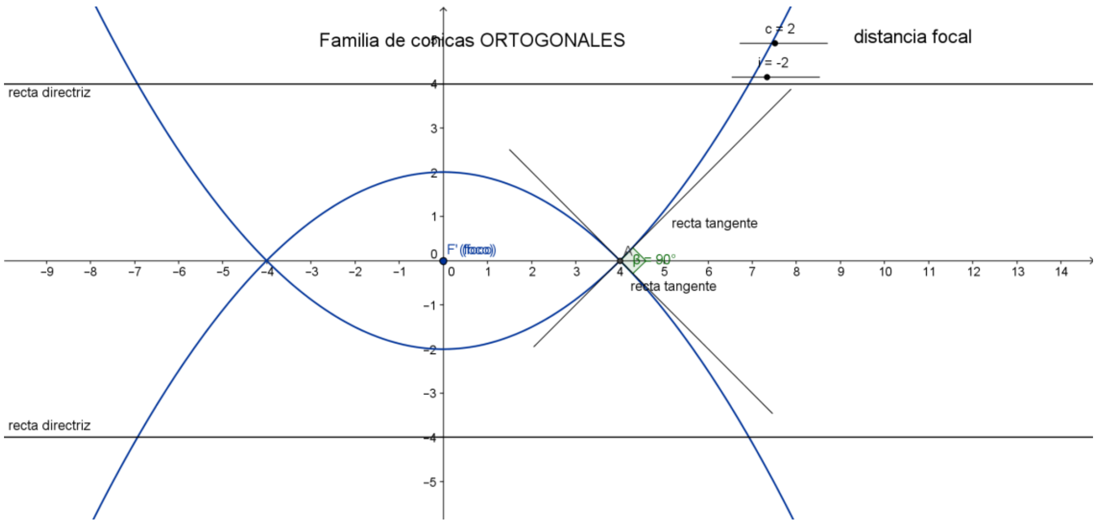
$$\frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} = 1$$

De la ecuación anterior se deduce que para generar una familia de elipses –homofocales- el parámetro k no puede tomar valores $k \leq -a^2$ pero tampoco $k = -b^2$. La distancia focal es $c = \sqrt{(a^2 + k) - (b^2 + k)}$, independiente de k, y por lo tanto todas las elipses tienen los *mismos focos* de coordenadas $\left(\pm\sqrt{(a^2) - (b^2)}, 0\right)$

La herramienta didáctica computacional iterativa diseñada, que se utiliza para visualizar cónicas homofocales y trayectorias ortogonales permite ajustar dos parámetros: distancia focal c, y/o longitud de semiejes i, como se observa en la figura siguiente.







Fases del diseño de la secuencia didáctica

La secuencia metodológica consiste de las siguientes etapas:

1) relevar la existencia de dificultades didácticas y cognitivas en el proceso de enseñanza-aprendizaje del tema definición general de cónica mediante el concepto de excentricidad.
2) Utilizar esencialmente dos recursos proporcionados por la ingeniería didáctica: la visualización interactiva y la coordinación de registros semióticos para posibilitar la construcción de una imagen conceptual, (*concep image*).
3) Se utilizó la *construcción de herramientas de geometría dinámica de geogebra* –proporcionados por el docente, para que el alumno sea usuario-, como *recurso para posibilitar el proceso de visualización interactiva*.
4) Se realizó el diseño de una guía de actividades que incorpore la herramienta computacional anterior, y posibilite la articulación de contenidos teórico_prácticos y permita la utilización del programa diseñado para tareas de exploración, verificación de hipótesis y manipulación de los objetos matemáticos involucrados.
5) Puesta en escena.
6) Análisis de resultados

Las etapas de la secuencia didáctica son: diseño, puesta en escena y análisis de resultados (Aguilar, P., Farfán, R. M., Lezama, J., Moreno, J. ,1997). En este trabajo, se muestra en detalle el *diseño y forma de utilizar la herramienta computacional*, conjuntamente con la *guía de actividades*, siendo motivo de otro trabajo, el análisis de la puesta en escena con el consiguiente análisis de resultados.

Puesta en escena

La puesta en escena está orientada y articulada por la siguiente *guía de actividades*, que integra e incluye como elemento necesario la herramienta didáctica computacional. Sin entrar en detalles de fundamentación, se menciona que existe en el diseño de la guía una componente *constructivista* del conocimiento.

ALGEBRA y GEOMETRIA ANALITICA

Secuencia didáctica: Definición general de cónicas y concepto de excentricidad

Actividad N° 1

Utilizando la herramienta didáctica computacional en una actividad de *exploración*, *describa* la variación de la forma de la elipse cuando varía el parámetro e –excentricidad-, esto es, como varía la longitud de los semiejes cuando e cambia en la variación acotada $0<e<1$ y manteniendo la distancia focal constante.

Actividad N° 2

Utilizando la herramienta computacional determine: ¿A qué curva geométrica se aproxima la elipse cuando la excentricidad se aproxima a cero? ¿Los focos se aproximan o alejan de la recta directriz? Si la excentricidad se lleva al valor extremo $e = 1$ –manteniendo la distancia focal constante- ¿en qué lugar geométrico se transforma la elipse?

Actividad N° 3

Analizar el último resultado de la actividad anterior con el objetivo de determinar que condición o *presupuesto hipotético* de la definición de cónica *no* se verifica.
¿la circunferencia es una cónica? justifique la respuesta en función de la definición de cónica.

Actividad N° 4

Escriba la fórmula de la excentricidad en términos de los dos semiejes de la elipse, esto es, a semieje mayor, b semieje menor.
Si la curva analizada es una circunferencia ¿la fórmula de excentricidad que valor arroja?
¿Este valor es compatible con la definición de excentricidad para cónicas? Porque.

Actividad N° 5

Describa utilizando la herramienta didáctica computacional como cambia la forma de la elipse cuando e –excentricidad- permanece constante y se varia la distancia focal, es decir, si c aumenta ¿Qué sucede con a y b, los semiejes?

Actividad N° 6

Determine algebraicamente a en función de c y e. Determine algebraicamente b en función de c y $e\neq1$. ¿se puede decir que fijado e, los valores a y b crecen linealmente con c?
Organizador: A partir de la ecuación

$$(1-e^2)x^2-2cx+y^2+c^2=0$$

Dividiendo m.a.m. por $(1-e^2)$ y complete cuadrados.

Actividad N° 7 'problema que involucra la puesta en juego del concepto de excentricidad y permite analizar el efecto geométrico del término xy'

Determinar la ecuación de la cónica que tiene por foco el punto F(-1,-2) directriz la recta l: $x - y + 1 = 0$ y excentricidad $e = ½$

Breve secuencia didáctica

a)visualización: utilizando la herramienta didáctica computacional de geogebra (archivo conica-excentricidad) genere la directriz, fije el foco y la excentricidad para determinar el lugar geométrico.

b) Plantee la definición de excentricidad $e = \frac{PF}{PL}$. Deduzca la ecuación de la cónica.

Actividad N° 8 'familia de parábolas auto-ortogonales'

Visualización: Utilizando la herramientas didáctica computacional correspondiente a trayectorias ortogonales, ajuste el valor de los focos y determine sus coordenadas de las parábolas que resulten auto-ortogonales. ¿Cuál es el nombre técnico que recibe una familia de cónicas con esas características sobre el foco?

Actividad N° 9 'Cónicas homofocales y trayectorias ortogonales'

a) Visualización: Utilizando la herramientas didáctica computacional correspondiente a familia de cónicas homofocales, ajuste el valor del parámetro para i= 2,3,4 y para c=2,3,4 y verifique el enunciado: las familias de cónicas homofocales dan lugar a trayectorias ortogonales.

b) A partir de la visualización dar la ecuación de dos cónicas ortogonales.

c) Probar que la familia de cónicas $\frac{x^2}{a^2+i} + \frac{y^2}{b^2+i} = 1$ es *homofocal*.

Conclusiones:

La ingeniería didáctica del diseño de esta secuencia se fundamenta en las teorías de imagen conceptual, pero adicionalmente se construye con los aportes conceptuales de *situaciones didácticas*, conjuntamente con la utilización de la computadora como herramienta cognitiva que favorece el diseño de "situaciones de acción, formulación y validación" e "institucionalización" (Brosseau, 1986)

La secuencia fue puesta en escena, y el dato más relevante –desde la perpectiva de un breve análisis cualitativo- es la *participación activa* –logro importante- del alumno en la construcción de su propio aprendizaje, mucho mayor que cuando las actividades se realizan *sin* herramienta didáctica computacional. Más en detalle, sobre los trabajos entregados por los alumnos se observaron algunas dificultades en el plano del desarrollo algebraico, particularmente en la actividad N°6. Sintéticamente, indica que la ingeniería didáctica puesta en juego es acertada.

REFERENCIAS

- Lehmann C. H. (1989). Geometria Analitica. Editorial Limusa.
- Hitt, F. (2000). Construcción de conceptos matemáticos y metacognitivos.
- Brousseay, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.
- Aguilar, P., Farfán, R. M., Lezama, J. & Moreno, J. (1997). Estudio didáctico de la función 2x. *Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. México. Grupo Editorial Iberoamérica, 19-23.
- Tall D. & Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular referencia to limits and continuity.