

**CB 32****ENSEÑANZA DE GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA USANDO  
GEOGEBRA****Marisa Reid & Nilda Etcheverry****Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam.  
Uruguay 151. Santa Rosa, La Pampa. Argentina.  
*mareid@exactas.unlpam.edu.ar*****Palabras Clave:** Enseñanza-Aprendizaje, Geometría, GeoGebra.**RESUMEN**

A raíz de un diagnóstico de la situación de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la Educación Secundaria, donde se detectan dificultades y limitaciones para su abordaje, surge la necesidad de fomentar la importancia de los aprendizajes en geometría, en busca de un mejor desarrollo de las potencialidades de nuestros estudiantes, dejando de lado el aprendizaje memorístico excesivo de conceptos, teoremas y fórmulas; la simple apoyatura de unos conceptos en otros previos; y la temprana eliminación de la intuición como instrumento de acceso al conocimiento geométrico.

Se trabajó con alumnos y docentes de primer año de una escuela secundaria en una propuesta de mejora hacia la enseñanza-aprendizaje de la Geometría con utilización de un software como recurso didáctico.

A través de este trabajo y producto de reflexiones y acciones sobre la práctica misma de la enseñanza de la Geometría en los primeros años de la escuela secundaria se motivó al docente, para iniciarlo en la planificación, diseño y producción, con diferentes actividades con uso de software para apoyar el acto didáctico en relación a contenidos geométricos.

**INTRODUCCIÓN**

Van Hiele (1986) propuso un modelo que ayuda a explicar cómo, en el proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento geométrico de los estudiantes transcurre por una serie de niveles. Para dominar el nivel en que se encuentra y así poder pasar al nivel inmediato superior, el alumno debe cumplir ciertos procesos de logro y aprendizaje. Este modelo distribuye el conocimiento escalonadamente en cinco niveles de razonamiento, secuenciales y ordenados. Estos niveles son producto de la experiencia y la instrucción, van desde el reconocimiento o visualización, al análisis, la deducción informal o clasificación, la deducción formal y el rigor.

En el primer nivel de razonamiento (“visual”) los alumnos identifican formas y figuras de acuerdo a su apariencia global, en su conjunto, pudiendo incluir en sus descripciones atributos irrelevantes, generalmente sobre la forma, el tamaño, la posición de las figuras o sus elementos destacados. No son capaces de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras. Pueden, sin embargo, producir una copia de cada figura particular o reconocerla. Pueden nombrarla, identificarla o compararla basándose sólo en su apariencia. Por ejemplo, sobre las propiedades que distinguen un rombo de un rectángulo, podrán hablarnos de “el rectángulo es más largo”, “el rombo es más picudo”, etc. Es decir, se limitan

a la descripción del aspecto físico de las figuras, sin entrar en otras relaciones de semejanzas y diferencias que puedan existir entre ellas.

En el segundo nivel (“análisis”), los alumnos identifican figuras de acuerdo a sus partes o elementos y sus propiedades particulares (por ejemplo, un rombo es una figura con cuatro lados iguales). Aprenden terminología apropiada para describirlas. Las propiedades de las figuras se establecen experimentalmente mediante una serie de actividades como la observación, medición o manipulación. Ninguna propiedad implica cualquier otra porque cada una se percibe de manera aislada y sin relacionar. Estas propiedades emergentes se utilizan para conceptualizar clases de figuras.

En el tercer nivel (“deducción informal”), los alumnos son capaces de establecer relaciones entre las propiedades de la figura (por ejemplo, en un cuadrilátero, la igualdad de ángulos opuestos implica el paralelismo de los lados) y las relaciones entre figuras (por ejemplo, un cuadrado es considerado un rectángulo porque tiene todas las propiedades de un rectángulo). Por lo tanto, pueden deducir propiedades de una figura y reconocer tipos de figuras por simple deducción lógica. Se pueden comprender las primeras definiciones que describen las interrelaciones de las figuras con sus partes constituyentes.

En el cuarto nivel (“deducción”) los estudiantes pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra, es decir, realizar razonamientos lógicos formales. Las demostraciones tienen sentido y se siente su necesidad como único medio para verificar la verdad de una afirmación.

En el quinto nivel (“rigor”), los estudiantes pueden entender los aspectos formales de la deducción, como el establecimiento y la comparación de los sistemas matemáticos. Este nivel tiene que ver con el aspecto formal de la deducción. Los alumnos están capacitados para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos. Pueden apreciar la consistencia, la independencia y la completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría propuestos por Hilbert. Este último nivel, por su alto grado de abstracción debe ser considerado en una categoría aparte.

El paso de un nivel a otro es independiente de la edad. Muchos adultos se encuentran en un nivel porque no han tenido oportunidad de enfrentarse con experiencias que les invitasen a pasar al nivel siguiente. Un profesor, a través de los contenidos y los métodos de enseñanza, puede provocar el paso de un nivel a otro.

Los alumnos de primer año de la Educación Secundaria por lo general han alcanzado el nivel 1 y comienzan a transitar el nivel 2. En esta etapa, los estudiantes deben ir más allá de la identificación de figuras geométricas básicas y análisis de las propiedades de las figuras, y deben aprender a reconocer las relaciones entre los tipos de formas (nivel de deducción informal).

Proponemos el uso de software de geometría dinámica GeoGebra en la enseñanza de la Geometría para la transición de un nivel de razonamiento al siguiente de la teoría de Van Hiele.

El desarrollo de estos niveles de razonamiento depende de la enseñanza, es decir de experiencias educativas que fomenten y no obstaculicen su desarrollo. La enseñanza destinada al desarrollo de los distintos niveles de razonamiento debe incluir secuencias de actividades que comiencen con una fase exploratoria, continúen con la consolidación de los conceptos geométricos y vocabulario relacionado y terminen con actividades que les ayuden a integrar lo que han aprendido con lo que ya saben.

En el desarrollo de las actividades, hacemos uso del software GeoGebra que permite visualizar, repetir, comunicar y comprobar propiedades a partir del movimiento de las figuras. Lo cual es necesario para que los alumnos obtengan una firme comprensión de las relaciones geométricas dando particular énfasis al estudio de las figuras y sus propiedades.

En la enseñanza de la geometría, los rompecabezas pueden ser utilizados como un recurso para la enseñanza de conceptos matemáticos específicos, inspirando la observación de los alumnos, la imaginación, el análisis de las formas, la creatividad y el pensamiento lógico (Yang y Chen, 2010). Basándonos en esto, el uso de un software de geometría dinámica como GeoGebra provee un entorno que se puede utilizar para mejorar el nivel de pensamiento geométrico. Las manipulaciones son consideradas una herramienta de aprendizaje, permitiendo que los estudiantes muevan, giren y roten objetos en la pantalla a través de la manipulación del teclado y el mouse (Moyer, Bolyard y Spikell 2002; Sedig, 2008). En este estudio, hemos adoptado el uso de rompecabezas con tecnología para apoyar el aprendizaje. La metodología de investigación es esencialmente cualitativa. Según Goetz y LeCompte (1988), la investigación educativa tiene como finalidad prioritaria apoyar los procesos de reflexión y crítica, para tratar de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ello este trabajo es esencialmente descriptivo, que nos permite analizar la realidad dentro del aula y de la sala de computación en cuanto a la enseñanza de la Geometría y el uso de tecnología como recurso.

### **NUESTRA EXPERIENCIA**

En el marco del programa de “Plan de mejoras” del colegio secundario “9 de Julio” de la ciudad de Santa Rosa (La Pampa) se llevó a cabo una experiencia con alumnos y docentes de primer año durante dos meses en el segundo semestre del año 2012 en la enseñanza aprendizaje de la Geometría usando GeoGebra.

Se inició a los docentes en la realización de actividades apoyados con el software GeoGebra, para abordar particularmente nociones elementales de Geometría en la sala de computación, que permitieran motivar y/o reforzar los aprendizajes trabajados en el aula.

Como etapa inicial, los docentes investigan y trabajan en un taller para la realización de materiales, donde bajo un trabajo cooperativo de los docentes elaboran actividades que junto a otras actividades elaboradas por las investigadoras formarían parte de las actividades que se llevarían a cabo en la sala de computación para reforzar la actividad docente de aula en la enseñanza de contenidos geométricos.

Todas las actividades fueron diseñadas y producidas respetando, el contexto y las necesidades propias del grupo de alumnos y docentes participantes. En este sentido, se elaboraron materiales atendiendo a necesidades particulares de cada curso, guiados por la planificación de proyectos de aula de cada grupo de docentes.

Los alumnos trabajaron en la sala de computación, distribuidos en parejas por cada computadora y se les dio libertad para elegir a su compañero de equipo. En cada clase había 24 alumnos, correspondientes a dos divisiones de Primer Año y los temas abordados correspondieron al eje: Figuras y cuerpos geométricos.

### **ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA DESARROLLAR EN LA SALA DE COMPUTACIÓN**

El desarrollo de las actividades del eje de Geometría se desarrolla en tres partes.

#### **I. Manejo del software GeoGebra.**

Se desarrolla a partir de un tutorial de GeoGebra con modificaciones realizadas por los docentes para introducirlos principalmente en la construcción de figuras geométricas.

## II. Actividades con Rompecabezas.

Los distintos grupos de alumnos usan los rompecabezas que aparecen en sus pantallas y que fueron realizados por los docentes a partir de un cuadrado de dos, tres y siete piezas. Usando el software GeoGebra forman todas las figuras posibles con movimientos de una o varias piezas.

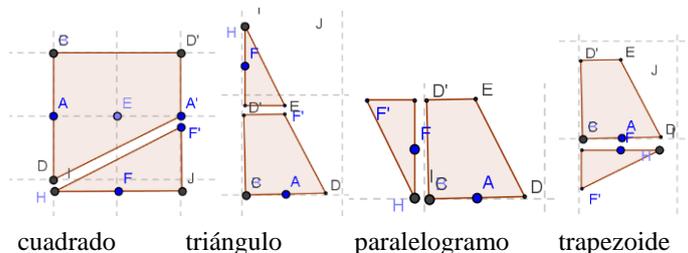
Las siguientes actividades planteadas a los alumnos utilizando los distintos rompecabezas ilustran la secuencia de tareas para el desarrollo de razonamiento geométrico del nivel visual y apoyar la transición hacia el nivel superior.

A) Rompecabezas de dos piezas (con un corte que va desde un vértice hasta el punto medio de un lado).

¿Cuántas figuras distintas se pueden hacer haciendo coincidir los lados de igual longitud? ¿Qué figuras son? ¿Puedes nombrarlas? ¿Cómo pueden asegurar que las piezas determinan cada una de las figuras antes mencionadas?

Los alumnos colocaron las dos piezas juntas a lo largo de los lados que tienen la misma longitud para armar diferentes figuras.

Tuvieron que explorar y manipular las formas geométricas dadas y construir otras y dar la denominación de la figura obtenida según su aspecto global. Algunas de las figuras presentadas fueron:



También se les solicitó que respondieron una pregunta basada en lo aprendido tal como: ¿Cómo pueden asegurar que las piezas determinan cada una de las figuras antes mencionadas? Los estudiantes tenían que reconocer las propiedades de las figuras y las clasificaron de acuerdo con sus propiedades.

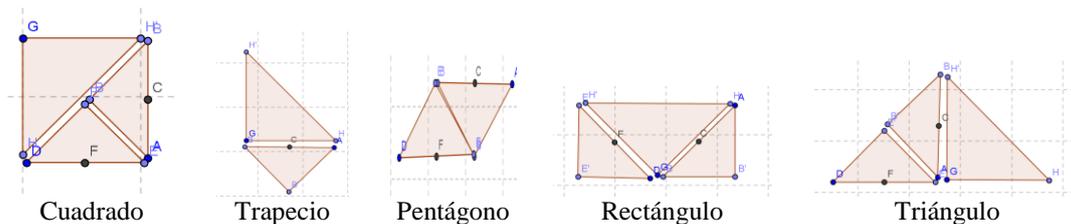
Esto ayudó a establecer lo que sabían, lograr precisión en el lenguaje que utilizaban. En algunos grupos el rol docente fue muy importante para ayudar a los alumnos a ir más allá de la simple descripción de observaciones geométricas planteando preguntas en las que tuvieran que justificar esas observaciones.

Los alumnos se beneficiaron al trabajar colaborativamente en parejas con el tipo de discusión y argumentación que debe utilizarse para articular el razonamiento geométrico, logrando ir de descripciones informales e imprecisas a explicaciones bien organizadas basadas en las propiedades de las figuras.

B) Rompecabezas de tres piezas (tres triángulos, dos de ellos iguales)

¿Qué figuras geométricas puedes armar utilizando dos o tres piezas?

Calcula el área y el perímetro de cada una de ellas. ¿Qué puedes concluir?

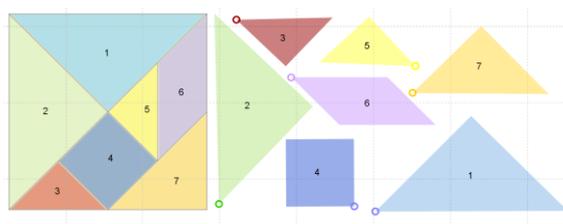


Es importante trabajar el concepto de figuras que tienen la misma área y distinta forma y perímetro, comprobar relaciones entre áreas, componer y descomponer unas formas en otras, etc.

C) Un tangram es un rompecabezas chino que consta de siete piezas geométricas. Es un juego que requiere de ingenio, imaginación y, sobre todo, paciencia. En la enseñanza de la matemática el tangram se constituye en un material didáctico ideal para desarrollar habilidades mentales, mejorar la ubicación espacial, conceptualizar sobre las fracciones y las operaciones entre ellas, comprender y operar la notación algebraica, como un medio que permite introducir conceptos geométricos, deducir relaciones, fórmulas para área y perímetro de figuras planas y un sin número de conceptos que abarcan desde el nivel preescolar, hasta el nivel medio e incluso la educación superior.

La configuración geométrica de sus piezas (cinco (5) triángulos rectángulos isósceles, un (1) cuadrado y un (1) paralelogramo), así como su versatilidad por las composiciones posibles con sólo siete figuras, hacen de él un juego matemático.

Después de analizarse la conveniencia o no, en términos del tiempo de su construcción con GeoGebra, se decidió dar un tutorial para que los alumnos que quisieran lo realizaran en horario extracurricular y en aula trabajar con un tangram interactivo con el que se pueden realizar múltiples actividades, desde construir figuras a estudiar conceptos de geometría.



Se proponen las siguientes actividades:

1. Forma triángulos con las piezas del tangram. Utiliza primero una sola pieza, luego, dos, tres, hasta llegar a utilizar las siete piezas.

a) ¿Cuántos triángulos puedes formar en cada caso?

b) Clasifica los triángulos que encuentres en función:

b.1) De la medida de sus ángulos.

b.2) De la medida de sus lados.

c) ¿Cuál es el triángulo de mayor perímetro? ¿Cuál es el de mayor área?

2. Forma rectángulos con las piezas del tangram. Utiliza diferentes números de piezas hasta llegar a utilizar las siete.

a) ¿Cuántos rectángulos puedes formar en cada caso?

b) ¿Cuál es el de mayor perímetro?

c) ¿Cuál es el de mayor área?

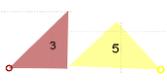
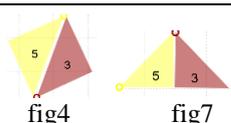
3. Forma todos los cuadrados de distinto tamaño posibles con distintas piezas del tangram. Determinar las respectivas áreas.

4. ¿Qué combinación de piezas dan como resultado otra pieza del tangram?

4.1. ¿Qué parte del tangram es cada pieza utilizada?

4.2. ¿Qué parte es cada una de las piezas utilizadas de la figura obtenida?

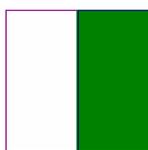
4.3. ¿Qué parte del tangram es la figura obtenida? Encuentra todas las alternativas posibles y completa el cuadro siguiente. (Se ejemplifica una posibilidad)

Nº de piezas	Piezas	Figura obtenida	4.1	4.2	4.3
Dos			Cada una es 1/16	Cada una es 1/2	El cuadrado obtenido es 1/8

### I. Actividad de integración

A modo de evaluar si los contenidos y su forma de trabajarlos fueron adquiridos y están disponibles como herramienta para resolver distintas situaciones se les entrega el siguiente enunciado:

*Dado un cuadrado, una forma de construir dentro de él un polígono cuya área sea la mitad, consiste en tomar los puntos medios de dos lados opuestos y unirlos con un segmento. Investiga otros procedimientos.*



A partir de este enunciado sencillo, todos los alumnos de la clase pueden abordarlo. Los alumnos encuentran un entorno “amigable”, la pregunta es muy abierta y obtienen soluciones con rapidez que los sumergen en el trabajo. Muy pronto obtienen algunos procedimientos que en muchos casos son repetición de otros anteriores.

Este es el momento de recordarles que el enunciado pide obtener nuevos procedimientos. Algunas de las soluciones obtenidas en el orden en que aparecieron fueron:



Figura 1

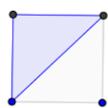


Figura 2

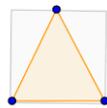


Figura 3

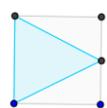


Figura 4

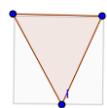


Figura 5

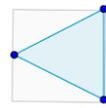


Figura 6

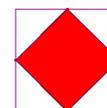


Figura 7

Inicialmente sólo controlan unas pocas herramientas que van ampliando con la exploración y la resolución de problemas.

Al usar GeoGebra, la principal ventaja frente a otros recursos (libro, pizarra, lápiz y papel), es que las figuras dejan de ser estáticas y del plano saltan a la pantalla para presentarse en forma de animaciones que nos permiten observarlas desde distintos puntos de vista. Pero no es sólo el movimiento de las figuras lo que les proporciona interés para el aprendizaje de la matemática, lo realmente innovador es que los diseños pueden ser concebidos para que podamos modificar ciertos parámetros en la construcción y comprobar los efectos de nuestros cambios.

Se establece muy claramente la diferencia entre “construir” y “dibujar”. Construir es utilizar las propiedades de la figura para obtener su representación y dibujar es reproducir la imagen mental que tenemos de una figura. Por ejemplo, podemos dibujar un cuadrado situando cuatro vértices en el lugar correcto sin que haya relaciones entre ellos o podemos construir un cuadrado mediante perpendiculares y usando otras herramientas (giro, ángulos, distancia, etc) conseguir que los lados sean iguales y los ángulos rectos. El primer cuadrado dibujado dejará de serlo en cuanto mueva uno de sus vértices, mientras que el segundo que ha sido construido se desplazará, se hará más grande o más pequeño pero mantendrá las características propias del cuadrado (perpendicularidad e igualdad de medidas).

Para dar forma al trabajo exploratorio y provocar la reflexión sobre los procedimientos se pide a los alumnos que, para cada solución obtenida no basta con el dibujo, han de cumplir tres requisitos:

1. Dar el nombre de la figura obtenida a partir de las definiciones
2. Describir el proceso seguido para reproducirla, haciendo uso de una correcta utilización de la terminología matemática.
3. Probar que la solución es realmente la mitad del cuadrado, y aquí hay que tener presente cuál es el significado de demostrar para alumnos de estas edades y también que esas demostraciones han de surgir de los conocimientos de los estudiantes, no del profesor.

GeoGebra tiene grandes posibilidades en la exploración de situaciones. Desde un punto de vista numérico medimos distancias, ángulos y áreas para hacer la comprobación in situ de conjeturas, pero también nos podemos colocar desde una perspectiva geométrica para observar la relación entre los objetos de una construcción y sus propiedades lo que facilitará la adopción de nuevas estrategias de resolución.

En clase se debatieron las ideas geométricas y se reflexionó sobre los procedimientos obtenidos y de los obstáculos didácticos que presentaron los alumnos tales como: reconocer la figura 7 como un rombo por su posición, no como un cuadrado; a las figuras 4, 5 y 6 no darles la categoría de triángulos isósceles, y la figura 2 no reconocerla como triángulo rectángulo también por la posición.

Dadas las características del software y teniendo en cuenta las planificaciones de los docentes junto a la economía de desarrollo en cuanto al tiempo disponible, otra forma de trabajar es que el profesor puede diseñar applets dinámicos en GeoGebra (o en el software que utilice) o tomarlos de Internet, que ayuden a sus alumnos a comprender los conceptos geométricos y las relaciones entre ellos.

## CONCLUSIONES

En este escenario los alumnos lograron:

- Planificar el trazado de figuras geométricas sobre la base del análisis de sus propiedades al identificar, relacionar, comparar, construir y analizar a la vez que relacionaron estos conceptos con otros tales como fracciones y operaciones básicas con fracciones.
- Comprender los efectos que provocan en el perímetro o en el área de cuadrados y rectángulos la variación de la medida de sus lados.

GeoGebra posibilita la percepción de características en las figuras, además su dinamismo ofrece la posibilidad de manipular los objetos de estudio, permitiendo poner en evidencia aspectos invariantes de estos, es decir, en un gráfico se pueden desplazar algunos elementos que lo constituyen, y se obtienen nuevos gráficos que puede o no conservar las características del inicial, lo anterior da cuenta de algunas ventajas que se tienen con la geometría dinámica, y que en comparación con la geometría estática permite la generalización por medio de la manipulación.

La actuación del profesor en esta fase es muy importante para romper la dinámica de páginas llenas de dibujos sin ninguna explicación. El objetivo principal es que en clase se debata sobre las ideas geométricas y se reflexione sobre los procedimientos obtenidos para que se favorezca el aprendizaje de los contenidos iniciales de la geometría y una mejor representación de los problemas e intuición de las características de la geometría y aumente el grado de motivación.

Aprender Geometría utilizando rompecabezas fue percibido por la mayoría de los estudiantes como una experiencia agradable que les permite descubrir nuevas cosas y dar rienda suelta a

su creatividad. Además el entorno de aprendizaje con el apoyo de software en actividades colaborativas facilitó el aprendizaje de conceptos geométricos.

Esta experiencia proporciona sugerencias sobre cómo los docentes pueden estructurar actividades para fomentar el desarrollo del pensamiento geométrico entre sus alumnos. El planteo de actividades simples pero ricas puede utilizarse con una adecuada gestión e interacción entre los alumnos y el profesor, no sólo para estimular el pensamiento geométrico, sino también fomentar el interés y motivación hacia aprendizaje de la Geometría.

## REFERENCIAS

- Goetz, J. P. & Lecompte M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Morata: España.
- Moyer, P. S., Bolyard, J. J. & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 372-377.
- Sedig, K. (2008). From Play to Thoughtful Learning: A design strategy to engage children with mathematical representations. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 27(1), 65-101.
- Siew, N. M., C. L. Chong & M. R. Abdullah, (2013). Facilitating students' geometric thinking through van Hiele's phase-based learning using tangram. *J. Soc. Sci.*, 9: 101-111.
- Yang, J. C. & Chen, S. Y. (2010). Effects of gender differences and spatial abilities within a digital pantomimes game. *Comput. Educ.*, 55(3), 1220-1233.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insights: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press: Orlando, Florida.