CB 30

UN MODELO EPISTEMOLOGICO DE REFERENCIA DEL ALGEBRA LINEAL: UN RECORRIDO POSIBLE CON LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Marcelo Lorenzo, Mei Lee, Fabio Prieto, Daniela Scarímbolo & Nora Ferreyra

Universidad Nacional de La Pampa (Argentina)
Uruguay 151. Santa Rosa. La Pampa.
noraf@exactas.unlpam.edu.ar, mlorenzo@exactas.unlpam.edu.ar

Palabras Clave: álgebra, cálculo aritmético, proceso de algebrización, sistemas de ecuaciones.

RESUMEN

En el marco de un proyecto de investigación analizamos las dificultades del estudio del álgebra en el nivel universitario tomando como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Creemos que uno de los factores que inciden directamente en el fracaso de nuestros alumnos, podría ser la existencia, dentro de las instituciones, de un Modelo Epistemológico Dominante (MED), que condiciona la tarea docente y provoca cierta desarticulación e incomprensión en los estudiantes.

En este trabajo mostramos una manera de abordar el proceso de algebrización para ser desarrollado con alumnos de primer año del Profesorado de Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam). Según el análisis de trabajos anteriores se ha observado que los estudiantes alcanzan un primer nivel en el proceso de algebrización cuando, según los trabajos de Gascón (1994) y Bolea (2003), estos alumnos deberían alcanzar la modelización funcional que corresponde al tercer nivel.

INTRODUCCIÓN

En diversos estudios se han reconocido las dificultades y el alto grado de fracaso de los estudiantes de primer año de las carreras universitarias al enfrentar el estudio del Algebra. (Scarímbolo & Ferreyra, 2008; Parodi et al., 2009)

En el marco del proyecto de investigación: **"*El álgebra como instrumento de modelización: Condiciones y restricciones para su introducción en la formación inicial universitaria*",** actualmente en curso, hemos abordado esta problemática siguiendo la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), desde esta perspectiva, creemos que uno de los factores de este fracaso podría ser la existencia, dentro de las instituciones, de un modelo epistemológico dominante (MED), que mediatiza y condiciona la tarea docente y provoca cierta desarticulación e incomprensión en los estudiantes.

Investigaciones previas, publicadas por Bosch (2000), Gascón (1994) y Bolea (2003) entre otros, han establecido el carácter prealgebraico de la matemática presente en la enseñanza obligatoria, en la cual el MED resulta ser el de una aritmética generalizada.

La ausencia del álgebra como instrumento modelizador dificulta el planteo y la discusión de expresiones desde la perspectiva funcional y con ello la emergencia de problemas vinculados a nuevos conocimientos matemáticos.

En el trabajo presentado en el III Congreso de la TAD, Ruiz, Bosch y Gascón (2011) advierten sobre las consecuencias de la aritmetización escolar del álgebra. Al respecto señalan:

> *"..el carácter prealgebraico de las matemáticas que se estudian en la enseñanza obligatoria constituye uno de los factores esenciales de las discontinuidades observadas en el sistema educativo….*
> *…la ausencia del uso del instrumento algebraico dificulta enormemente el desarrollo de la modelización algebraico-funcional lo que obstaculiza la emergencia de las cuestiones problemáticas que podrían dar sentido al cálculo diferencial."* (Ruiz, Bosch y Gascón, 2011. p.745)

Como docentes del Profesorado en Matemática de la UNLPam, preocupados por la enseñanza del álgebra, indagamos acerca del MED en nuestra institución con el fin de hacerlo visible como problema, debatiendo sobre la necesidad de contar con un nuevo paradigma que aporte a superar las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje. Partiendo de este debate hemos elaborado un modelo acerca de lo que creemos es una manera de llevar adelante el proceso de algebrización con nuestros alumnos.

MARCO TEÓRICO

Dentro de la investigación en didáctica de la matemática, el Programa Epistemológico se caracteriza por integrar "lo pedagógico" y "lo matemático" y analizar las actividades matemáticas que se desarrollan en las distintas instituciones de enseñanza como medio para estudiar e interpretar el funcionamiento del sistema didáctico. Este programa, según Gascón (2002), aborda el problema de la Educación Matemática desde el análisis de las prácticas matemáticas que se llevan a cabo en las diferentes instituciones (no sólo docentes).
En el ámbito del enfoque epistemológico en didáctica de la matemática podemos considerar diferentes teorías, una de ellas es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Dicha teoría postula que en las instituciones nunca pueden estudiarse problemas aislados, y centra la atención en las soluciones obtenidas y su aplicación a otros problemas, cada vez más complejos que originarán nuevas organizaciones matemáticas. En esta Teoría el modelo de la actividad matemática institucional, está centrado en la noción de "Organización Matemática". Dicha organización matemática comprende un saber matemático modelizado por medio de organizaciones didácticas para su enseñanza. Toda **Organización Matemática** está compuesta por cuatro clases de elementos fundamentales:

- Cierto número de **tareas** o problemas matemáticos considerados en una institución dada.
- Un conjunto de **técnicas** que permiten realizar las tareas, es decir una manera sistemática de resolver las cuestiones propuestas.
- Una **tecnología** que describe las técnicas utilizadas y justifica su pertinencia para resolver las tareas en las que se aplica. Dicha tecnología integra los conceptos, permite relacionar distintas técnicas y producir otras nuevas.
- Una **teoría**, como segundo nivel justificador, que permite fundamentar las descripciones y justificaciones tecnológicas. La teoría justifica las tecnologías, tal como éstas justifican las técnicas.

Este sistema formado por los cuatro elementos conforma una organización matemática que consideramos la unidad mínima de análisis de la actividad matemática.
El caso particular del álgebra escolar ha sido motivo de investigaciones desde el enfoque de la TAD, algunas de ellas han abordado, cuestiones referidas al proceso de algebrización de organizaciones matemáticas en la Escuela Secundaria. Particularmente, se ha caracterizado el modelo dominante en dicha institución escolar como una "aritmética generalizada" que se

distingue de su interpretación como instrumento de modelización (Bolea, 2003). Desde este punto de vista, al dejar de pensar en el álgebra como una prolongación de las prácticas aritméticas, es posible investigar la emergencia de un modelo más general.
En el marco de nuestra investigación, adoptamos como modelo epistemológico de referencia (MER), el propuesto en el trabajo de Ruiz, Bosch y Gascón (2011), mencionado anteriormente, en el cual se amplía el modelo epistemológico del álgebra para articularlo con la modelización algebraica con parámetros.
Se asume entonces, el álgebra, como instrumento de modelización y se espera que un estudiante sobre todo en el profesorado, alcance lo que dicho trabajo denomina un *tercer nivel de algebrización.* Este nivel se caracteriza por una Organización Matemática (OM) con una fuerte generalización de las ecuaciones, en las cuales no se limita el número de variables y no hay distinción entre parámetros e incógnitas. Es en este nivel donde se considera que culmina el proceso de algebrización elemental.
Siguiendo el trabajo de Ruiz et al., consideramos como "problema aritmético" a aquel que puede resolverse mediante una simple cadena de operaciones a partir de los datos del problema. Las técnicas más usuales en la resolución de este tipo de problemas se manifiestan en discursos verbales, que también pueden escribirse como una cadena estructurada y consiste en lo que se denomina *Programa de Cálculo Aritmético* (PCA).
Para alcanzar el tercer nivel mencionado anteriormente, se plantean tres etapas en el proceso de algebrización que describiremos brevemente.
La primera etapa se caracteriza por la necesidad de considerar un PCA como un todo, pasar de una formulación retórica a una escrita y manipularlo globalmente. Surgen nuevas técnicas, sobre todo de simplificación, para resolver los nuevos problemas.
La segunda etapa se identifica con la necesidad de igualar dos PCA que tengan los mismos argumentos numéricos. Aparecen nuevas técnicas como las de cancelación, que tienen como objetivo obtener ecuaciones equivalentes y no sólo PCA equivalentes como pasaba en la primera etapa.
Finalmente, la tercera etapa se identifica con el momento de generalizar fuertemente el cálculo ecuacional puesto que se hace necesario no limitar el número de variables y no hacer ninguna distinción entre incógnitas y parámetros. El tipo de situaciones que provoca tal ampliación se relaciona con la variación simultánea de dos o más variables y cómo impacta en la variación del PCA.

UN RECORRIDO POSIBLE…

Con el fin de caracterizar lo que a nuestro criterio deberían ser tareas para alcanzar el nivel de algebrización requerido en la formación de Profesores de Matemática, supongamos que los alumnos poseen el instrumento algebraico y partamos de un problema aritmético para poder ejemplificar los distintos tipos de actividad matemática que aparecen en las sucesivas etapas del proceso de algebrización. Trabajaremos con lo que podríamos denominar *"Sistema de los sistemas de ecuaciones"*. En este sistema, que llamaremos SE, se pueden plantear inicialmente problemas resolubles mediante la ejecución de un PCA en forma retórica y el patrón análisis – síntesis.
El primer problema que sugerimos es:

> P_0: *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método que creas conveniente, escribiendo claramente el conjunto solución:*

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \quad (1) \\ x + 4y + 2z = 6 \end{cases}$$

Efectivamente, para la resolución de este tipo de problemas no es necesario disponer de una traducción simbólica del procedimiento, alcanza con poder resolver las operaciones que implica la reducción de la matriz ampliada por operaciones elementales sobre las filas, llegando a que el sistema admite la solución única $x = 0; y = 1; z = 1$.

Sin embargo, si comenzamos a plantear algunas cuestiones de naturaleza tecnológica, relativas a por qué se obtiene el resultado que se obtiene, qué condiciones se requieren para que tenga solución, cuál es el dominio de validez de las técnicas utilizadas, entre otras, podemos avanzar en el proceso de algebrización. Para ello, nos vemos en la necesidad de ampliar el sistema inicial utilizando modelizaciones progresivas las cuales proponemos a continuación.

Identificamos el primer nivel de algebrización con aquellas tareas en las que es necesario considerar el PCA cómo un todo, traducir su formulación retórica a una escrita y manipularlo globalmente.

A continuación proponemos una tarea en la cual, una pequeña modificación a los datos del problema P_0 da lugar a un nuevo tipo de tareas que hace necesario explicitar el proceso de resolución:

> P_1: *Encontrar condiciones sobre los parámetros a, b y c para que el sistema sea compatible*

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ 2x + 3y + 2z = b \quad (2) \\ x + 4y + cz = 3c \end{cases}$$

Puesto que en este nuevo sistema se incluyen parámetros, y además no se pide un resultado numérico sino una relación, resulta evidente que estamos ante un problema situado ya en un primer grado de algebrización. Surge aquí la necesidad de utilizar nuevas técnicas que permitan realizar operaciones algebraicas utilizando símbolos en lugar de constantes reales (elementos tecnológicos). Después de resolver el sistema se obtienen las siguientes relaciones:

$$c - 1 \neq 0 \vee a - b + 3c = 0 \quad (3)$$

para que el sistema sea compatible.

En esta primera etapa están aquellos problemas cuya resolución requiere la resolución de una ecuación, como una subclase del tipo de problemas P_1. Un ejemplo de este tipo de problemas es el que sigue:

> P'_1: *Si sabemos que c = 2, Dar al menos 3 pares de valores a y b para que el sistema sea compatible determinado y tres para que sea compatible indeterminado.*

En este problema, podría indagarse acerca del campo de validez de la técnica utilizada, puesto que se puede analizar la posibilidad de considerar sistemas lineales “rectangulares”, sistemas no lineales, etc. Esta actividad pondría de manifiesto la utilización de un discurso tecnológico que justificaría la resolución del problema y sustentaría la técnica en el contexto del mismo.

El paso al segundo nivel de algebrización se identifica con la necesidad de igualar dos PCA que contengan los mismos argumentos no numéricos. Para ello, proponemos problemas como el siguiente:

P_2: *Los siguientes sistemas tienen el mismo conjunto solución. ¿Qué relación existe entre a, b y c?*

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ 2x + 3y + 2z = b \\ x + 4y + z = 3c \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} 5x + y - z = b \\ 5x + 6y + 9z = 15 \\ 5x + 5y + 7z = 5c \end{cases} \qquad (5)$$

Puesto que en los problemas anteriores se trabajan estas relaciones, se supone que los estudiantes, economizando tiempo y esfuerzo, podrán recuperar las reducciones de las matrices ampliadas, introduciendo los cambios necesarios.
Siguiendo la categorización de Ruiz Munzón, el problema que se presenta a continuación corresponde a un subconjunto particular de los problemas que identifican el segundo grado de algebrización:

P_2': *Los siguientes sistemas tienen el mismo conjunto solución. Si el valor de a es 4, ¿Qué podemos decir de los valores de b y c?*

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ 2x + 3y + 2z = b \\ x + 4y + z = 3c \end{cases} \qquad (6)$$

$$\begin{cases} 5x + y - z = b \\ 5x + 6y + 9z = 15 \\ 5x + 5y + 7z = 5c \end{cases} \qquad (7)$$

La mencionada autora señala como un riesgo el describir la razón de ser del álgebra con la resolución de problemas de este tipo, puesto que se limita a la resolución de ecuaciones, dando un valor concreto a una o más variables.
El tercer nivel de algebrización estaría dado por tareas donde se requiere una fuerte generalización, sin hacer la distinción de parámetros ni incógnitas y la posibilidad de estudiar la variación de algunas variables en conjunto a partir de la variación de otras.
Para alcanzar este nivel de algebrización, proponemos problemas cómo el siguiente:

P_3: *¿Se puede determinar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones en función de sus coeficientes y sus términos independientes?*

Para lograr que los alumnos establezcan conjeturas, podríamos comenzar el análisis formal de los sistemas cuadrados, lo cual desembocaría en la noción de determinante y la condición de que este debe ser distinto de 0 para garantizar compatibilidad. Ejemplificamos una tarea de este tipo para un sistema de 2x2.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (8)$$

Luego de analizar los casos triviales de alguno de los coeficientes nulos, podríamos suponer el caso más general de los $a_{ij} \neq 0$ y proceder por ejemplo de este modo:

Si multiplicamos la primera ecuación por a_{22} *y la segunda por* a_{12} *y las restamos, obtenemos el sistema equivalente:*

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1 a_{22} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{cases} \quad (9)$$

Que tiene solución si y sólo si el término contenido entre paréntesis es distinto de cero. De allí podríamos institucionalizar la idea de determinante y la condición ya citada.
Para sistemas rectangulares se podría trabajar de manera análoga, tratando de llegar a la condición de independencia lineal de las columnas o de rango como condiciones de compatibilidad.
En la secuencia que se ha iniciado con el problema P_0 hasta su desarrollo que ha finalizado en el problema P_3 se ha llevado a cabo la ejemplificación de un proceso completo de modelización algebraica que permite dar información acerca de la estructura misma del tipo de problemas que emergen del sistema considerado.

CONSIDERACIONES FINALES

La secuencia que acabamos de proponer debería organizar el diseño de diferentes propuestas para llevar a cabo la génesis del álgebra lineal en los primeros años de la universidad, particularmente en la formación de profesores. Tenemos la firme creencia de que el MED de nuestra institución, donde teoría y práctica corren por carriles aparentemente paralelos para los estudiantes, no favorece que los mismos logren el nivel de algebrización adecuado para su futura práctica profesional. Si bien el paso por los dos primeros años en la universidad les permite, en general, superar el modelo del álgebra como aritmética generalizada, no es visible que logren el tercer nivel de algebrización, asociado al modelo del álgebra como instrumento de modelización algebraico-funcional puesto que en las tareas que se les encomiendan están lejos de poder analizar la dependencia entre diferentes variables, ni siquiera mediante el uso de preguntas orientadoras. A partir de indagaciones realizadas en trabajos anteriores (Scarímbolo & Ferreyra, 2008; Parodi et al., 2009, Lorenzo et al., 2012), se observa que los estudiantes no lograron esa fuerte generalización del cálculo ecuacional a la que se refiere Munzón. Esto los priva del manejo de tareas que se requieren para estudiar funciones aisladas, esto es, para explorar acerca de las relaciones internas entre los elementos de una misma función y para analizar su comportamiento global. De manera que no logran apropiarse de técnicas que les permitan abordar las tareas planteadas y, como consecuencia, no alcanzan a desarrollar tecnologías y/o teoría pertinente para este nivel.

Consideramos que la herramienta que hemos descrito debiera facilitar el estudio del álgebra como instrumento de modelización en los primeros años del nivel superior, particularmente en el desarrollo del álgebra lineal. Se prevé realizar experimentaciones con estudiantes para evaluar la eficacia de nuestro diseño y el tipo de tareas propuestas en el proceso de aprendizaje, con el fin de ampliar la visión sobre el álgebra y articular con algunas otras organizaciones matemáticas que aparecen en el plan de estudios de Profesorado en Matemática.

REFERENCIAS

- Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Monografías del seminario matemático. Prensa Universitarias de Zaragoza: Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza.
- Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad matemática”. IV Simposio SEIEM. Huelva, España.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona: ICE-Horsori
- Gascón, J. (1994): Un nouveau modéle de l'algébre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée, *Petit x*, 37, 43-63.
- Lorenzo, M.; Ferreyra, N. & Parodi, C. (2012). “Análisis del grado de algebrización en una tarea de Álgebra Lineal de la UNLPam”, *Memorias de la IV REPEM*, pp 152 – 159, EdUNLPam.
- Parodi, C.; Rechimont, E.; Ferryra, N.; Castro, N. & Scarímbolo, D. (2009). “El trabajo algebraico de los ingresantes”. Comunicación XXXII Reunión de Educación Matemática, Universidad Nacional de Mar del Plata. Resumen en http://www.mdp.edu.ar/exactas/uma2009/pdf/sesiones/Sesion4.pdf.
- Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). “Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización”, *Actas III CITAD: Un Panorama de la TAD*, pp 743-765, Centre de Recerca Matemàtica, Campus de Bellaterra, Barcelona.
- Scarímbolo, M. & Ferreyra, N. (2008). “El modelo de la proporcionalidad en ingresantes al nivel universitario”, *Memorias de la III REPEM*, pp 152 – 159, EdUNLPam.