CB 28

PARTICIONES DE ENTEROS Y DIAGRAMAS DE FERRER

José Luis Aguado

Facultad de Ciencias Exactas. UNICEN. Pcia. de Buenos Aires
jaguado@exa.unicen.edu.ar

Palabras Claves: particiones, Ferrers, Euler, número pentagonal.

RESUMEN

El genial matemático Leonard Euler (1707-1783) pudo concebir asombrosas fórmulas de cálculo. Por ejemplo, descubrió la ley que rige los coeficientes de z^n en el desarrollo infinito $\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-z^i\right)$. En teoría de números y de representaciones de grupos finitos aparece el problema de partir un entero positivo n en sumandos positivos y buscar el número de dichas particiones. Los diagramas de Ferrers representan las particiones como modelos de puntos. Proveen una herramienta útil para visualizar las particiones, porque moviendo el diagrama se obtiene un mecanismo para probar biyecciones entre clases de las particiones. Aquí nosotros desarrollamos una demostración del Teorema de Euler (teorema 7) y su conexión con los números pentagonales utilizando particiones y diagramas de Ferrers.

PARTICIONES NO ORDENADAS

Este número se representa por $p(n)$. Dos descomposiciones se consideran iguales si difieren en el orden de los sumandos. Por ejemplo

$p(0)=1$: (convención)

$p(1)=1$: 1=1

$p(2)=2$: 2=2+0=1+1

$p(3)=2$: 3=3+0=2+1=1+1+1

$p(4)=4$: 4=4+0=3+1=2+1+1=1+1+1+1

Se desea obtener $p(n)$ para un n dado, sin tener que listar todas las particiones. Necesitamos una herramienta para estar informados sobre el número de 1's, 2's,..., etc., utilizados para escribir n.

Por ejemplo la serie $1+z+z^2+\Lambda$ lleva la cuenta de los 1's, la serie $1+z^2+z^4+\Lambda$ lleva la cuenta de los 2's, en general, la serie $1+z^{2i}+z^{3i}+z^{4i}\Lambda$ lleva la cuenta de los i's, etc.

Entonces, para calcular $p(n)$ hay que calcular el coeficiente de z^n en $f(z)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1-z^i\right)}$

El término *no ordenada* puede llevar a confusión, pero es el que se utiliza en la literatura. En realidad, una partición de n, por ejemplo 4=2+1+1 determina una sucesión no creciente 2,1,1, (o no decreciente 1,1,2) de manera que el $p(n)$ número cuenta, de hecho, el número de sucesiones no crecientes (o no decrecientes) de enteros no negativos tal que la suma de sus elementos es n.

Damos ahora algunos valores de $p(n)$.

n	1	5	10	15	20	25	30	40	50
$p(n)$	1	7	42	176	627	1958	5604	37338	204226
n	100			200					
$p(n)$	190569292		3972999029300						

Estos ejemplos muestran que $p(n)$ crece muy rápidamente con *n*. Hay una estimación asintótica de Rademacher.
Definimos en general
$p(n,k) =$ *número de particiones de* n *como suma de enteros del conjunto* $\{1,2,\ldots,k\}$.
El orden de los sumandos no interesa, como antes. Definimos también $p(0,k)=1$.
Observemos que $p(n,n)=1$.
Es inmediata la siguiente relación de recurrencia: $p(n,k)=p(n,k\text{-}1)+p(n\text{-}k,k)$.
En efecto, el número de particiones en las que k no se utiliza como sumando es $p(n,k\text{-}1)$, y por otro lado, el número de particiones en las que k aparece como sumando es $p(n\text{-}k,k)$.
También, definimos:
$p_{\mathrm{d}}(n,k)=$ *número de particiones de* n *como suma de enteros distintos del conjunto* $\{1,2,\ldots,k\}$.
Vale la relación de recurrencia $p_{\mathrm{d}}(n,k)=p(n,k\text{-}1)+p(n\text{-}k,k\text{-}1)$, ya que k no puede ser usado dos veces como sumando.
Aquí, $p_{\mathrm{d}}(1,1)=1$ y $p_{\mathrm{d}}(n,1)=0$ si $n>1$. Además, $p_{\mathrm{d}}(n,n)=p_{\mathrm{d}}(n)$ es número de particiones de n en sumandos distintos.
Usando las ecuaciones de recurrencia para $p(n,k)$ podemos escribir:

$$p(n,k)=p(n,k\text{-}1)+p(n\text{-}k,k\text{-}1)+p(n\text{-}2k,k\text{-}1)+\ldots$$

Luego, es suficiente observar que $p(n,1)=1$ (cualquier número natural puede ser descompuesto de una sola forma como suma de 1's), porque entonces se calcula $p(n,2)$ utilizando la relación de recurrencia, después $p(n,3)$, y así sucesivamente.

DIAGRAMAS DE FERRERS

Podemos representar una partición de *n* por medio de un *diagrama de Ferrers*, el cual consiste en una matriz de puntos, con tantas filas como sumandos no nulos tiene la partición, y en cada fila hay tantos puntos como el valor del sumando. Por ejemplo

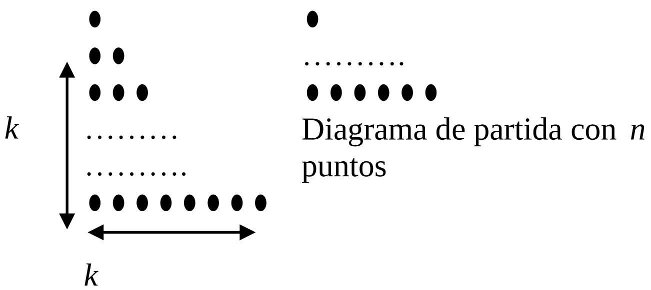
•	es el diagrama
•	correspondiente
• •	a la partición
• • •	de 7=1+1+2+3

Como el orden de los sumandos no cuenta, el diagrama puede disponerse de manera que las filas están en orden no decreciente de sus longitudes yendo de arriba hacia abajo. Además, los primeros puntos de cada fila se disponen en una misma columna. Un diagrama de Ferrers dispuesto así se denomina *normal*.

Mediante estos diagramas, pueden probarse muchas propiedades de las particiones. Por ejemplo:

Proposición 1. *El número de particiones de n en no más de k sumandos, coincide con el número de particiones de $n+k$ en exactamente k sumandos.*
Demostración: En efecto, el diagrama normal de Ferrers que representa una partición de n en no más de k sumandos, es una matriz de n puntos con no más de k filas.
Agreguemos a este diagrama, una columna al principio con k puntos.
Obtenemos un diagrama con $n+k$ puntos ubicados en exactamente k filas, lo que representa una partición de $n+k$ con exactamente k sumandos. Recíprocamente, dado un diagrama de Ferrers de este tipo, es decir, con $n+k$ puntos ubicados en exactamente k filas, si le quitamos la primera columna, tenemos un diagrama con n puntos ubicados en no más de k filas, lo que representa una partición de n en no más de k sumandos. Esta correspondencia entre los dos tipos de diagramas es claramente biyectiva. Esto demuestra la Proposición.
El siguiente es un teorema de Euler.

Teorema 2 (De Euler). *El número de particiones de n en no más de k sumandos coincide con el número de particiones de $n+\frac{k(k+1)}{2}$ en exactamente k sumandos distintos.*
Demostración. El diagrama normal de Ferrers que representa una partición de n en no más de k sumandos, es una matriz de n puntos con no más de k filas.
Agreguemos a este diagrama, un triángulo rectángulo isósceles formado por k filas y después lo reducimos a su forma normal.
Como el número de puntos en el triángulo es $\frac{k(k+1)}{2}$, obtenemos un diagrama formado por $n+\frac{k(k+1)}{2}$ puntos, con exactamente k filas. Además, todas las filas en este nuevo diagrama son de distinta longitud, ya que la longitud de las filas del diagrama original no disminuyen yendo hacia abajo, y las longitudes de las filas del triángulo aumentan en 1 yendo en la misma dirección.



Pero entonces, este diagrama representa una partición de $n+\frac{k(k+1)}{2}$ en exactamente k sumandos distintos.
Recíprocamente, si de un diagrama formado por $n+\frac{k(k+1)}{2}$ puntos, con exactamente k filas, todas distintas, se quita un triángulo rectángulo isósceles, con k filas, entonces llegamos a un diagrama que representa una partición de n en a lo sumo k sumandos.

DIAGRAMAS DE FERRERS DUALES

Dado un diagrama de Ferrers, podemos "trasponerlo", es decir, lo rotamos 90º y lo reducimos a la forma normal. Entonces las filas se transforman en columnas y las columnas en filas, por lo que podemos suponer que es una suerte de trasposición. Dado un diagrama, el obtenido por esta operación se llama su dual o traspuesto. Evidentemente, la dualización es una transformación que es su propia inversa. Así, los diagramas de Ferrers de particiones de un n dado se pueden agrupar de a pares, uno y su dual. Naturalmente hay diagramas que coinciden con su dual, es decir, son autoduales.

Veamos algunas aplicaciones de la dualidad.

Proposición 3. $p(n,k)$ *es exactamente el número de particiones de* n *en no más de* k *sumandos*.

Demostración. En efecto, un diagrama de Ferrers representando una partición de n con elementos de $\{1,2,\ldots,k\}$, está formado por n puntos, de manera que en cada fila no hay más de k puntos.

Pero entonces su diagrama dual tiene a lo sumo n filas, es decir corresponde a una partición de n en no más de k sumandos.

Proposición 4. *El número de particiones de* n *en exactamente* k *sumandos coincide con el número de particiones de* n *con elementos de* $\{1,2,\ldots,k\}$*, en las que aparece* k *al menos una vez.*

Demostración. En efecto, un diagrama de Ferrers representando una partición de n con k sumandos, debe tener k filas, de manera que su traspuesto tiene una fila con k puntos.

Proposición 5. *El número de particiones de* n *en sumandos pares coincide con el número de particiones de* n *en las cuales, cada número aparece con multiplicidad par (se sobreentiende que algunos sumandos pueden no aparecer, ya que cero es par)*.

Demostración. Un diagrama de Ferrers representando una partición de n en sumandos pares, debe tener un número par de puntos en cada fila, pero, desde que cada fila se transforma en columna en el traspuesto, cada columna de este traspuesto tiene un número par de puntos, así que si miramos el número de elementos de la última columna , debe haber un número par de filas que tengan la misma cantidad de puntos que la última fila, quitando todas estas filas del diagrama, obtenemos de nuevo un diagrama donde cada cada columna tiene un número par de puntos y se puede hacer inducción.

Proposición 6. El número de particiones de n en sumandos impares coincide con el número de particiones de n en las cuales, cada número con excepción del mayor, aparece con multiplicidad par, y el mayor aparece con multiplicidad impar.

Demostración. Un diagrama de Ferrers representando una partición de n en sumandos impares, debe tener un número impar de puntos en cada fila. Cada columna de su traspuesto tiene un número impar de puntos, así que si quitamos la última fila (que representa al mayor de los sumandos), el diagrama remanente está en las condiciones de la Proposición 5. Tanto si hay filas de este diagrama remanente que tienen la misma cantidad de puntos que la última fila del diagrama original, como si no, el número de veces en que aparece el mayor debe ser impar.

LA FÓRMULA DE EULER

Vamos a estudiar los desarrollos del tipo $f_n(z)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-z^i\right)$ para aproximarnos al "producto infinito" $f_n(z)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-z^i\right)$.

Primero vemos que para cada n se verifica $f_{n+1}(z)=f_n(z)\left(1-z^{n+1}\right)=f_n(z)-z^{n+1}f_n(z)$

Esto muestra que para calcular el coeficiente de z^n en el producto infinito, basta desarrollar $f_n(z)$.

Naturalmente, también obtenemos en este desarrollo los coeficientes de z^k para $k\le n$.
Por ejemplo, para $n=10$

$$\prod_{i=1}^{10}\left(1-z^i\right)= z^{55}-z^{54}-z^{53}+z^{50}+z^{48}+z^{44}-z^{43}-z^{42}-z^{41}-2z^{40}+z^{37}+z^{36}+z^{35}+z^{34}+$$
$$3z^{33}-z^{30}-z^{29}-2z^{28}-2z^{27}-z^{26}-z^{25}+3z^{22}+z^{21}+z^{20}+z^{19}+z^{18}+$$
$$-2z^{15}-z^{14}-z^{13}-z^{12}+z^{11}+z^{7}+z^{5}-z^{2}-z+1$$

El coeficiente de z^{10} es cero. Observemos que no podemos asegurar que el coeficiente de z^{11} es 1.Vemos que hay muchos coeficientes iguales a cero. La pregunta es si podemos caracterizar los n tales que el coeficiente de z^n es cero.

La respuesta es sí, y está dada por el teorema de Euler siguiente.

Teorema 7 (De Euler). *En el desarrollo* $\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-z^i\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ *el coeficiente* a_n *es no nulo, sólo para* n *de la forma* $n=\frac{\left(3k^2\pm k\right)}{2}$ *donde* k *es un número natural, y en este caso* $a_n=(-1)^k$

Demostración. Por lo que vimos antes, basta calcular el coeficiente de z^n en $f_n(z)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-z^i\right)$. El término $a_n z^n$ de este producto es suma de productos de la forma $\left(-z^{i_1}\right)\left(-z^{i_2}\right)\Lambda\left(-z^{i_s}\right)$ con $i_1+i_2+\Lambda+i_s=n$. Además, observemos que los sumandos son todos distintos, ya que provienen de multiplicar factores del tipo $\left(1-z^i\right)$.Y estas sumas recorren todas las posibles particiones de n en suma de elementos distintos, aportando 1 cuando el número de sumandos es par, y -1 cuando el número de sumandos es impar. Esto muestra que el coeficiente a_n se obtiene como la diferencia entre el número de particiones de n en una cantidad par de sumandos distintos y el número de particiones de n en una cantidad impar de sumandos distintos. Llamemos $p_d{}^0(n)$ al primero de los números anteriores y $p_d{}^1(n)$ al segundo.

Para demostrar el teorema, vamos a probar que si n no es de la forma $n=\frac{\left(3k^2\pm k\right)}{2}$ entonces $p_d{}^0(n)=p_d{}^1(n)$, y si n es de la forma anterior, entonces $p_d{}^0(n)-p_d{}^1(n)=(-1)^k$. Es decir, si k es par $p_d{}^0(n)$ supera en 1 a $p_d{}^1(n)$ y si k es impar, entonces $p_d{}^1(n)$) supera en 1 a $p_d{}^0(n)$

Ahora describimos un método para transformar un diagrama de Ferrers con un número par de filas en uno con un número impar de filas y viceversa.
Como consideramos solamente diagramas con filas todas distintas, este diagrama estará formado por trapecios ubicados uno sobre otro.

```
● ●
● ● ●
● ● ● ● ●
● ● ● ● ● ● ●
```

Designemos con k el número puntos de la primera fila del diagrama, y con m el número de filas del trapecio inferior. Por ejemplo, en el diagrama anterior es $k = 2$ y $m = 3$.
Supongamos primero que el diagrama tiene al menos dos trapecios, y que además, es $k \leq m$.
En este caso, eliminamos la primera fila del diagrama y prolongamos las últimas k filas del trapecio inferior con un punto.

```
● ●
● ● ●          ● ● ●
● ● ● ●        ● ● ● ● ●
● ● ● ● ●      ● ● ● ● ● ●
```

Entonces el número de puntos del diagrama obtenido es el mismo que el del diagrama original, pero la paridad del número de filas ha cambiado. Es claro que esta operación puede realizarse con el primer trapecio de arriba y cualquiera que se halle más abajo que satisfaga la condición.
Se puede realizar exactamente la misma transformación si el diagrama es un trapecio y $k \leq m-1$.

```
● ●
● ● ●          ● ● ●
● ● ● ●        ● ● ● ● ●
● ● ● ● ●      ● ● ● ● ● ●
```

Ahora supongamos que el diagrama tiene al menos dos trapecios y que no hay ninguno distinto del primero que verifique $k \leq m$. Entonces para cualquier trapecio que no es el primero debe ser $k > m$.

```
● ● ●
● ● ● ● ●
● ● ● ● ● ●
```

Tomemos uno de ellos, y elegimos un punto en cada fila de este trapecio y formemos con estos la primera fila de un diagrama, y las restantes filas son las del diagrama original. Esto se puede hacer pues es $k > m$.

```
● ● ●            ● ●
● ● ● ● ●        ● ● ●
● ● ● ● ● ●      ● ● ● ●
                 ● ● ● ● ●
```

De nuevo vemos que el diagrama obtenido tiene sus filas todas distintas, pues hemos sacado puntos de filas del trapecio inferior. Además, este diagrama tiene la misma cantidad de puntos

que el diagrama original, pero una fila más, por lo que la paridad del número de filas ha variado.
También podemos realizar este tipo de transformaciones a un diagrama que es un trapecio y $m \leq k-2$.

```
          ● ●
● ● ● ●    ● ● ●
● ● ● ● ●  ● ● ● ●
```

Es fácil verificar que las transformaciones descriptas son inversas entre sí: compuestas de las dos maneras dan la identidad.
De esto se deduce que para los diagramas con las condiciones anteriores, es decir que no sean un sólo trapecio o si siendo un sólo trapecio verifican $k \leq m-1$ o $m \leq k-2$, existe una biyección entre los que representan una partición de n en un número par de sumandos distintos y los que representan una partición de n en un número impar de sumandos distintos. Entonces para los n que tengan estos diagramas debe verificarse $p_d{}^0(n) = p_d{}^1(n)$.
Queda por establecer cuáles diagramas no admiten tales transformaciones. Está claro que deben ser un sólo trapecio y que no verifique la condición $k \leq m-1$ ni la condición $m \leq k-2$, esto es, debe ser $k > m-1$ y $m > k-2$, lo que significa $k-2 < m < k+1$, por lo que debe ser $m = k-1$ o $m = k$, lo que nos da dos tipos de trapecio, por ejemplo:

```
● ● ●        ● ● ●
● ● ● ●      ● ● ● ●
● ● ● ● ●
  k=m         k=m+1
```

En general, para un trapecio de $k \times m$, es decir k puntos en la primera fila y m filas, el número de puntos que hay en este trapecio es:

$$k+(k+1)+(k+2)+\Lambda+(k+(m-1)) = \sum_{i=0}^{m-1}(k+i) = \frac{1}{2}m(2k+m-1)$$

Entonces, si $k = m$ llegamos a $n = \frac{(3k^2-k)}{2}$

Si $m = k-1$ tenemos $n = \frac{m(2(m+1)+m-1)}{2} = \frac{(3m^2+m)}{2}$

Observar que estamos escribiendo n en función del número de filas del trapecio.
Es fácil ver que las funciones $f(x) = \frac{1}{2}(3x^2+x)$ y $g(x) = \frac{1}{2}(3x^2-x)$ son ambas inyectivas para x no negativo, además si x e y son enteros positivos entonces la identidad $\frac{1}{2}(3x^2+x) = \frac{1}{2}(3y^2+y)$ no tiene solución en enteros positivos, lo que muestra que existe a lo más un k tal que $n = \frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$. Entonces, si n es de esta forma y k es par, tenemos una partición de n en un número par de sumandos distintos, y un único diagrama que no admite correspondiente, por lo que, y si k es impar, será $p_d{}^0(n) - p_d{}^1(n) = (-1)^k$.

LOS NÚMEROS PENTAGONALES

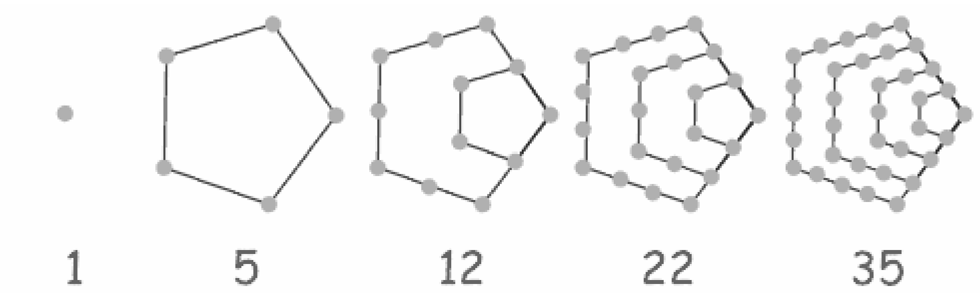
Si calculamos $\frac{1}{2}\left(3k^2 \pm k\right)$ para $k = 1, \Lambda, 10$ tenemos

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{2}\left(3k^2 - k\right)$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
$\frac{1}{2}\left(3k^2 + k\right)$	2	7	15	26	40	57	77	100	126	155

Como puede comprobarse fácilmente, los números de la forma $w(k) = \frac{1}{2}\left(3k^2 - k\right)$ resultan ser las sumas parciales de la progresión aritmética 1, 4, 7, 10, 13,...,3*n*+1,...

Además $w(-k) = \frac{1}{2}\left(3k^2 + k\right)$

Los números $w(k)$ para *k*>0 están relacionados con los pentágonos.



Los números $w(k)$ para *k* entero llaman *números pentagonales*.

CONCLUSIONES

Creemos que incluir en trabajos prácticos y talleres ejercicios que inviten a “jugar con diagramas” como los de Ferrers y sus transformaciones tiene un indudable saldo positivo en la formación de futuros profesores de matemática. La demostración del teorema de Euler sobre las particiones utilizando una elegante argumentación gráfica basada en diagramas de Ferrers, pone de manifiesto que horas de computación no sustituyen aún una idea geométrico-combinatoria genialmente explotada.

REFERENCIAS

- Aguado, J. L., G. Diez, L. Rébora (2000). *Funciones Generadoras. Ordinarias y Exponenciales*. UNAN, Managua.
- Niven, I. (1995). Matemática de las opciones: o cómo contar sin contar. Red Olpímpica.
- Vilenkin, N. I. (1972). ¿ De cuantas formas?: combinatoria. MIR.