CB 26

MODELIZACIÓN ALGEBRAICA EN EL CÁLCULO DE SUMAS DE NÚMEROS CONSECUTIVOS: ENTRE CONOCIMIENTOS AVANZADOS Y CÁLCULOS ARITMÉTICOS

Edith Noemí Gorostegui & Diego Francisco Vilotta

Universidad Nacional de Nordeste –
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura
Avda. Libertad 5600 – Corrientes Capital.
gorosteguie@gmail.com, dfvilotta@gmail.com

Palabras Clave: hacer matemáticas, resolución de problemas, procedimientos de resolución.

RESUMEN
En este trabajo se analiza un conjunto de problemas relacionados con la transición aritmética-álgebra y sus posibles procedimientos de resolución. Estos procedimientos fueron identificados a partir del análisis a priori y enriquecidos a partir de la experiencia de trabajo con alumnos futuros profesores de Matemática.
Mostramos cómo se podría discutir con los estudiantes del profesorado algunas cuestiones matemáticas involucradas en el pasaje de la aritmética al álgebra, a partir del análisis de las características de sus producciones, las discusiones matemáticas que habilitan estas producciones y los límites y potenciales de cada una en el camino hacia un modelo algebraico.

CONTEXTUALIZACIÓN DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA
En la convicción de que la posibilidad de que los profesores -en el ejercicio futuro de su profesión- contemplen un tipo de práctica matemática que involucre plenamente a sus alumnos, se halla fuertemente condicionada por las tareas y reflexiones que desarrollen durante su formación.
Entre estas tareas y reflexiones consideramos necesario incluir actividades que les permita comprender los posibles razonamientos de los alumnos del secundario - razonamientos aritméticos en el caso que estamos considerando aquí – al mismo tiempo que puedan relacionarlos con los propios, con la matemática que aprendieron en el nivel superior y verlos en su riqueza como verdaderos conocimientos matemáticos.
La necesidad de considerar las propuestas antes mencionadas se fundamenta también en que la presentación tan formalizada de la Matemática en la enseñanza superior, aleja con frecuencia a los futuros docentes de las posibilidades de recurrir a razonamientos aritméticos para resolver un problema, por lo que es necesario problematizar para pensar la enseñanza del nivel secundario, nivel donde justamente los alumnos recurrirán a razonamientos aritméticos. Esta problematización es ineludible dado que estos razonamientos podrían ser vistos por los futuros profesores sólo en términos de precarios o como falta de conocimientos, y no como verdaderos conocimientos.
Una de las temáticas importantes que será objeto de trabajo en la futura tarea de los profesores en formación lo constituyen los objetos del álgebra en el marco de la transición aritmética-

álgebra. Con el fin de discutir sobre algunos conocimientos involucrados en esta temática y reflexionar sobre la futura tarea docente, elaboramos un conjunto de problemas y planteamos a distintos grupos de alumnos en materias del plan de estudios del profesorado tales como: “Taller de problemas matemáticos” y “Algebra I”. Recogimos de esta experiencia una variedad importante de procedimientos posibles y elegimos comunicar en este relato algunas producciones matemáticas y reflexiones que habilitan los problemas planteados.

PROPUESTA DE ACTIVIDADES

Actividad 1: Hallar el resultado de sumar los 10 números consecutivos del 11 hasta el 20.
Actividad 2: Si en vez de sumar los 10 números consecutivos anteriores se quisiera sumar otros números consecutivos como por ejemplo del 34 al 43 ¿sería posible utilizar un procedimiento similar al que utilizaste para el primer problema?
Actividad 3: Analizar las posibilidades y limitaciones de todos los procedimientos propuestos en el primer problema para hallar el resultado de la suma anterior.
Actividad 4: Si ahora se quisiera sumar otros 10 números consecutivos como por ejemplo del 96 al 105 ¿es posible utilizar los mismos procedimientos que resultaron pertinentes en los casos anteriores?
Actividad 5: Si en vez de sumar 10 números consecutivos se quisiera sumar otras cantidades de números consecutivos, ¿qué procedimientos de los utilizados anteriormente consideran más apropiados? ¿Habría más de un procedimiento apropiado? Considerar para este análisis cantidades pares e impares de números consecutivos.
Actividad 6: Proponer un modelo (fórmula) que permita calcular la suma de “n” números consecutivos.
Cada uno de estos problemas se plantea con un objetivo. El primero permite que todos los alumnos encuentren un modelo aritmético de resolución y puedan validar el resultado obtenido, dado el tamaño y características de los números involucrados. El objetivo es que todos puedan tener un procedimiento de base para calcular la suma y que dé lugar a distintos procedimientos.
A partir de este primer problema se proponen variaciones en las siguientes actividades con el objetivo de que los alumnos vayan construyendo ideas que les permita arribar a sucesivas generalizaciones hasta la construcción de un modelo algebraico general.
El criterio que guía la secuenciación propuesta es el planteo de preguntas que los lleve a analizar las limitaciones y potenciales de cada procedimiento, en el camino hacia la construcción de procedimientos cada vez más generales.

ANÁLISIS DE LOS PROCEDIMIENTOS Y DISCUSIONES POSIBLES

Actividad 1

Esta primera actividad habilita dos tipos de procedimientos: los que se apoyan en las características de los números atendiendo al sistema de numeración y otros más relacionados con las propiedades de los números a nivel estructura y regularidades que se podrían detectar en las sumas parciales.
Veamos algunos procedimientos:
Procedimiento 1:

$$11+12+13+14+15+16+17+18+19+20=$$
$$=(10+\mathbf{1})+(10+\mathbf{2})+\cdots+(10+10)=$$
$$=\mathbf{10}\times 10+(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)=\mathbf{100}+\mathbf{55}=155$$

Procedimiento 2:

11+(11+1)+(11+2)+(11+3) +….+(11+9) =
=10x11+(1+2+3+4+5+6+7+8+9)= 110+45=155

Procedimiento 3:

$$\underbrace{11+20}_{31}+\underbrace{12+19}_{31}+\underbrace{13+18}_{31}+\underbrace{14+17}_{31}+\underbrace{15+16}_{31}=5\times 31=155$$

Procedimiento4:

$$\underbrace{11+19}_{30}+\underbrace{12+18}_{30}+\underbrace{13+17}_{30}+\underbrace{14+16}_{30}+\underbrace{15+20}_{35}=4\times 30+35=155$$

Procedimiento 5:

20+ (19+1) + (18+2) + (17+3) + (16+4) + 15 +10+10+10+10= 5x20+10x4+15= 155

Procedimiento 6:

$$11+12+13+14+15+16+17+18+19+20=$$
$$=15{,}5-4{,}5+15{,}5+4{,}5+15{,}5-3{,}5+15{,}5+3{,}5+\cdots=10\times 15{,}5=155$$

Procedimiento 7:

$$\frac{20\times 21}{2}-\frac{10\times 11}{2}=155$$

En el procedimiento 1 se descompone cada número de la lista aprovechando la proximidad al diez que tienen los mismos y la facilidad que proporciona multiplicar la unidad seguida de ceros por cualquier número.

En el procedimiento 2 se descompone cada número en función del primer número de la lista. Esta descomposición permite pensar en una suma de dos resultados, por un lado el resultado del producto del primer número (11) por 10 y por otro lado, el resultado de la suma de los naturales del 1 al 9.

En el procedimiento 3 se agrupan de a dos los sumandos con el criterio de obtener sumas de un mismo resultado, en este caso 5 sumas que dan 31. Esto permite obtener la suma total multiplicando por 5 la suma parcial, en lugar de realizar las 5 sumas.

El procedimiento 4 es una variante del anterior que busca agrupar sumas que den números más “redondos” quedando una última suma que, si bien es fácil de calcular por ser un múltiplo de 5 más un múltiplo de 10, corresponde a un valor distinto a los otros sumandos.

El procedimiento 5 arma cinco sumas que dan 20, cuatro sumas que dan 10 y se deja el 15 sin incluirlo en sumas parciales. Para armar estas sumas parciales se agrega a los números “grandes” de la lista una cantidad quitada a los números más “chicos” con el fin de obtener sumandos iguales 20 y 10 respectivamente que se puedan multiplicar en lugar de sumar.

En el procedimiento 6 se tiene en cuenta la distancia de cada número al centro de la lista que, en este caso al ser una cantidad par de números da un número decimal (15,5) que no está en la lista. La suma de los 10 números se obtiene multiplicando por 10 al valor numérico que le corresponde al centro de la lista.

En el procedimiento 7 se adapta una fórmula conocida por los alumnos para calcular la suma de los “n” primeros números. Al cálculo que permite determinar la suma de los primeros 20 números naturales se le resta el cálculo que permite calcular la suma de los 10 primeros números naturales.

El análisis de las diferencias entre cada uno de estos procedimientos permite caracterizar a cada uno y elaborar unas conclusiones provisorias respecto de cuestiones generales involucradas en la suma de 10 números consecutivos. Para seguir trabajando sobre estas cuestiones se proponen las siguientes actividades.

Actividades 2, 3 y 4

La Actividad 2 se plantea para que cada alumno analice el potencial o la limitación del procedimiento empleado en la Actividad 1 para calcular esta nueva suma (del 34 al 43) en la que se mantiene la cantidad de términos, pero el primer número está más alejado de un múltiplo de 10.

En el desarrollo de la Actividad 3 se busca que los alumnos analicen y discutan las siguientes cuestiones:

Los procedimientos 1, 4 y 5 están ligados al sistema de numeración decimal y deberán modificarse bastante para ser utilizados en el problema que se platea en la Actividad 2.

Por ejemplo para resolver la segunda suma el procedimiento 1 debería adaptarse de la siguiente manera:

$$34+35+36+37+38+39+40+41+42+43=(30+4)+(30+5)+\cdots+40+(40+1)+(40+2)+(40+3)=$$
$$=6\times 30+4\times 40+(4+5+6+7+8+9+1+$$

O de la siguiente

$$34+35+36+37+38+39+40+41+42+43=$$
$$=(30+4)+(30+5)+\cdots+(30+12)+(30+13)=$$
$$=10\times 30+(4+5+6+7+8+9+10+11+12+13)=\cdots$$

Sin embargo los procedimientos 2, 3, 6 y 7 no sufren grandes modificaciones porque se seguirá multiplicando por 10 el primer número, se seguirá sumando los números del 1 al 9, se multiplicará por 10 el número que correspondería al centro de la lista, se sumaran todos los naturales hasta el último de la lista y se le restará la suma de los naturales hasta el comienzo de la lista, etc.

Como se puede observar la discusión sobre los procedimientos que se sostienen y los que no permiten avanzar a un nivel de mayor generalidad no está directamente ligada al uso de las letras.

Con la Actividad 4 se refuerza lo analizado en la Actividad 3.

Actividad 5

En esta actividad terminan de *caer* los procedimientos apoyados en el sistema de numeración, porque se vuelve muy difícil su adaptación al variar la cantidad de sumandos de la lista.

Los procedimientos que siguen en pie sufren modificaciones que obligan a pensar cómo simbolizar la situación.

A modo de ejemplo mostramos algunas cuestiones que surgen al adaptarse los procedimientos cuando cambia la cantidad de sumandos y no se especifica el primer número de la lista:

- Habría expresiones como: “en lugar de multiplicar por 5 se multiplica por la mitad del total, si son 30 números se multiplica por 15 o sea 30/2”
- Al no especificarse el primer término se obliga a escribir los términos de la suma en función del primero, lo que llevaría a escrituras como las siguientes (si se considera 30 términos):

$$a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+29)=[a+(a+29)]+[(a+1)+(a+28)]+\cdots=$$

- Cuando la cantidad de sumandos es impar el centro de la lista coincide con el número que está en el medio, ya no será un número decimal que no forma parte de la lista y el procedimiento no sufre mayores variaciones. La fórmula para calcular la suma de 31 números será: $S=31\cdot(a+15)$, es decir la cantidad de términos por el número que está en el lugar 16 de la lista.

En la actividad 5 se sientan las bases más definitorias para las producciones que se plantean en la actividad 6.

Actividad 6:

En esta última actividad se aclara que la cantidad de términos es “n” lo que obliga a generalizar sobre la cantidad de términos y sobre el primer término de la suma. Durante la Actividad 5 se preguntaba por distintas cantidades de términos pero no se pedía la fórmula para n términos.

Los diversos procedimientos aritméticos llevan a diversos procedimientos algebraicos y a distintas fórmulas.

A modo de ejemplo mostramos los procedimientos algebraicos que se desprenden del procedimiento 2 y del procedimiento 3.

Procedimiento algebraico correspondiente al procedimiento 2:

$$a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+(n-1))=na+(1+2+3+\cdots+n-1)=\boldsymbol{na}+\frac{\boldsymbol{(n-1)n}}{\boldsymbol{2}}$$

Procedimiento algebraico correspondiente al procedimiento 3:

$$a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+(n-1))=$$

$$)=[a+(a+(n-1))]+\underbrace{[(a+1)+(a+(n-2))]}_{[a+(a+(n-1))]}+\cdots.+\underbrace{\left[\left(a+\frac{n}{2}-1\right)+\left(a+\frac{n}{2}\right)\right]}_{[a+(a+(n-1))]}=$$

$$=\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}[\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}))]$$

Es decir que la suma se puede calcular multiplicando por n/2 el resultado de sumar el primer y último número de la lista.

CONCLUSIONES

Con frecuencia se considera la matemática a enseñar como simplificaciones o reducciones de la matemática superior. El análisis realizado en el marco de una propuesta que se puede plantear a los futuros profesores de matemática, pone en evidencia la necesidad de reflexionar como formadores de profesores de matemática sobre la matemática necesaria para enseñar y su relación con la matemática superior.

Hacer partícipe a los futuros profesores de una práctica matemática en la que tiene cabida tanto la matemática superior como la del secundario, les permite dar el valor justo a cada una de ellas a partir de ubicarlas y justificarlas como partes necesarias de su formación.

REFERENCIAS

- Barallobres, G. (2000). *“Algunos elementos de la didáctica del Álgebra”*, en *Estrategias para la enseñanza de la matemática*, Argentina, UVQ.
- Bosch, M. Gascón, J. (2009). *Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria.* Investigación en educación matemática XIII.
- Courant, R. & Robbins, H. (1964). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*, Introducción, Madrid, Editorial Aguilar.

- Sadovsky, P. (2003). “*Condiciones Didácticas para un Espacio de Articulación entre Prácticas Aritméticas y Prácticas Algebraicas*.” Capítulo 2. Tesis de Doctorado, Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Buenos Aires.
- Saiz, I.; Gorostegui, E. & Vilotta, D. (2013). *La matemática necesaria para la enseñanza de los racionales en secundario.* Yupana, Revista de Educación matemática de la Universidad Nacional del Litoral.
- Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires. Editorial Libros del Zorzal.