CB 25

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA VISUALIZACIÓN INTERACTIVA DE MÉTODOS NUMÉRICOS DE TERCER ORDEN PARA SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

Oscar Enrique Ares

Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales – Universidad Nacional de San Luis.
25 de Mayo 384 – Mercedes (San Luis)
oscareares@gmail.com

Palabras Claves: calculo numérico, ecuaciones no lineales, visualización interactiva.

RESUMEN

Uno de los problemas más estudiados en matemáticas y de investigación en la actualidad - Olivo,Martin en El método de TChebyshev para el cálculo de ecuaciones no lineales. Tesis doctoral. Universidad de la Rioja, 2013-, consiste en encontrar la *solución de una ecuación no lineal* f(x) = 0. Sin duda, el método de Newton-Rapshon es el más estudiado y usado para resolver ecuaciones. Pero cuando se *pretende aumentar la velocidad de convergencia,* hay variantes, como el método de Tchebyshev. En este trabajo se presenta el *diseño* de una propuesta didáctica utilizando *nuevas tecnologías* para la enseñanza del tema: *Métodos Numéricos de orden superior para solución de de ecuaciones no lineales.* La propuesta didáctica está guiada, por el concepto que prioriza la importancia decisiva en los procesos cognitivos de la *imagen conceptual* (Tall y Vinner, 1985) y el aprendizaje significativo (Ausubel, 1968)**.**

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas más *básicos* y más antiguos del cálculo numérico, es el de la ***búsqueda de raíces***, que consiste en encontrar que valores de la variable x, satisfacen la ecuación f(x) = 0. A una solución de este problema se la llama *cero de f* o una raíz de f(x)=0. El clásico y más conocido método de Newton Raphson se utilizara como criterio de comparación frente a los métodos de Tchebyshev y Euler, objetos de esta secuencia didáctica. En general, no es posible determinar los *ceros* de una función en un número finito de pasos. Se utilizan métodos de aproximación, que usualmente son iterativos y tienen la forma: iniciando con una aproximación inicial x_0, (o un intervalo [a,b]), se calculan aproximaciones sucesivas x_1, x_2, … y elegimos x_n como valor aproximado de raíz.

La evolución que ha experimentado el software matemático, especialmente en la última década ofrece nuevas formas de **enseñar, aprender e investigar en cálculo numérico.**

En el campo de la ingeniería didáctica, la utilización de software educativo, permite diseñar estrategias donde el alumno sea un *participante más activo* en la elaboración de su propio aprendizaje, realice tareas de exploración y elaboración de hipótesis en la que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones. Específicamente, en cálculo numérico la *elaboración de guiones de programación* –por parte del alumno- concreta la ejecución del mecanismo iterativo expresado generalmente en una *fórmula de punto fijo*

OBJETIVOS

Se pretende con el diseño de esta secuencia didáctica que el uso de la herramienta computacional permita la visualización interactiva de los métodos de Euler y de Tchebyshev. La construcción de una adecuada imagen conceptual del proceso iterativo es una finalidad que se persigue con el diseño de esta propuesta didáctica, implementada utilizando el entorno de programación de ***Matlab*** y ***Geogebra***, en el tema de Calculo Numérico: *Métodos de orden cubico para la búsqueda de raíces.*
Uno de los ejes del diseño en la ingeniería didáctica de la secuencia, que se concretan, con la utilización de la herramienta didáctica computacional, es la reunión de distintos *registros de representación semiótica*, y su *coordinación***,** específicamente la coordinación del registro geométrico, numérico y algebraico. Los datos del registro numérico los obtendrá el alumno con el *diseño de guiones de programación en Matlab*, donde verificara el orden cubico de magnitud del error y establecerá *comparación* con el método de Newton.
Para convencer y persuadir de la veracidad del contenido de un enunciado en el campo científico se debe argumentar. La *demostración* es la clase argumentativa característica de matemática. La función primordial de la demostración en matemáticas es la *verificación* de las proposiciones matemáticas mientras que en educación matemática el rol más importante es la *explicación*, de manera tal que existen demostraciones que solo prueban mientras que otras esencialmente explican –educación matemática-. Los alumnos valoran positivamente las demostraciones que son explicativas frente a otras que no lo son.
Las actividades que permiten el análisis numérico del método son de tipo demostrativo y consisten en demostrar la convergencia cubica de los métodos utilizando como herramienta la teoría de punto fijo, específicamente se debe probar algebraicamente que

$$g'(p) = g''(p) = 0$$

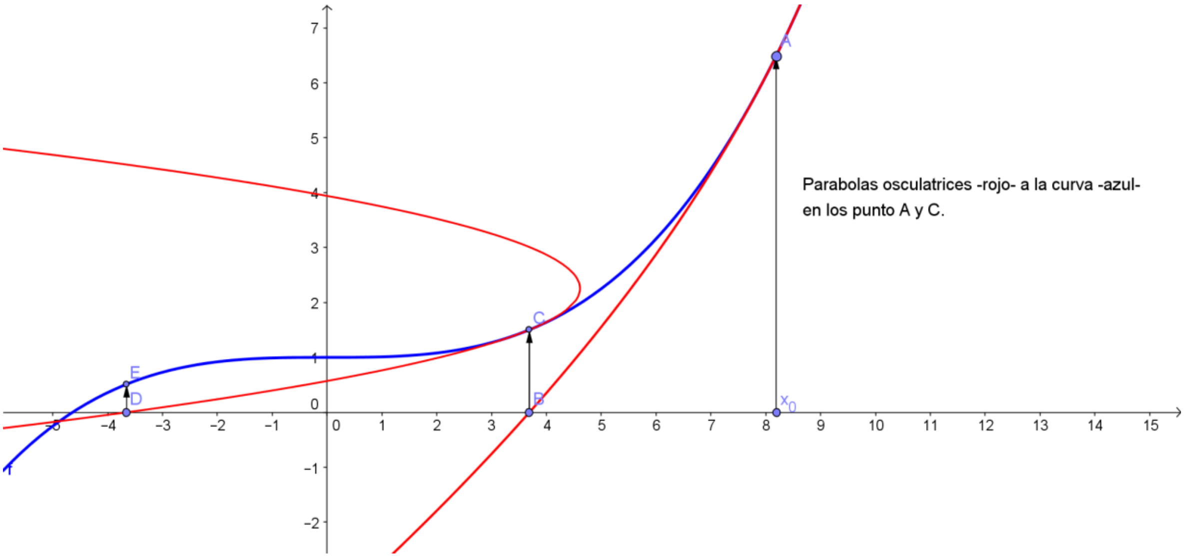
FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA Y COGNITIVA

La imagen conceptual es la *primera asociación mental no verbal que aparece en nuestra mente* cuando el nombre del concepto es evocado (Hitt, 2000).
Puede tratarse de una impresión visual o una colección de impresiones o experiencias. si bien estas imágenes visuales, experiencias pueden luego traducirse en forma verbales, no es así como aparecen en primera instancia.
Para adquirir un concepto *no es suficiente con memorizar su definición*, debe poseerse una imagen conceptual del mismo. Es decir, que el aprendizaje, la comprensión, la aplicación y desarrollo de los conceptos matemáticos involucra la construcción de un cierto tipo de estructura mental: la imagen conceptual
La utilización de la computadora como herramienta cognitiva favorece el diseño de "**situaciones de acción, formulación y validación" e "institucionalización**" (Hitt, 2000).
Se asume como modelo teórico de los procesos cognitivos, el de la formación de **imagen conceptual** y **visualización.** En el trabajo titulado *Concep image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, los autores Tall y Vinner -1981-, establecen la primacía de la imagen conceptual sobre las definiciones formales. En este marco la visualización como herramienta didáctica, juega un papel importante en la construcción de la imagen conceptual.
Una fase del diseño es la construcción de una herramienta didáctica computacional que permite visualizar las ***parábolas osculatrices*** o ***parábolas tangentes*** conjuntamente con el ***registro simbólico y numérico*** de sus ecuaciones y la sucesión numérica de tercer orden de ambos mecanismos iterativos de punto fijo: ***método de Euler y método de Chebyshev***. La *propuesta didáctica innovadora* es la utilización de esta herramienta didáctica computacional,

realizada con el software de geometría dinámica ***Geogebra***, que debido a su diseño es interactiva permite *explorar el comportamiento* de los métodos numéricos –convergencia, divergencia y velocidad de convergencia- ***variando el valor inicial*** x_0, para analizar la *ecuación no lineal que ingrese el alumno*. El alumno podrá *experimentar* en registro gráfico y numérico, el comportamiento ***lineal*** *–no cubico-* de los métodos de Euler y Tchebyshev, ante ***ceros múltiples*** y *comparar* la respuesta con Newton Rapshon. Conjuntamente una *guía de actividades* ordena y articula la secuencia didáctica, con el objetivo de acercarse a las metas de comprensión prefijadas.
Las etapas de la secuencia didáctica son: diseño, puesta en escena y análisis de resultados (Aguilar, P., Farfán, R. M., Lezama, J., Moreno, J. ,1997). El diseño de la secuencia consta de una cadena articulada de pasos: I) visualización interactiva de la configuración geométrica del proceso iterativo II) registro numérico del método a través de la construcción de un guion de programación Matlab -que permite la implementación computacional del algoritmo-. En esta etapa es importante la ***coordinación*** de los dos registros, numérico y geométrico –a través de la herramienta didáctica computacional-. III) Análisis matemático del método. El alumno demostrara en sus actividades la convergencia cubica. Se menciona que los objetivos perseguidos, se alcanzaron en alto grado, como se desprende del análisis de las respuestas obtenidas de las guías de actividades entregadas, pero esencialmente se logró la *participación activa del alumno* en las actividades de la secuencia, es decir, en la construcción de su propio proceso de aprendizaje. De la distinción clásica de la didáctica entre proceso y producto de aprendizaje, con esta secuencia se logró valorizar el proceso.
En registro algebraico, las formulas iterativas de los métodos permiten realizar los cálculos numéricos y estudiar analíticamente la convergencia y el orden de convergencia. Pero no son significativas para el alumno, puesto que *son insuficientes para la construcción de una imagen conceptual*.
Las consideraciones geométricas, son necesarias para la comprensión y la consolidación de una adecuada imagen conceptual, puesto que no solo ***ilustran el mecanismo iterativo*** del método estudiado, sino que, la expresión algebraica misma –formula de método-, puede obtenerse ***deductivamente*** a partir de una parábola tangente **-**Euler y Chebyshev**-** o una recta tangente **-**Newton**-** a la gráfica de la función cuya raíz se desea aproximar. Ambos métodos, dependiendo del valor inicial, pueden ***divergir***, es decir, se clasifican como abiertos.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DEL MÉTODO DE TCHEBYSHEV: MÉTODO DE LAS PARÁBOLAS TANGENTES

Una forma sencilla de obtener el método iterativo de Tchebyshev, es por medio de una derivación geométrica, a partir de una *parábola de eje focal horizontal tangente a la gráfica* en un punto de coordenadas $(x_n, f(x_n))$, siendo x_n la sucesión aproximante al cero de f –interseccion de la curva azul con el eje x-.



La grafica interactiva, que utiliza el alumno, luego en la secuencia, permite visualizar el mecanismo iterativo del método de Tchebyshev. Se inicia desde un valor inicial x_o, que determina en la curva f(x) –azul-, el punto A(x_o, f(x_o)). Por A, luego por C, pasa una *parábola osculatriz o tangente* y(x) –rojo-, de eje focal horizontal, que tiene igual derivada primera y segunda que f. El valor numérico y(0), proporciona la intersección de la parábola osculatriz con el eje x –puntos B o D en la gráfica-. En consecuencia, se genera una sucesión x_0, x_1=B, x_2=D, como se muestra en la figura. Obviamente, en general, la tolerancia ϵ establecida junto con el criterio de paro $|x_p - x_{p-1}| < \epsilon$, determinan cual es el p_esimo de la sucesión.
Si dos curvas se cortan en un punto, se dice que tienen un contacto de *orden cero*. Si en el punto de contacto tienen derivadas primeras iguales, es decir, si tienen *la misma tangente*, se dice que tienen contacto de *primer orden*. Si tienen derivadas segundas iguales, el ***contacto es de orden dos***. Estas son las condiciones del problema:

$$\begin{aligned} y(x_n) &= f(x_n) - igual\ valor\ en\ x_n - \\ y'(x_n) &= f'(x_n)\ -derivadas\ primeras\ iguales - \\ y''(x_n) &= f''(x_n)\ -derivadas\ segundas\ iguales - \end{aligned} \qquad (1)$$

A partir de la comprensión del mecanismo iterativo de Tchebyshev, en términos geométricos, quedan definidas las condiciones iniciales para el desarrollo algebraico. Una parábola de eje focal horizontal se puede escribir en la forma $ay^2 + y + bx + c = 0$.
Para que la parábola quede *unívocamente definida*, se deben especificar los coeficientes a, b y c, en otros términos, los *valores numéricos a, b y c son las incógnitas* a determinar para que la ecuación cuadrática quede definida. Es lógico pensar que se deben especificar *tres condiciones*, que son propias de la naturaleza del problema específico y este caso son las *condiciones de tangencia* o *contacto* de la parábola osculatriz y la curva f(x).
La ecuación de la parábola osculatriz es de la forma $ay^2 + y + bx + c = 0$ pero se puede escribir convenientemente, esto es, provocando un desplazamiento de los ejes coordenados al punto $(x_n, f(x_n))$ con lo cual resulta c = 0, en la forma:

$$a(y(x) - f(x_n))^2 + y(x) - f(x_n) + b(x - x_n) = 0 \qquad (2)$$

Que inmediatamente satisface la primera condición, si $x = x_n$ se verifica $y(x_n) = f(x_n)$

Se debe determinar el valor de las incógnitas a y b, realizando la primera y segunda derivada, que generan las siguientes dos ecuaciones:

$$y'(x_n) = f'(x_n) \qquad (3)$$

$$y''(x_n) = f''(x_n). \qquad (4)$$

De (3) $2a(y(x) - f(x_n))y'(x) + y'(x) + b = 0$
con $x = x_n$ resulta $b = -y'(x_n) = -f'(x_n)$.

De (4) $2a[\,(y'(x))^2 + (y(x) - f(x_n))y''(x)] + y(x)'' = 0$
con $x = x_n$ resulta

$$a = -\frac{f''(x_n)}{2[f'(x_n)]^2} \qquad (5)$$

La ecuación de la parábola osculatriz, se obtiene reemplazando los coeficientes a, b en (2)

$$-\frac{f''(x_n)}{2[f'(x_n)]^2}(y(x) - f(x_n))^2 + y(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n) = 0 \qquad (6)$$

El objetivo de este desarrollo algebraico es encontrar el valor de x, donde la parábola osculatriz *intersecta* el eje Ox. En consecuencia, haciendo y = 0, se obtiene:

$$x - x_n = -\frac{f''(x_n)[f(x_n)]^2}{2[f'(x_n)]^3} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (7)$$

Escribiendo $x_{n+1} = x$ queda la formula iterativa de Tchebyshev:

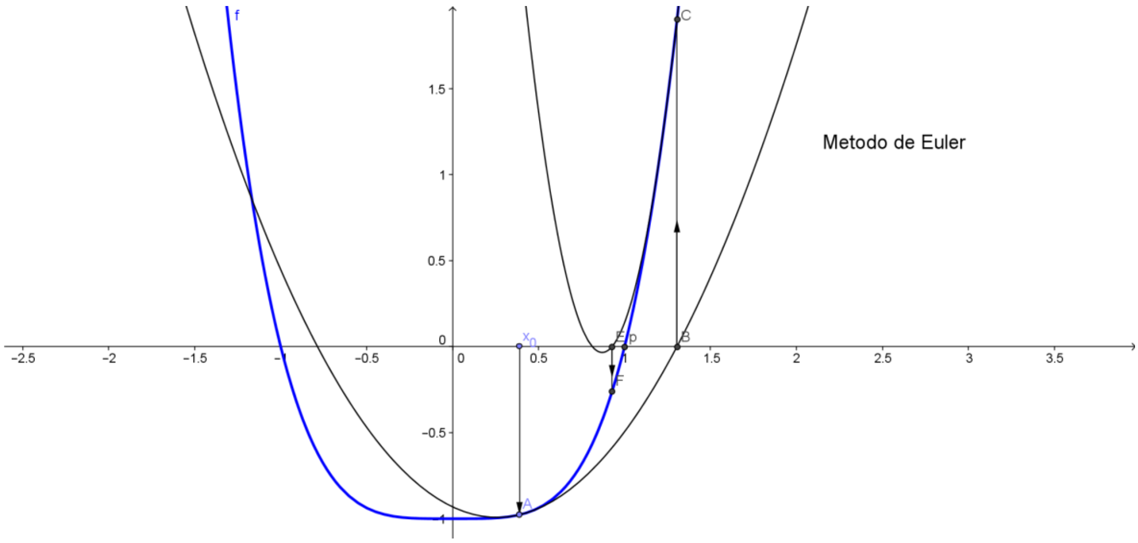
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)f(x_n)}{[f'(x_n)]^2}\right) \qquad (8)$$

El mecanismo numérico iterativo es de *punto fijo*, con $x_{n+1} = g(x_n)$ con la función de *punto fijo* $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}\right)$. Se verifica que en un cero simple $f(p) = 0$
$g'(p) = g''(p) = 0$

que indica, de acuerdo a la teoría del método de punto fijo *convergencia cubica*.
De geometría analítica se conoce que la ecuación de una parábola es de eje horizontal es $(y(x) - y(x_n))^2 = 4p(x - x_n)$, con p distancia focal. Desarrollando el cuadrado, se puede escribir de una forma equivalente $ay^2 + y + bx + c = 0$.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DEL MÉTODO DE EULER: MÉTODO DE LAS PARÁBOLAS TANGENTES DE EJE VERTICAL

El análisis de la siguiente representación gráfica permite comprender el mecanismo iterativo del método de Euler, partiendo de un valor inicial x_0, que determino el punto $A(x_0,f(x_0))$.



En A el orden de contacto entre una parábola de eje focal vertical –negro- y la función f –azul-, es *dos*, es decir, son las condiciones de tangencia. La ecuación de la parábola osculatriz se encuentra usando un *polinomio de Taylor* de orden dos.

$$f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)+f''(x_n)(x-x_n)^2=0$$

Haciendo $x=x_{n+1}$ y llamando $h_n=x_{n+1}-x_n$, resulta la ecuación cuadrática:

$$f(x_n)+f'(x_n)h_n+f''(x_n){h_n}^2=0$$

Es una ecuación de segundo grado en la incógnita h_n. Si f´ y f´´ *no se anulan* y si $f'(x_n)^2 \geq 2f(x_n)f''(x_n)$, se puede resolver para h_n (tomando el signo ´´-´´)

$$h_n=-\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}\left(1-\sqrt{1-\frac{2f(x_n)f'(x_n)}{(f''(x_n))^2}}\right)$$

Reescribiendo la formula con las sustituciones $u(x)=\frac{f(x)}{f''(x)}$ y $t(x)=-\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}$ queda:

$$x_{n+1}=x_n-u(x_n)\frac{2}{1+\sqrt{1-2t(x_n)}}$$

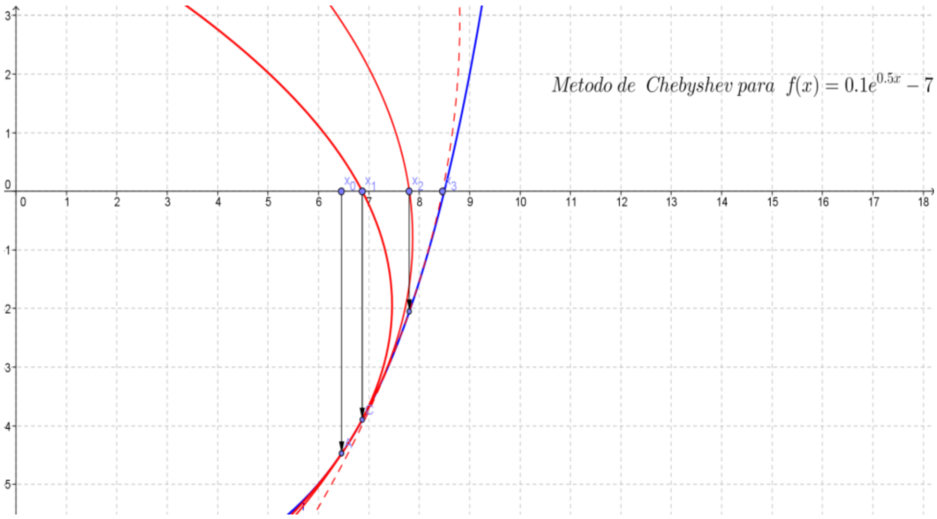
El mecanismo numérico iterativo es de *punto fijo*, con $x_{n+1}=g(x_n)$ con la función de *punto fijo* $g(x)=x-u(x)\frac{2}{1+\sqrt{1-2t(x)}}$

Se verifica que en un cero simple $f(p)=0$, la condición $g'(p)=g''(p)=0$ significa convergencia cúbica.

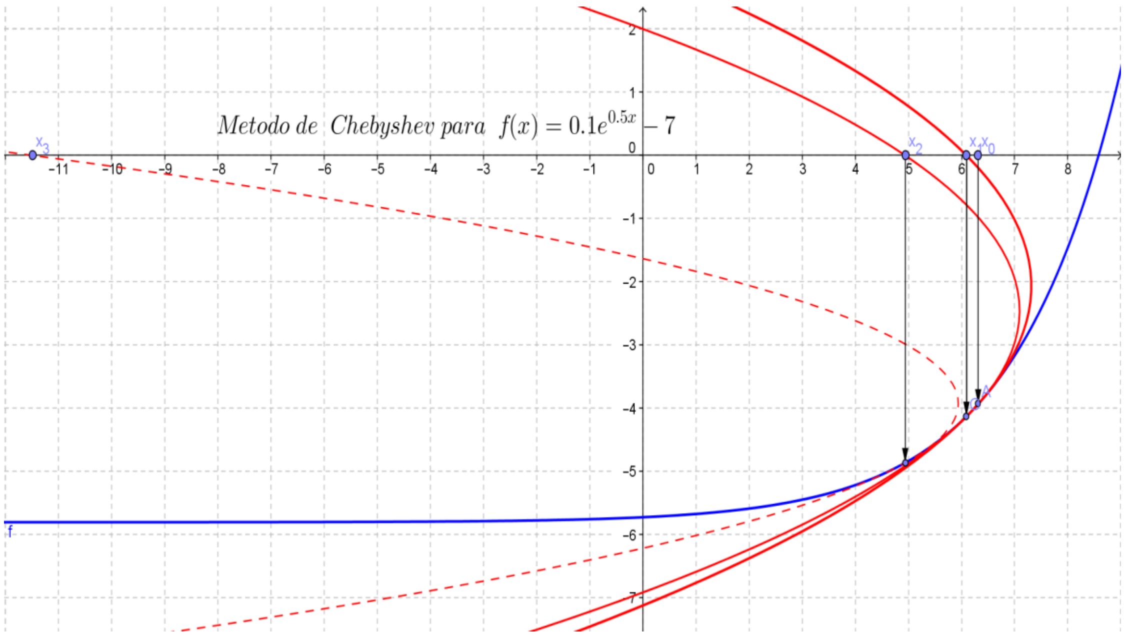
UTILIDAD DE LA HERRAMIENTA DIDÁCTICA COMPUTACIONAL

La ***herramienta didáctica computacional*** puede ser utilizada *interactivamente* para dar *sentido* a la notación algebraica, para dibujar gráficos, *generar secuencias de imágenes y* *visualizar mecanismos interactivos numéricos y conceptos en el álgebra lineal y en calculo numérico*, y para llevar a cabo cálculos de procedimiento de modo que el estudiante puede concentrarse en el *significado de los resultados* de estos cálculos. Como se ilustra en las siguientes figuras, dada una específica $f(x) = 0.1e^{0.5x} - 7$, con el objetivo de analizar el comportamiento del método de Tchebyshev, se puede *variar interactivamente* el valor ***inicial*** $\boldsymbol{x_0}$, y obtener en tiempo real las imágenes que determinan convergencia, divergencia y cualitativamente se puede apreciar la velocidad de convergencia hacia la raíz. Pero también utilizando el guion Matlab correspondiente apreciar la correspondencia de registros numérico y geométrico.

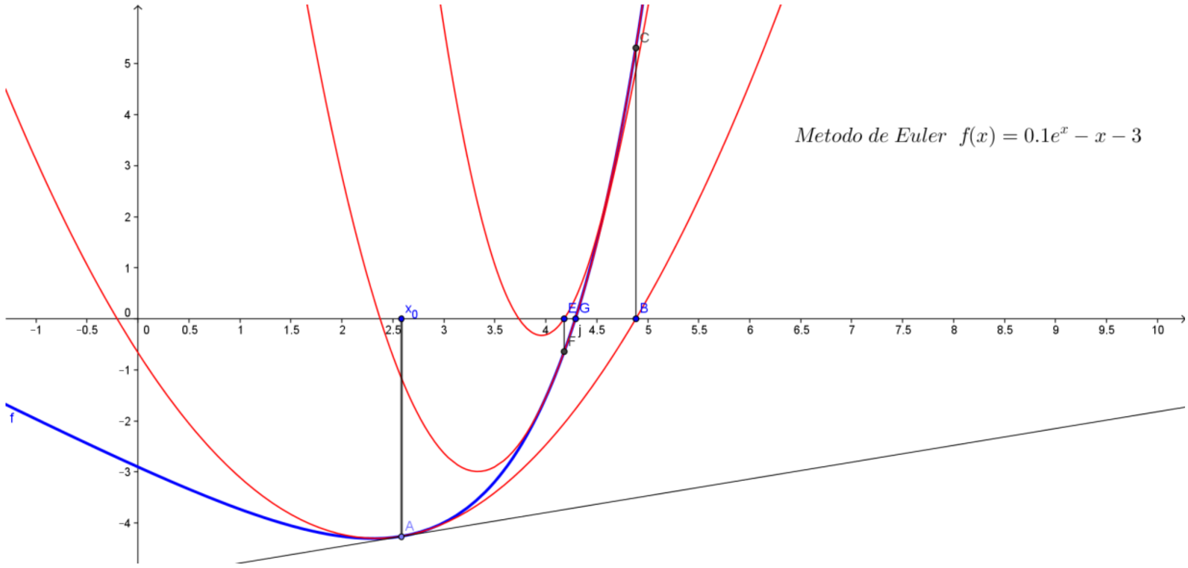
Convergencia



Divergencia

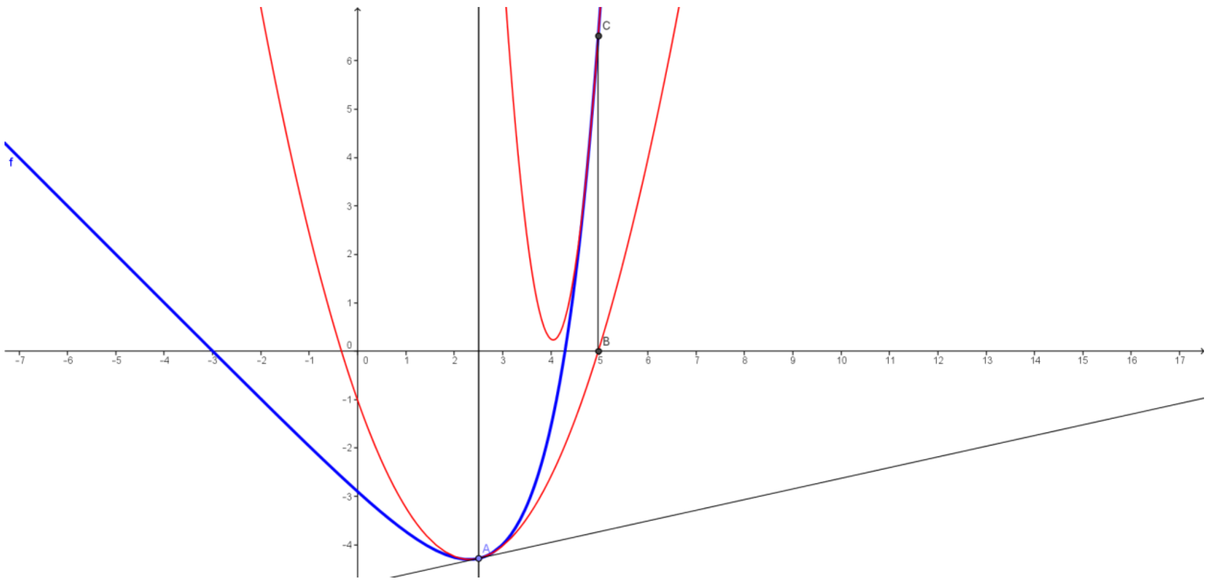


Uso de la herramienta didáctica para visualizar convergencia y divergencia en el método de Euler –desde la perpectiva geométrica-.



Se observa en la figura, que por el punto inicial A(x_0,f(x_0)), pasa la parábola osculadora –Euler- y la recta tangente –Newton-, siendo evidente la ventaja comparativa de Euler sobre Newton. Se destaca en la gráfica la sucesión aproximante de las parábolas osculatrices y la formula iterativa de Euler permite calcular los puntos de la sucesión aproximante x_1=B, x_2=E, x_3= G, etc.

Si se desplaza el valor inicial x_0 puede producirse *divergencia*, como se ilustra en la figura.



Claramente la parábola osculatriz, que pasa por C, no intersecta el eje x.

SECUENCIA DIDÁCTICA

Teoria cognitiva y conocimientos matematicos previos

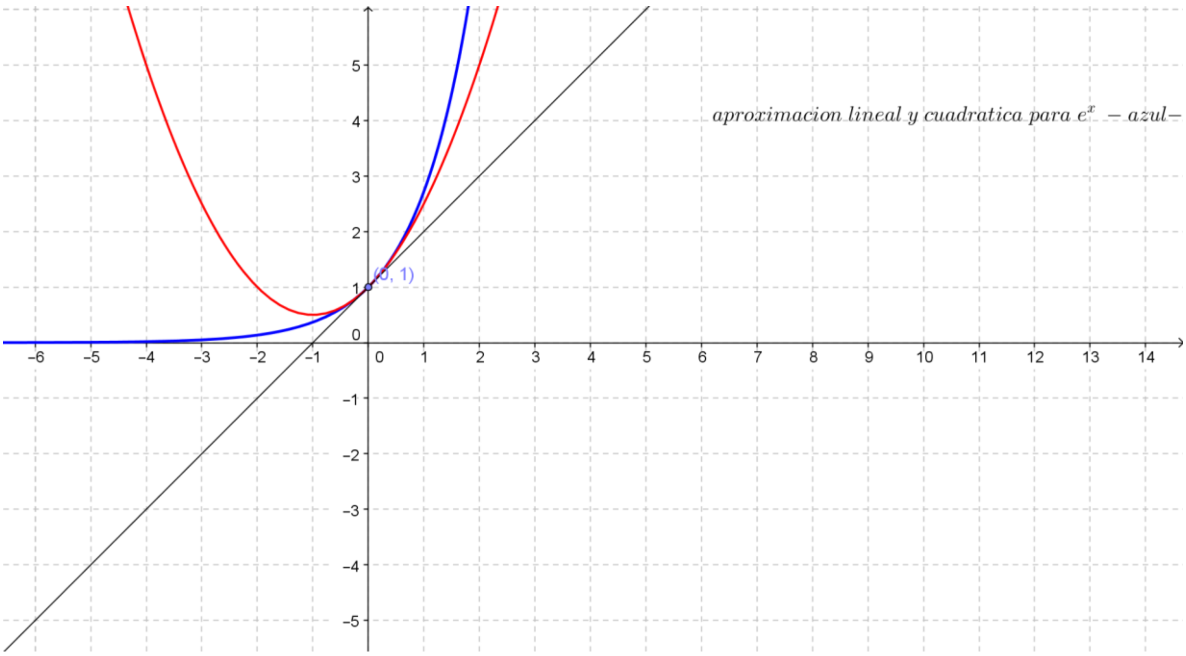
En el prefacio de su Educational Psychology. A cognitive View, Ausubel (1968) afirma 'De todos los factores que influyen en el aprendizaje, el más importante consiste en lo que el alumno ya sabe'. *Averígüese* esto, y *enséñese consecuentemente*. Enseñar a partir de lo que conoce el alumno, significa identificar los conceptos inclusivos pertinentes que existen en la estructura cognitiva del alumno, o en otras palabras, averiguar el repertorio de conocimientos previos del alumno que sean *relevantes* para lo que se espera enseñar.
En el aprendizaje memorístico la nueva información adquirida tiene poca relación con la estructura cognitiva existente. Por el contrario, en el aprendizaje *significativo*, el nuevo conocimiento se pone en relación con conceptos ya *existentes o inclusores*.
Para abordar la secuencia didáctica se requieren los conocimientos matemáticos previos *de cálculo diferencial y calculo numérico*: I) función inversa II) derivada implícita III) serie de Taylor IV) Parábola osculatriz V) orden convergencia de una sucesión numérica VI) Método de punto fijo VI) condiciones suficientes para convergencia cuadrática y cubica de la función g de punto fijo, puesto que son los *conocimientos puestos en juego* y que necesariamente intervienen para la construcción de la teoría y aplicación de los métodos de Tchebyshev y Euler. En términos de la teoría cognitivista de Ausubel, son los ***conceptos** inclusores*: Polinomio de Taylor, parábola osculatriz, en las dos primeras primeras actividades de la secuencia, y tienen como objetivo *generar una aprendizaje significativo* y una puesta en común y actualización de los conocimientos previos.
La actividad N° 3 es la aplicación numérica iterativa de los métodos a través de un guion de programación en Matlab. Se aplica la *idea de organizadores previos*, es decir, se trata de *puentes cognitivos* para relacionar los inclusores relevantes existentes con el nuevo material que se procesa. Al relacionar intencionadamente el material potencialmente significativo con las ideas establecidas y pertinentes de su estructura cognitiva, el alumno es capaz de explotar con plena eficacia los conocimientos que posea a manera de una matriz organizadora para entender y generar nuevas ideas. En consecuencia, con relación específica a la actividad N°3 y N°4, a partir de un organizador previo –el guion Matlab del método de Newton acelerado- el alumno podrá construir y asimilar los nuevos conocimientos al anclaje del guion anterior. Por otra parte, *el excelente resultado recopilado* de los trabajos realizados por los alumnos, confirman experimentalmente la utilidad de los organizadores previos.

ACTIVIDADES DE LA SECUENCIA

ACTIVIDAD N ° 1 ´´ parábola osculatriz y métodos de Euler y Tchebyshev ``

<u>Metas de comprensión</u>: comprender el concepto que expresa la definición de orden de contacto entre curvas y encontrar las expresiones analíticas para la aproximación lineal y cuadrática a f(x) dada, a través de la visualización con geogebra y también en registro algebraico. Aplicar el concepto de aproximación cuadrática en métodos de euler y Thcebyshev hallando la ecuación de las parábolas tangentes.

a) Dada la función $f(x) = e^x$ visualizar interactivamente con geogebra la aproximación lineal y la aproximación cuadrática, deslizando con el cursor el punto de contacto.



b) Hallar la expresión algebraica de la aproximación inicial y cuadrática.

c) Visualizar utilizando de geogebra el comando *polinomiotaylor*, la aproximación lineal y cuadrática para las funciones dadas, en el origen I) $f(x) = \cos(x)$ II) $f(x) = \ln(1 + x)$. Expresar en registro algebraico la aproximación lineal y cuadrática.

ACTIVIDAD N° 2 ´´Programación del método de Tchebyshev y Euler``

Metas de comprensión: ***Diseñar*** *un guion de programación* que implemente el método de TChebyshev para determinar los ceros de una dada f, pero esencialmente, para estudiar el comportamiento del orden de convergencia antes ceros múltiples y verificar la convergencia cubica ante ceros simples. Con la obtención del registro número, se verificará la importancia de observar el *orden de magnitud* de decrecimiento del error absoluto aproximado y no el valor absoluto numérico en si mismo, es decir, la secuencia 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-6}, por ejemplo. También se pretender que el alumno describa cual es el orden de magnitud del método de TChebyshev ante ceros múltiples.

Siguiendo la teoría de Ausubel se proporciona un puente cognitivo, a través de un organizador previo, que es el guion matlab del método de Newton modificado. A partir de aquí el alumno diseñará el método de Euler y Chebyshev.

Organizador

```
syms x
f=input('ingrese la funcion f,f=');
Po=input('ingrese la aproximacion inicial,Po=');
N=input('ingrese el numero maximo de iteraciones,N=');
tol=input('ingrese la tolerancia,tol=');
g=diff(f,x);
h=diff(g,x);
i=1;
disp('i                P                        error')
while i<=N
   x=Po;
   Q=eval(f);
   G=eval(g);
   H=eval(h);
  P=Po-(Q*G/(G^2-Q*H));
       error=abs(P-Po);
    if abs(P-Po) < tol
```

```
        disp('procedimiento terminado'),raiz=P,precision=error,break,end
    i=i+1;
    Po=P;
    if i==N
            disp('excedido numero maximo de iteraciones'),break,end
       fprintf('%4i      %6.4e        %6.4e\n',i,P,error)
end
```

a) Implemente un guion Matlab del método de TChebyshev.
b) Implemente un guion Matlab del método de Euler.
c) Aplique los algoritmos computacionales previamente diseñados a las siguientes funciones, para localizar, sus raíces fijando un valor inicial y describir su orden de convergencia, teniendo en cuenta que algunos ceros tienen multiplicidad mayor que uno. Compare los órdenes de magnitud en cada paso con Newton-Raphson.
c1) $f(x) = e^{-x} - x$ c2) $f(x) = 0.1e^{0.5x} - 7$ c3) $f(x) = e^{x} - x - 1$
c4) $f(x) = sen(x^3)$ c5) $f(x) = 0.01x^3 + 1$
Aplique el algoritmo computacional, previamente diseñado del método de Newton y compare velocidad de convergencia, en el caso de ceros simples y ceros con multiplicidad mayor que uno.

ACTIVIDAD N° 3 ´´Visualización interactiva``
Metas de comprensión: describir a partir de la visualización interactiva la convergencia de los métodos de Tchebyshev y Euler.
3a) Aplique la herramienta didáctica computacional de Tchebyshev a la funciones $f(x) = 0.01x^3 + 1$ $f(x) = sen(x^3)$ variando interactivamente el valor inicial x_0.
3b) Obtenga la ecuación de la parábola osculatriz en Tchebyshev, con el valor inicial x_0, y verifique con el registro geométrico y algebraico de la herramienta computacional de geogebra.
3c) Aplique la herramienta didáctica computaciónal del método de Euler para estudiar la convergencia al variar el valor inicial de la función $f(x) = 0.1e^{x} - x - 3$.

ACTIVIDAD N° 4 ´´demostración matemática del orden de convergencia cubico``
Metas de comprensión: esta actividad es un aplicación prototipo de la teoría cognotivista de Ausubel, ya que contiene una estructura típicamente inclusora definida por la siguiente red de conocimientos: definición de orden convergencia, teoría de punto fijo. Como objetivo de conocimiento se persigue la finalidad de la comprensión del concepto de velocidad de convergencia de un método iterativo de punto fijo a través de una demostración teórica.
Organizador previo: . Se verifica que en un cero simple $f(p) = 0$ la condición $g'(p) = g''(p) = 0$ significa convergencia cubica. Este conocimiento es el puente cognitivo que permite anclar la demostración teorica de la actividad al concepto incluso de punto fijo. En consecuencia, el alumno debe seleccionar la función de punto fijo de Tchebyshev y aplicar el conocimiento organizador.

ACTIVIDAD N° 5 ´´aplicación a ingeniería eléctrica``
Se denomina **catenaria** a la forma que adopta una cadena o un cable suspendido de sus dos extremos.Eligiendo adecuadamente el sistema de referencia, la ecuación de la catenaria es:

$y = \lambda \cosh(x/\lambda)$ donde el origen de coordenadas está situado en la vertical del punto más bajo de la cadena a una distancia λ. Sea d la diferencia de altura entre el punto de la cadena de abscisa igual a 1 y de altura mínima:
d = y (1) - y (0) . Conociendo d , se puede determinar λ resolviendo la ecuación :

$\lambda + d = \lambda \cosh(1/\lambda)$. Supongamos d = 0.1. Aplicar algoritmo computacional de TChebyshev.

CONCLUSIONES

Presentada esta secuencia didáctica a los alumnos con teoría previa, se recopilo y analizaron los trabajos devueltos. Se informa en primer lugar, el buen diseño de los guiones matlab que permitieron hallar los ceros de las funciones presentadas, que pone de manifiesto la importancia de un organizador. Se observó, debido a lo laborioso y extenso del proceso algebraico algunas dificultades no conceptuales en la actividad demostrativa. Lo esencial es que el de la herramienta didáctica computacional y el diseño de la secuencia posibilito el involucramiento de <u>todos los alumnos,</u> en su propio aprendizaje-.

REFERENCIAS

- Aguilar, P.; Farfán R. M.; Lezama, J., y Moreno, J. (1997). Un estudio didáctico de la función 2x. En R. Farfán (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 11 (1), 19-25
- Amat S., Bermudez C, Busquier S. (2009). Estudio unificado de métodos de alto orden para ecuaciones no lineales. XXI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones.
- Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1968). Educational Psychology: A Cognitive View. Holt, Rinehart and Winston, New York.
- Hitt, F. (2000). Construcción de conceptos matemáticos y metacognitivos .
- Mora W. F. (2013). Introduccion a los métodos numéricos.
- Olivo, M.G. (2013). El método de TChebyshev para el cálculo de ecuaciones no lineales. Tesis doctoral. Universidad de la Rioja.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational studies in mathematics, 12(2), 151-169.