CB 24

UNA EXPERIENCIA DE MODELIZACION MATEMÁTICA CON ALUMNOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Nilda Etcheverry, Marisa Reid & Celeste Carassay

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam – Colegio Domingo Savio
Uruguay 151. Santa Rosa, La Pampa. Argentina.
Don Bosco 149. Santa Rosa, La Pampa. Argentina.
mareid@exactas.unlpam.edu.ar

Palabras Clave: Modelización matemática, TIC, enseñanza, actividad didáctica.

RESUMEN
El presente trabajo se focaliza en el desarrollo de competencias y conocimientos a partir de una actividad de Modelización Matemática. La propuesta fue desarrollada por estudiantes de Segundo año de nivel Polimodal de la modalidad Ciencias Naturales del Colegio Domingo Savio de Santa Rosa (La Pampa), en la resolución de un problema de la vida cotidiana.
La puesta en aula se realizó durante el segundo cuatrimestre del período lectivo 2013.
Los resultados revelan que los esquemas de modelización, encontrados en este estudio, se enmarcan en su mayoría en las propuestas actuales de la modelización matemática, al identificar la situación problema e interpretar la solución alcanzada en el marco de un contexto del mundo real.

INTRODUCCIÓN
La aplicación didáctica de la modelización matemática en el currículo de matemática de secundaria y su uso práctico en la enseñanza y aprendizaje representa el eje central del presente trabajo.
Según Bassanezi (2002) la modelización matemática es el arte de transformar problemas de la realidad en problemas matemáticos y resolverlos, interpretando sus soluciones en el lenguaje del mundo real.

¿EN QUÉ CONSISTE EL PROCESO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA?
La resolución de problemas es uno de los campos que han recibido mayor atención en las últimas décadas en el ámbito de la Educación Matemática, pero no todos los avances realizados en investigación han llegado a las aulas. En particular la modelización matemática si bien está presente en el currículo de la Educación Secundaria, son escasas las propuestas que la utilizan como estrategia pedagógica para la enseñanza de la Matemática en el nivel medio.
Desde lo pedagógico la Modelización Matemática hace referencia al trabajo con modelos matemáticos en situaciones de enseñanza que privilegian la relación mundo exterior matemática.
Según Van Den Heuvel-Panhuizen (2005), introducir un contexto real en los problemas puede aumentar su accesibilidad y sugerir estrategias a los alumnos.

La Modelización no trabaja con problemas inventados, "teóricos" o de aplicación directa del concepto y/o sus propiedades para resolver un ejercicio, sino con problemas reales. Siendo ésta una de las características que diferencia la Modelización, de aquellas en las que se "construye" un problema para aplicar un modelo conocido o recién enseñado. La Modelización va por el camino inverso, o sea en vez de dar una pregunta al alumno en la que va a tener que usar una herramienta matemática predeterminada para garantizar la obtención de una respuesta cierta, el alumno hace una pregunta para sí y para los otros y junto con el profesor y los demás alumnos, él va a aprender y usar las herramientas matemáticas ya existentes para entender el fenómeno elegido y, eventualmente, llevar al aula conocimientos ya producidos por la cultura local para responder cuestiones relevantes, muchas veces, hasta de forma aproximada. Cuando tenemos un problema de matemática a resolver, vemos que no es uno de aquellos típicos de los libros de texto de matemática, porque los datos son provenientes de situaciones reales que, muchas veces –o casi siempre- exigen aproximaciones, algoritmos y una evaluación de la respuesta matemática a la luz de la cuestión inicial. Además de validar el problema matemáticamente, debe ser verificada la validación de la solución obtenida en términos del problema que generó la cuestión matemática.

Todo problema tiene que ser tratado con paso de simplificación y a veces la simplificación que hacemos es para facilitar la resolución matemática. Otras veces simplificamos para colocar el problema en el nivel de nuestros alumnos. No simplificamos el problema real, y sí introducimos hipótesis que simplifican su abordaje.

Siguiendo a Blum (2002), los procesos de modelización se pueden estructurar en cinco fases principales:

- Simplificar el problema real a un modelo real.
- Matematizar el modelo real a un modelo matemático.
- Buscar una solución a partir del modelo matemático.
- Interpretar la solución del modelo matemático.
- Validar la solución en el contexto del problema real.

La condición necesaria para que el profesor implemente situaciones de modelización en la enseñanza es tener audacia, gran deseo de modificar su práctica y tener disposición a conocer y aprender. Es conveniente resaltar que un curso, una charla o un artículo conteniendo definiciones y/o resultados positivos de distintas experiencias no son suficientes para poner en práctica. Habilidad y seguridad sólo se ganan con la experiencia. Una experiencia se debe hacer en forma gradual, de acuerdo con el tiempo disponible que se tiene para planificar.

Según Barbosa (2001) las experiencias de modelización en el ámbito educativo varían en cuanto a la extensión de las tareas que le caben al profesor y a los alumnos. Este autor realiza una clasificación, desde una perspectiva teórica, que resume en tres casos:

Caso 1. El profesor presenta la descripción de una situación-problema con las informaciones necesarias para su resolución. Cabe a los alumnos el proceso de resolución. No es necesario que los alumnos obtengan los datos fuera del aula.

Caso 2. El profesor trae al aula un problema de otra área de conocimiento, debiendo los alumnos recolectar las informaciones necesarias para su resolución.

Caso 3. A partir de temas no matemáticos que pueden ser escogidos por el profesor o por los alumnos, estos últimos formulan problemas, son responsables de la recolección de información y resolución de la situación- problema.

En todos los casos, el profesor es concebido como "co-partícipe" en la investigación de los alumnos, dialogando con ellos acerca de sus procesos.

En este contexto se elige el caso 2 propuesto por Barbosa, privilegiando el trabajo de los estudiantes en el que el profesor describe una situación-problema de la realidad y los estudiantes recogen los datos e información necesarios para resolver tal situación.

Objetivos de la propuesta

Los objetivos generales que motivaron la elaboración y desarrollo de esta propuesta fueron:

- Aplicar la Modelización Matemática como alternativa pedagógica para el proceso de enseñanza – aprendizaje, en busca de una mejora en la enseñanza de la matemática en Segundo año de la modalidad Ciencias Naturales.
- Fortalecer el valor de la solidaridad en nuestros alumnos, generando un espacio donde el esfuerzo y el tiempo empleado en la realización del trabajo de cada grupo, será ofrecido a una institución del medio que lo necesite, en el marco de la "jornada solidaria" que año a año viene realizando la Institución.

Desarrollo

Para el desarrollo de la propuesta se tuvieron en cuenta los siguientes momentos:

- Reuniones de trabajo para acordar los detalles de las tareas a realizar (cronograma, identificación de cursos, contenidos a abordar). En ellas se decide incorporar la idea de investigar situaciones vinculadas a la realidad, al cotidiano de la escuela y al de su comunidad, abordar situaciones que no tienen la famosa "x", ni una respuesta única, verdadera como tampoco una "pregunta matemática".
- En el curso elegido, se presentó la propuesta con las pertinentes explicaciones de la Modelización Matemática a partir de experiencias realizadas por las docentes.

Situación propuesta

¡A cocinar!...

Hace unos días atrás, fue el cumpleaños del hijo más chiquito de Celeste. Durante varios días estuvo cocinando las tortas que formarían parte del festejo… ¡Mucho tiempo y esfuerzo para presentar todas tortas igualitas y para tan sólo dos horas de pelotero!

Charlando una mañana con Nilda le comenta que para el próximo festejo tiene pensado organizarse mejor… "en lugar de hacer varias tortas iguales de una misma receta, las iré modificando de tal forma que tengan distinto tamaño y parezcan distintas y así poder optimizar mi tiempo".

Nilda la mira… piensa y luego le pregunta entre otras cosas: **"¿Estás segura que si varías las cantidades de los ingredientes, el tiempo de horneado será como para decir que optimizas el tiempo?"**

- El problema quedó definido del siguiente modo: **¿Cuál es la variación de los ingredientes y el tiempo de horneado de diferentes tamaños de una misma receta de torta?**
- Un primer espacio de discusión acerca de las variables que pueden intervenir en la solución del problema a modo de simplificación e hipótesis que simplifican su abordaje.
- Los alumnos investigan sobre el tema, realizan la experimentación en horario extra-clase; motivados con un propósito bien claro y definido.
- Espacio de discusión acerca del desarrollo de la propuesta, evaluando los logros y dificultades de las actividades desarrolladas, realizando las re-significaciones pertinentes para lograr los objetivos previstos.

- Resolución del problema concreto.
- Registro de las actividades realizadas mediante fotografías o filmaciones.
- Interpretación matemática de las soluciones encontradas. Socialización de las producciones y actividades realizadas por cada grupo.
- Evaluación de la propuesta a través de la rúbrica que figura en anexo. Este recurso le permite conocer de antemano al alumno, los elementos que van a ser valorados junto con la puntuación otorgada.

Trabajo de los alumnos

Reportamos las soluciones obtenidas por cuatro grupos

Tiempos de cocción de las tortas (en minutos):

	Grupo1	Grupo 2	Grupo3	Grupo4
Triple	69	78	105	110
Doble	51	55	88	104
Normal	29	60	72	52
Tres cuartos	25	26	51	47
Media	23	35	43	35
Un cuarto	16	19	30	29

Usando el software GeoGebra representaron los pares de puntos (tamaño, tiempo) y a partir de allí se desea expresar esta relación mediante una ecuación matemática o mediante una gráfica que relacione las variables (tiempo- tamaño), indicando el comportamiento que tiene la curva resultante.

Para llegar a determinar una ecuación que relacione las variables, se apeló a una "función de ajuste" es decir una función que se ajuste al conjunto de datos que se obtuvieron por experimentación y dados esos datos se quiere obtener la función que los relaciona.

De la investigación de los grupos se sintetiza que:

El ajuste de curvas surge, entonces, cuando se trata de interpretar los datos de un experimento. En nuestro caso surge de interpretar el tiempo de cocción de una torta en función del tamaño de la misma.

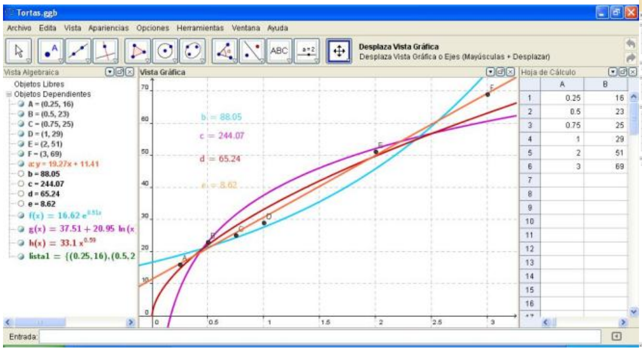
En términos gráficos, se piensa en un gráfico cartesiano donde se tiene un conjunto de puntos (pares ordenados) graficados y se quiere saber la función que mejor se ajustaba a esos puntos.

La función que "pasa" o que "está más se acerca" a esos puntos (la mayoría de las veces no se puede conseguir que una función pase por todos los puntos y así se busca la función que más se acerca a ellos) se llama “función de ajuste”.

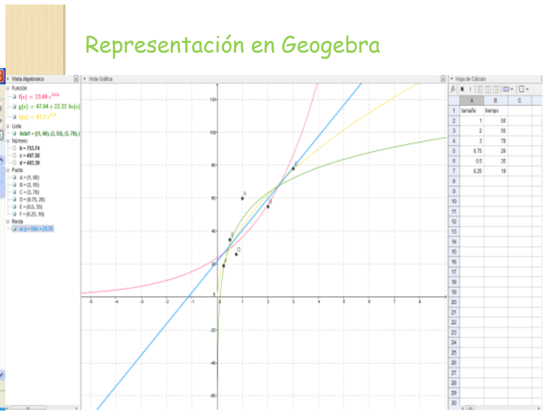
Los correspondientes valores de las variables consideradas, pares ordenados, en un sistema de coordenadas rectangulares constituyen lo que se llama diagrama de dispersión, con estos diagramas es posible frecuentemente representar una línea que se aproxime a los datos, bien a una línea recta y se dice que existe una **relación lineal** entre los datos, o bien a una curva y en este caso, se dice que existe una **relación no lineal** entre los mismos.

La confirmación visual es muy valiosa para un investigador, pero parece que hace falta algún criterio estadístico que lo sancione cuantitativamente

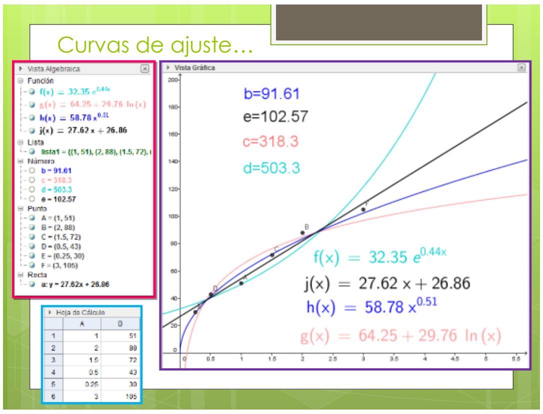
De acuerdo a los datos de las tablas y haciendo uso de las bondades del software GeoGebra, buscaron un ajuste de curva con los modelos proporcionados y obtuvieron las siguientes curvas y sus correspondientes fórmulas:



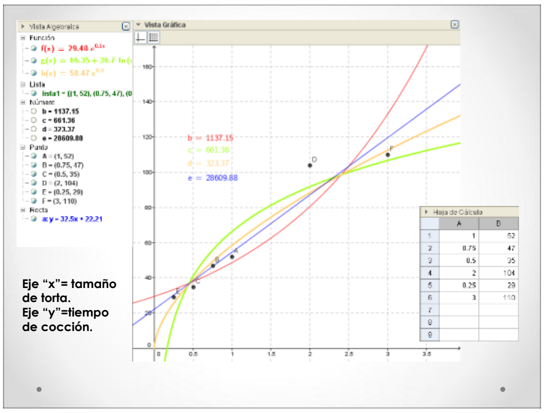
Trabajo realizado por el Grupo 1



Trabajo realizado por el Grupo 2



Trabajo realizado por el Grupo 3



Trabajo realizado por el Grupo 4

Como definición de ajuste se utiliza normalmente el ***criterio de los mínimos cuadrados***, que consiste en obtener aquellos valores de los parámetros que minimizan el sumatorio de residuales al cuadrado (ver gráfico 1). Siendo los residuales las distancias verticales de los puntos a la curva de ajuste.

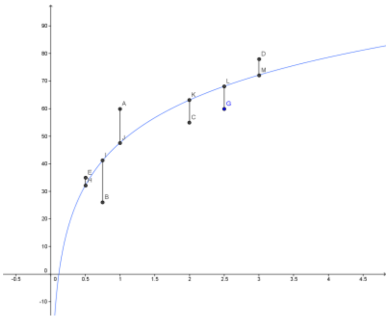


Gráfico 1

Se recopiló todo el material escrito por los estudiantes en los momentos del proceso de modelización matemática, es decir, en la resolución del problema propuesto; considerando las representaciones utilizadas, los esquemas de modelización puestos en juego, y además presentaron las razones por las cuales consideraban que esos ajustes eran o no adecuados.

Criterios para elegir la ecuación matemática

Continuidad.

Se refiere a la creencia de que solamente hay una curva suavizada que debe ajustarse mediante los puntos obtenidos experimentalmente. Esta suposición obedece a dos razones: a)

se requiere una ecuación única para ajustarse a los datos, y b) la variación observada se debe, en parte, a la existencia de errores de observación y muestreo. Es decir, hay cierta cantidad de error desconocido, asociado con cada medición, y la curva continua suavizada que obtenemos se diseña para que se aproxime al resultado teórico en condiciones ideales y mediciones muy precisas. Tal curva teórica es la comúnmente llamada curva de mejor ajuste. Esta expresión se usa en sentido general y, por lo tanto, puede aplicarse tanto a líneas como a curvas.
Simplicidad.
Algunas ecuaciones son matemáticamente más simples que otras, y es conveniente seleccionar la más simple y la que se acomode mejor a los datos.

COMENTARIOS DE LOS ALUMNOS EN EL TRANSCURSO DE LA EXPERIENCIA

Cuando se nos presentó el problema teníamos muchas dudas e incógnitas de cuál podría ser las función que mejor se ajustara a nuestros tiempos (de cocción) y de cuál podría ser las respuesta al interrogante que era: ¿estás seguro/a que si varias las cantidades de los ingredientes, el tiempo de horneado será como para decir que optimizas el tiempo?

En principio surgieron muchas y variadas respuestas, a las que debíamos estar atentos y analizarlas, era difícil ponerse de acuerdo ya que había diferentes puntos de vista, aunque entre casi todos concordamos en que no creíamos que la función fuese lineal, ya que no nos parecía que sea proporcional.

Las primeras tortas que realizamos fueron las más pequeñas y creíamos que iba ser una tarea fácil, sin embargo tuvimos algunos inconvenientes en el fraccionamiento de los ingredientes y en como había quedado la mezcla, ya que poseía un aspecto "aguado".

Las tortas medianas, doble y triple fueron batidas a mano, en consecuencia el tiempo y el esfuerzo fueron mayores, que cuando utilizamos la batidora.

Siempre usamos el mismo horno a una temperatura aproximadamente de 190 ºC, las tortas se colocaron todas a la mitad del horno y el tiempo de precalentado fue de 12 minutos. Además acordamos de abrir hasta dos veces el horno para apreciar el estado de las tortas.

A medida que nos fuimos acostumbrando a la receta, se podría decir que las ultimas tortas que hicimos (doble y triple) no nos ofrecieron problemas, salvo algún que otro dolor de brazos y muñecas por batir a mano.

Podemos decir que, aumentando las cantidades de ingredientes también se incrementa el tiempo de cocción, pero no en forma directamente proporcional; con lo cual si aumentamos la cantidad de ingredientes iremos optimizando los tiempos.

En conclusión no estamos muy conformes con nuestros resultados ya que no esperábamos que la función fuese lineal, seguramente hemos cometido algún tipo de error en la preparación de la torta.

Visualmente parecía que la función que mejor se ajustaba a los primeros cuatro puntos era la lineal. Pero luego, en los dos últimos puntos, la que parecía ajustarse mejor era la función logarítmica. No estábamos seguros de cual era la correcta.

Las hipótesis y conjeturas de los distintos grupos fueron expuestas, discutidas y validadas. Es de destacar la importancia en este momento, del rol docente, quien tuvo que trabajar sobre la interpretación de los errores u obstáculos didácticos encontrados en los comentarios anteriores.
El acceso al potencial de la tecnología permite a los estudiantes generar de forma rápida, y con precisión, una amplia variedad de modelos. Es, sin embargo, importante que los alumnos comprendan los conceptos matemáticos con los que trabajan, de lo contrario la tecnología puede muy bien crear un gran cantidad de nuevas "inexactitudes". Una prueba de esta comprensión se produce cuando el estudiante examina la validez del modelo. En este caso, la validez de cada modelo puede ser juzgado cuando su resultado se compara con el resultado de un cálculo aproximado en base a los valores experimentales.
Las curvas seleccionadas como “mejor ajuste” fueron las obtenidas por los grupos 3 y 4.

Grupo 3: h(x)=58,47x^0,6 y Grupo 4: h(x)= 78 58 x^0.51

Esta experiencia muestra cómo los estudiantes manejan situaciones de modelización con la presencia de la tecnología, pero los profesores deben ser cautelosos acerca de lo que los estudiantes comprenden e interpretan en todo el proceso de modelización. Hemos comprobado que los estudiantes confían demasiado en la tecnología y dejan de lado o evitan chequear la validez del modelo encontrado, por ello consideramos que la validación del proceso de modelización es fundamental con la presencia de la tecnología.

REFLEXIONES FINALES

Las respuestas que emergieron pueden ser enmarcadas parcialmente en la propuesta de Blum y Leiss (2007); es decir, los estudiantes buscaron comprender, simplificar, matematizar, resolver matemáticamente e interpretar, y realizar explicación de los resultados obtenidos.
Para el caso de la comprensión del problema los estudiantes mostraron competencia para discernir entre datos relevantes e irrelevantes.
Ikeda (2007), señala que la formación del profesor es uno de los aspectos reconocidos para atender en el futuro, de manera que se tienda a la utilización adecuada de la modelización matemática en las aulas de matemática. Esto se podría traducir en alumnos competentes para abordar y resolver distintas situaciones.
Finalmente, la incorporación adecuada de la modelización matemática en el aula, genera una actividad que motiva y abre posibilidades para el aprendizaje y la enseñanza de la matemática en los niveles de la educación media. Acordamos con Blomhøj (2004) en que un argumento importante a favor de la modelización matemática como elemento central en la enseñanza de la Matemática es que tiende puentes entre la experiencia de la vida diaria de los alumnos y la Matemática. Esto motiva el aprendizaje de la Matemática, provee de apoyo cognitivo directo a las conceptualizaciones de los alumnos y coloca a la Matemática como un medio para describir y entender situaciones de la vida diaria.
Por ello se tendría que comenzar un proceso de divulgación de la modelización matemática entre los docentes y paralelamente su incorporación en los planes de formación de los docentes de matemática, tal como lo proponen Niss, Blum y Galbraith (2007).

REFERENCIAS

- Barbosa, J. (2001). Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In Anais da 24 Reunião Anual da Anped. Caxambu: ANPED.
- Biembengut, M. (2007). Modelling and Applications in Primary Education. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in Mathematics Education* (The 14th ICMI Study, pp. 451-456). Nueva York: Springer.

- Blomhøj, M. (2004). Mathematical Modelling – A Theory for Practice. In Clarke, B. et al. (eds.), International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. Göteborg: National Center for Mathematics Education, pp. 145-159.
- Blum, W. (2002). ICMI Study 14: applications and modelling in mathematics education-discussion document. Educational Studies in Mathematics, 51(1-2), 149-171.
- Blum,W. Y Leiss, D. (2007). How do Students and Teachers deal with Modelling Problems?. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Horwood Publishing: Chichester, Reino Unido.
- Ikeda, T. (2007). Possibilities for, and Obstacles to Teaching Applications and Modelling in the Lower Secondary Levels. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in Mathematics Education* (The 14th ICMI Study, pp. 457-462). Nueva York: Springer.
- Niss, M.; Blum, W.; Galbraith, P. (2007). Introducción. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in mathematics Education* (The 14th ICMI Study, pp. 3-32). Nueva York: Springer.
- Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. For the Learning of Mathematics, 25(2), 2-10.

ANEXO I. RUBRICA PARA LA EVALUACIÓN DE LA ACTIVIDAD

Indicadores de desempeño	**Excelente** 10 puntos Demuestra amplia comprensión del problema. Todas las componentes del proceso de modelización son trabajadas.	**Bueno** 9 u 8 puntos Demuestra comprensión del problema. Todas las componentes del proceso de modelización son trabajadas.	**Suficiente** 7 o 6 puntos Demuestra comprensión del problema y mínimamente todas las componentes del proceso de modelización son trabajadas.	**Necesita mejorar** 5, 4, 3, 2 o 1 punto No alcanza a comprender el problema y faltan algunas etapas del proceso de modelización.
Planteamiento del problema (15%)				
Enunciado del problema.	Define con claridad el problema y justifica su importancia y elección. Se definen e identifican todas las variables involucradas.	Define con claridad el problema aunque justifica vagamente su importancia y elección. Se definen con escasos errores todas las variables involucradas.	Define con claridad el problema aunque sin justificar su importancia y elección. Se definen correctamente algunas de las variables involucradas o presentan algunos errores.	Define el problema de manera poco clara sin justificar su elección e importancia. Se definen algunas variables pero de manera incorrecta o muchas están ausentes.
Formulación de un modelo (15%)				
Crea un modelo	Contruye y selecciona de manera correcta representaciones que describen relaciones entre las variables. Presenta un excelente análisis e interpretación de las relaciones entre las variables.	Contruye y selecciona de correcta representaciones que describen relaciones entre las variables. Presenta un adecuado análisis e interpretación de las relaciones entre las variables.	Contruye de manera correcta pero incompleta representaciones que describen relaciones entre las variables. Presenta una escasa interpretación de las relaciones entre las variables y con ciertas confusiones.	Contruye de manera incompleta o presenta errores en las representaciones que describen relaciones entre las variables. No presenta ningun tipo de análisis o interpretación de la información o la interpretación es incorrecta.
Resolución Matemática (20%)				
Obtener un modelo	Selecciona estrategias adecuadas y eficientes para la resolución de la situación planteada. Correcto manejo de los conceptos y/o procedimientos matemáticos aprendidos.	Aplica estrategias de solución de problemáticas propias de la Matemática. Manejo coherente de conceptos y/o procedimientos matemáticos con errores de cálculo menores.	Selecciona las estrategias adecuadas, pero ineficazmente y ejecuta conceptos y procedimientos matemáticos con errores de cálculo menores o selecciona las estrategias adecuadas, pero se evidencia poco manejo de conceptos y/ procedimientos matemáticos.	Selecciona una estrategia inapropiada o evidencia un manejo muy pobre de conceptos y/o procedimientos matemáticos.
Interpretación de los resultados (15%)				
Evaluar el modelo y la solución	Interpreta correctamente el resultado matemático en términos de la situación original y evalúa si su solución es lógica y coherente.	Interpreta el resultado matemático en términos de la situación original.	Interpretación limitada del resultado en términos de la situación original.	No interpreta el resultado del modelo matemático en el contexto de la situación original.
Reporte (15%)				
Comunicación-diseño del trabajo	Siempre utiliza la terminología y la notación matemática apropiada. El diseño del trabajo tiene un formato original, atractivo y bien organizado.	Mayoritariamente utiliza la terminología y la notación matemática apropiada. El diseño del trabajo tiene un formato bien organizado.	Uso limitado del lenguaje matemático adecuado y notación. El diseño del trabajo tiene un formato bien organizado.	Poco o ningún uso del lenguaje matemático y la notación. El diseño del trabajo demuestra falta de organización y elaboración.
Integración TIC (20%)				
Uso de TIC	Hace uso significativo de la tecnología mejorando el desarrollo de las tareas	Su relación con la tecnología es buena y hace uso adecuado de ella para construir y aplicar conocimiento matemático según la guía del profesor	Conoce los medios tecnológicos disponibles, pero se evidencia poco uso de ellos, incumpliendo las actividades asignadas	No utiliza los instrumentos tecnológicos