CB 22

CONJUNTOS BIEN ORDENADOS. UNA DEFINICIÓN APARENTEMENTE SENCILLA DE UN COMPLEJO CONCEPTO ASOCIADO

Julieta Lucía Zaninovich & Diego Francisco Vilotta

Universidad Nacional de Nordeste –
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura
Avda. Libertad 5600 – Corrientes Capital.
jlzaninovich@hotmail.com, dfvilotta@gmail.com

Palabras Clave: conjunto bien ordenado, adscripción, Números Naturales.

RESUMEN
En esta comunicación se presenta un trabajo sobre conjuntos bien ordenados realizado en el marco de una adscripción como ayudante alumna en la Asignatura Análisis Matemático III del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNNE. El mismo, además de ser un tema de interés para la adscripta, tiene en cuenta aportes e interrogantes de los alumnos de la Asignatura.
En el desarrollo del trabajo se van definiendo gradualmente nuevos conjuntos con distintas características que obligan a replantear las justificaciones realizadas para determinar si los conjuntos anteriores estaban o no bien ordenados.
El análisis realizado aporta herramientas para organizar la enseñanza de este concepto destacando el hecho de que el buen orden de conjuntos de determinada complejidad se apoya en el buen orden de los números naturales. Un trabajo con los alumnos donde se resalte que el buen orden de un conjunto toma una propiedad de $\mathbb{N}$ diferente a la que se tiene en cuenta para determinar si un conjunto es o no numerable ayudaría a que los alumnos tomen aún más conciencia de la importancia de $\mathbb{N}$ como conjunto numérico.

DESARROLLO
Este trabajo se enmarca en una adscripción como ayudante alumno de Julieta Lucía Zaninovich en la Asignatura Análisis Matemático III del Profesorado y Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste. El trabajo final de la misma consistió en el estudio de dos temas presentes en el programa de la asignatura: conjuntos bien ordenados y continuidad uniforme. En esta comunicación nos abocaremos a presentar partes del trabajo realizado sobre conjuntos bien ordenados.
Consideramos que las tareas del adscripto pueden ser mejor aprovechadas por todos los integrantes de la asignatura (adscriptos, alumnos y docentes) y, si bien hay trabajos que profundizan la problemática del adscripto en la Universidad, enfocan las tareas de los adscriptos como las de un profesor que todavía no ha dejado de ser alumno. Las investigaciones que conocemos al respecto, se centran en cómo el adscripto puede ser un mejor nexo entre los alumnos y el conocimiento, o bien entre el profesor y los alumnos; como así también, se ocupan de estudiar las actividades que pueden contribuir en el desempeño y el aprendizaje del adscripto (SOLBERG, V y otros, 2008). Pero, en particular, no está muy

estudiado el rol que juega el trabajo presentado en el informe final de adscripción tanto en la formación del adscripto, como su futura utilización en la asignatura.
En cuanto a la temática de adscripción nos interesa resaltar que el trabajo presentado sobre conjuntos bien ordenados se centró en el interés de la alumna adscripta y fue formulado a lo largo del desarrollo de la asignatura, de la presentación teórica y de los cuestionamientos y aportes de los alumnos de la misma.
Creemos que la enseñanza debe romper con el aplicacionismo que plantea Barquero y otros (2007): "*… no se plantean, por tanto, preguntas sobre la "comparación" del grado de adecuación de dos o más modelos de un mismo sistema, ni sobre la necesidad de modificar progresivamente un modelo determinado para dar respuesta a las nuevas cuestiones problemáticas porque el sistema se supone construido de una vez por todas (no aparecen cuestiones "nuevas" no previstas de antemano)…".*
Es por esto que, para permitir la comprensión del concepto, se decide elegir conjuntos que posibiliten analizar en forma progresiva distintos aspectos del concepto en cuestión. Los mismos se construyen a partir de interrogantes que surgen al analizar cada uno de los conjuntos y pensar sobre: la insuficiencia de cada demostración en nuevos conjuntos, las características que podrían tener los conjuntos bien ordenados, o bien distintas formas equivalentes de definirlos. Es así que cada uno de estos conjuntos va atrapando distintos aspectos acerca del concepto conjuntos bien ordenados.
Bosch y Gascón (2009) afirman: *"Además de las praxeologías matemáticas a enseñar, el profesor debe activar muchos otros tipos de praxeologías para la enseñanza. Algunas son, por supuesto, también matemáticas: el equipamiento praxeológico matemático del profesor no puede reducirse a aquello que debe enseñar."* Un profesor debe poder realizar preguntas y analizar el conocimiento más allá de lo que va a enseñar en las clases, debe poder hacer matemática que le permita enriquecer el conocimiento a enseñar. Creemos que las preguntas planteadas en el desarrollo de este trabajo, son parte de las actividades matemáticas que un profesor tendría que hacer y, que un alumno del profesorado en matemática tendría que aprender a realizarlas.

Conjuntos bien ordenados

En las primeras clases de la Asignatura Análisis Matemático III, luego de definir a los números naturales como el menor subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$, y demostrar algunas propiedades básicas de los números naturales, se enuncia el principio de buena ordenación de los números naturales de la siguiente manera[1]:

Si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ y A no es el conjunto vacío entonces A tiene mínimo

Observando que en el texto sólo se enuncia y se demuestra el principio de buena ordenación para el conjunto de los números naturales el docente responsable de la Asignatura propuso analizar el buen orden de otros conjuntos planteando a la clase cuál sería la definición de buen orden para un conjunto cualquiera llegándose a que:

$$Si\ todo\ B \subset A\ tiene\ mínimo, B \neq \emptyset\ entonces\ A\ está\ bien\ ordenado$$

[1] En el desarrollo de la primera parte del programa se tiene en cuenta el texto de (Noriega, 1979) donde figura y es demostrado el principio de buena ordenación de N.

A partir de esta definición es posible preguntarse cuál es la diferencia entre pedir que el conjunto en cuestión tenga primer elemento y pedir que todo subconjunto de dicho conjunto tenga primer elemento.
Con más razón alguien se puede hacer esta pregunta cuando los primeros, y muchas veces únicos, conjuntos que se analizan son $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. Siendo $\mathbb{N}$ un conjunto que tiene mínimo y está bien ordenado, que se diferencia de $\mathbb{Z}$, un conjunto que no tiene mínimo y no está bien ordenado. Se puede pensar que es suficiente que un conjunto tenga mínimo para estar bien ordenado sobre todo si son estos dos conjuntos los primeros en ser analizados.
Nos parece oportuno aclarar que no nos interesa criticar al autor del libro de texto por sólo analizar que N es un conjunto bien ordenado (demuestra que N es un conjunto bien ordenado) y no analizar otros, ya que, al presentar el principio de buena ordenación esos conjuntos todavía no están definidos por ser N el primer subconjunto que se define. Sí creemos que en algún momento sería bueno analizar la buena ordenación de otros conjuntos y que se puede flexibilizar el rigor de la presentación axiomática para poder entender mejor de qué se está hablando.
Al estudiar distintos ejemplos, como ser $B = [1;5]$ se puede analizar mejor la diferencia entre un conjunto que está bien ordenado y un conjunto que tenga mínimo, ya que 1 es mínimo del conjunto B, pero B no está bien ordenado porque, por ejemplo, el conjunto $(2;5] \subset B$ no tiene mínimo (por ser 2 la mayor de sus cotas inferiores, y no pertenecer al conjunto). De esta manera se concluye que B no está bien ordenado a pesar de tener mínimo, porque existe un subconjunto del mismo que no tiene mínimo.
Con el ejemplo anterior, se ve cómo es posible demostrar que un conjunto no está bien ordenado, lo que en clase llevó a los alumnos a cuestionarse: *"¿Cómo probar que un conjunto está bien ordenado? Porque encontramos conjuntos que no están y sólo vemos eso. Pero si está bien ordenado, ¿cómo demostramos?"*. A su vez nosotros nos preguntamos ¿Por qué tanto interés en saber la demostración? ¿Se entiende más un concepto al saber la demostración? ¿Son más creíbles los conceptos cuando se los sabe demostrar? Siempre como alumnos es imprescindible saber las demostraciones por el miedo a que pregunten y no saber cómo hacer, pero también porque al ver siempre todo con demostraciones se cree que se comprende mejor cuando se sabe demostrar algo. Pero la matemática se hace analizando, y después vienen las demostraciones justamente, como su nombre lo indica, "para comprobar que algo es así".
No es suficiente leer la definición para comprender, en este caso es necesario analizar y hacer preguntas con distintos conjuntos para entender de a poco lo que nos quiere decir una definición matemática, en este caso, la de conjuntos bien ordenados. Sin embargo, es bueno conocer cómo se demuestra que un conjunto distinto de $\mathbb{N}$ está bien ordenado y en el trabajo de adscripción se armaron y demostraron distintos ejemplos de conjuntos bien ordenados.

Un conjunto bien ordenado distinto de N

Se demostrará que el conjunto

$$\mathrm{A} = \left\{\frac{\mathrm{n}}{4} / \mathrm{n} \in \mathbb{N}\right\}$$

está bien ordenado. La demostración es una adaptación de la demostración que $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado y se hace por inducción.

Demostración:

$$Sea\ P(n) = Todo\ conjutno\ B \subset A\ que\ contiene\ a\ \frac{n}{4}\ tiene\ mínimo$$

$Entonces\ P(1) = Todo\ conjutno\ B \subset A\ que\ contiene\ a\ \frac{1}{4}\ tiene\ mínimo$

Como por propiedad de $\mathbb{N}: 1 \leq n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{n}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$

Luego, por definición de mínimo, como $\frac{1}{4} \leq \frac{n}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$ y como $\frac{1}{4} \in B$ por hipótesis:

$P(1)\ es\ verdadera$

Hipótesis inductiva: $P(n) = Todo\ conjutno\ B \subset A\ /\ \frac{n}{4} \in B, tiene\ mínimo$

Tesis inductiva: $P(n+1) = Todo\ conjutno\ B' \subset A / \frac{n+1}{4} \in B', tiene\ mínimo$

Demostración de la tesis inductiva:

a) Si $\frac{n}{4} \in B': B'\ tiene\ mínimo, por\ hipótesis\ inductiva.$

b) Si $\frac{n}{4} \notin B', considero\ C = B' \cup \left\{\frac{n}{4}\right\} \wedge C \subset A, por\ definición$

Como $\frac{n}{4} \in C$, por hipótesis inductiva: C tiene mínimo.

Llamando c al mínimo de C, por definición de mínimo: $c \leq b, \forall b \in C$ $(\boldsymbol{I})$

Se puede considerar entonces dos casos:

1) $c \in B'$

Por definición de mínimo: $c \leq x, \forall x \in C. En\ particular, como\ B' \subset C, será\ c \leq x, \forall x \in B'$

$\therefore B'\ tiene\ mínimo$

2) $c = \frac{n}{4}$

$Como\ se\ cumple\ (I) y\ B' \subset C, en\ particular: c \leq b, \forall b \in B'$

$\therefore \frac{n}{4} \leq b, \forall b \in B'$

$Además, como\ \frac{n}{4} \notin B': \frac{n}{4} \neq b. Luego, \frac{n}{4} < b$

$Pero\ como\ el\ conjunto\ C\ crece\ a\ razón\ de\ \frac{1}{4}\ por\ estar\ incluido\ en\ A,$

$y\ como\ \frac{n}{4} \in C, b \in B' \subset C: \frac{n}{4} + \frac{1}{4} \leq b \Rightarrow \frac{n+1}{4} \leq b$

Además, como $\frac{n+1}{4} \in C\ \wedge$

$\frac{n+1}{4} \neq \frac{n}{4}, por\ definición\ del\ conjunto\ C: \frac{n+1}{4} \in B'.$

$Luego, como\ \frac{n+1}{4} \leq b, \forall b \in B' y\ como\ \frac{n+1}{4} \in B',$

$por\ hipótesis\ inductiva\ \frac{n+1}{4}\ es\ mínimo\ de\ B'$

(II)

$\therefore de\ (I) y\ (II): P(n+1) es\ verdadera, \forall n \in \mathbb{N}$

Luego, como todo subconjunto de A está bien ordenado, entonces A está bien ordenado.

El buen orden y la densidad de los conjuntos

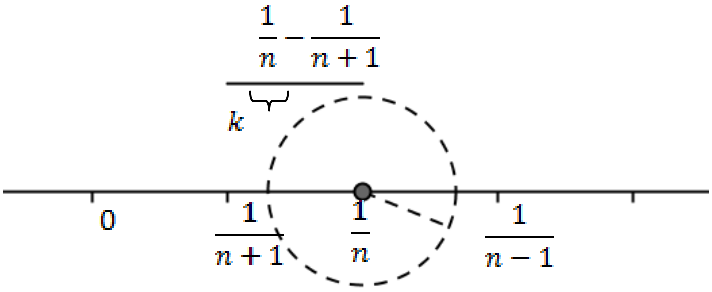
Ya hemos visto un conjunto distinto de $\mathbb{N}$ que está bien ordenado y hemos hecho su demostración. Sin embargo, la demostración se basó en el principio de inducción completa, sustentándose de alguna manera en $\mathbb{N}$. Viendo esto nos podemos preguntar si habrá otra manera de construir un conjunto bien ordenado más "alejada" de los números naturales.

Luego, se pensó que podría haber una relación entre un conjunto discreto y un conjunto bien ordenado. Siguiendo esta idea, se puede plantear que si los elementos de un conjunto acotado inferiormente están aislados, el conjunto está bien ordenado. Es así que se puede analizar si la siguiente afirmación es válida para un conjunto A acotado inferiormente:

$$\underbrace{\forall a \in \bar{A}: \exists B_{(a,\delta)} / B_{(a,\delta)} \cap A = \{a\}}_{(*)} \Leftrightarrow A \textit{ está bien ordenado}$$

Es decir que sería equivalente pedir que un conjunto esté bien ordenado, a pedir que esté acotado inferiormente y todos los puntos de su clausura sean aislados. **(III)**
A continuación, para ver si la equivalencia anterior es válida, analizaremos un ejemplo donde no se cumple (*) y veremos si el conjunto está o no bien ordenado: Sea

$$A = \left\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\right\}$$



Primero veremos si el conjunto cumple con (*)
Por propiedad de las fracciones se sabe que: $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$, $con\ n > 1$
Tomando $0 < \delta < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n^2+n}$:

$$\forall x \in \bar{A} \ / \ x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}: \exists B_{(x,\delta)} con\ 0 < \delta < \frac{1}{n^2 + n}, \delta \in \mathbb{R} \ / \ B_{(x,\delta)} \cap A = \{x\}$$

$\therefore$ *se podría decir, según la idea planteada, que A está bien ordenado*

Pero por el momento sólo se han analizado los puntos interiores, y en la clausura de un conjunto se encuentran los puntos interiores y los puntos adherentes del conjunto, entonces debemos ahora considerar los puntos adherentes.

Recordemos que un punto x es adherente si: $\forall r > 0: B_{(x,r)} \cap A \neq \emptyset$

$0 \notin A$, *entonces no es punto interior. Pero, ¿el* 0 *es adherente? ¿el* $0 \in \bar{A}$?

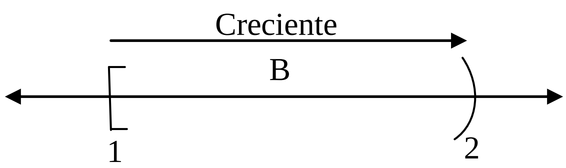
Veamos que se puede tomar un elemento $\frac{1}{n}$ $\in A$ *muy pequeño y muy próximo al* 0 *como uno quiera.*

Por lo tanto, siempre que tome un $\frac{1}{n}$, *por más chico que sea éste, se podrá encontrar un* $r = \frac{1}{n} - k > 0$, *de modo tal que la bola con centro en* 0 *y radio* r *no incluirá a* $\frac{1}{n}$.

$De\ esta\ manera, se\ podría\ pensar\ que\ \exists B_{(0,r)} \cap A = \emptyset$, que contradice la definición de punto adherente.
$Sin\ embargo, por\ la\ manera\ en\ que\ se\ formó\ el\ conjunto\ A, siempre\ habrá\ un\ elemento$
$\frac{1}{n'} \in A\ entre\ 0\ y\ \frac{1}{n} \in A, cualquiera\ sea\ el\ n \in \mathbb{N}\ tomado.$
$\therefore \forall r > 0: B_{(0,r)} \cap A \neq \emptyset$. Luego el 0 es adherente de A, y por definición de clausura de un conjunto: $0 \in \bar{A}$
Veamos ahora si $\exists B_{(0,\delta)} / B_{(0,\delta)} \cap A = \{0\}$, es decir, que vamos a ver si el 0 es un punto aislado de A.
Pero, por lo analizado anteriormente, $\forall r > 0$ siempre habrá un elemento $\frac{1}{n'} \in A$ en la $B_{(0,r)}$.
Esta es la razón por la cual, si bien $\forall r > 0: B_{(0,r)} \cap A \neq \emptyset$, no se cumplirá que $\exists B_{(0,\delta)} / B_{(0,\delta)} \cap A = \{0\}$, por lo cual el 0 no es un punto aislado de A.

Luego, el conjunto A no cumple con (*) y, además el conjunto A no está bien ordenado por no tener mínimo. Lo cual nos lleva a pensar que la condición dada para caracterizar conjuntos bien ordenados sigue siendo válida.

Un conjunto bien ordenado que no cumple con la condición que creíamos necesaria
Sea $B = \left\{2 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\right\}$



Este conjunto tiene mínimo: 1
Demostración: Sea
$n \epsilon \mathbb{N}, por\ propiedad\ de\ los\ números\ naturales: n \geq 1 \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{n} \Rightarrow 1 + 1 \geq \frac{1}{n} + 1$
$\Rightarrow 2 - \frac{1}{n} \geq 1\ \therefore 1\ es\ cota\ inferior\ de\ B$
Por corolario del axioma del supremo: como B está acotado interiormente y $B \neq \emptyset$, entonces $\exists i \in \mathbb{R} / i = \inf(B)$
Como $1\ es\ cota\ inferior\ de\ B: 1 \leq i \Rightarrow 1 = i \lor 1 < i$
Como $1 \epsilon \mathbb{N}, si\ n = 1: 2 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{1} = 1 \therefore 1 \epsilon B$
Luego, como $1 \epsilon B\ y\ 1\ es\ cota\ inferior\ de\ B: 1\ es\ mínimo\ de\ B$
Veamos que $2 \notin B$ ya que si bien el conjunto se va acercando mucho a 2, lo hace indefinidamente y nunca llega. Pero si tomo $B_{(2,r)}, con\ r > 0$ muy pequeño, siempre habrá un elemento del conjunto de la forma $2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ incluido en ella.
Por lo tanto, $B_{(2,r)} \cap B \neq \emptyset$ y $2 \in \bar{B}$, pero la intersección no es sólo en el punto 2, es decir que no se cumple que $B_{(2,r)} \cap B = \{2\}$

De esta manera, se encontró un ejemplo donde no se cumple (*) y se puede probar que es un conjunto bien ordenado. La condición de que todos los puntos de la clausura de un conjunto sean aislados no es necesaria para que el mismo esté bien ordenado.

El crecimiento de una sucesión y el buen orden

¿Qué habría que cambiar en la idea anterior? ¿Agregando otras condiciones podría seguir siendo válida?

Se podría pensar que: **Si un conjunto tiene mínimo, sus elementos se obtienen a partir de una sucesión creciente y todos sus puntos interiores son aislados, entonces el conjunto está bien ordenado.**

Veamos que en el ejemplo anterior $B = \left\{2 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\right\}$ esta idea es válida, ya que tal como se demostró anteriormente, el conjutno tiene mínimo, es "creciente" y sus puntos interiores son aislados, y está bien ordenado.

¿Será válido siempre que el conjunto cumpla estas condiciones?

Demostración:

Sea A un conjunto que cumpla las siguientes condiciones:

- A es creciente
- a es mínimo del conjunto A, es decir que: $a \in A / \forall x \in A: a \leq x$
- Todos los puntos interiores de A son aislados. Es decir que:

si $x \in \dot{A}: \exists r > 0 / B_{(x,r)} \cap A = \{x\}$

Por hipótesis A tiene mínimo. Consideremos un conjunto $B \neq \emptyset / B \subset A$. Veamos que cualquiera sea el conjunto B, este tendrá mínimo, de esta forma se demostrará que A está bien ordenado.

Consideremos los siguientes casos:

a) $a \in B$

Como a es mínimo de A: $\forall x \in A: a \leq x$. En particular, como $B \subset A$: $a \leq x, \forall x \in B$

$\therefore B\ tiene\ mínimo$

b) $a \notin B$

Como $B \subset A$ y por hipótesis, todos sus puntos interiores son aislados, es decir que $\forall x \in \dot{B}: \exists r > 0 / B_{(x,r)} \cap B = \{x\}$

Si tomáramos un punto $b \in \dot{B}$, como B se forma con una sucesión creciente, existirá un único punto $b' \in \dot{B}$, que pertenece al conjunto y que es menor o igual que todos los elementos del conjunto B.

$\forall b \in B: b' \leq b, de\ este\ modo\ b' es\ mínimo\ de\ B$

Luego, cualquier subconjunto de A distinto de vacío, tiene mínimo. Por lo tanto, A es un conjunto bien ordenado.

La estrecha relación con los números naturales

Como los ejemplos vistos son sucesiones, al analizarlos surge otra conjetura:

Si un conjunto A está formado por los elementos de una sucesión creciente, dicho conjunto está bien ordenado.

El conjunto $B = \left\{2 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\right\}$ dado anteriormente cumple con la idea anterior por estar formado con los elementos de una sucesión creciente y se puede demostrar que está bien ordenado basándose en lo siguiente: Dado que a B se lo puede pensar como el conjunto de valores que toma una sucesión creciente, B tiene como mínimo al primer elemento de la sucesión asociada. Además, a cualquier subconjuto de B se le puede asociar una subsucesión que, por propiedades de las mismas, será creciente y tendrá como mínimo al primer elemento de la subsucesión.

Se puede generalizar la idea del ejemplo anterior definiendo conjunto creciente como todo conjunto A que se pueda obtener a partir de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente.

Que el conjunto A sea creciente implica que a medida que se tomen elementos de $\mathbb{N}$ mayores, sus imágenes también serán mayores entre sí, y por ello los elementos de A serán cada vez más grandes a medida que $n \in \mathbb{N}$ aumente.

Además, si se toma un subconjunto $B \subset A$, de forma que este sea una subsucesión del conjunto A, también será creciente. Entonces, como B es creciente y es una subsucesión, siempre es posible encontrar un elemento menor a todos los demás. Esto es así, porque tomando el menor de los números naturales que forman los elementos de la subsucesión B, como la subsucesión es creciente, se puede encontrar el menor elemento del conjunto B, el cual será su mínimo.

Es análogo el caso en que el subconjunto $C \subset A$ no sea una subsucesión y sea un conjunto finito. Porque al ser A creciente, todos sus subconjuntos también lo serán. Entonces, como C también está formado a partir de los números naturales por ser subconjunto de la sucesión A, tomando el menor de los números naturales que forman los elementos del conjunto C, y como C es creciente, se puede encontrar el menor elemento del conjunto C, el cual será su mínimo.

Por lo tanto, cualquiera sea el subconjunto del conjunto creciente A, tendrá mínimo y esto sucede porque al estar definido de esta manera, el conjunto A mantiene una propiedad básica de $\mathbb{N}$ que es la de estar bien ordenado.

En el informe final de adscripción se plantearon algunas preguntas que quedaron abiertas y que consideramos son interesantes continuar estudiando: ¿habrá conjuntos que no están formados a partir de una sucesión creciente y que están bien ordenados? ¿La unión de dos conjuntos bien ordenados será un conjunto bien ordenado? ¿Qué relación existe entre buena ordenación y coordinabilidad con N?

Más allá de que las preguntas planteadas pueden ser respondidas con teorías matemáticas ya elaboradas, nos parece importante señalar que no es lo mismo abordar una teoría con preguntas formuladas previamente que estudiar las teorías sin entender la razones de ser de las mismas.

CONCLUSIONES

Se ha mostrado que el trabajo realizado en el contexto de una adscripción tiene particularidades como: tratar un tema de interés para la adscripta, es formulado a lo largo del desarrollo de la asignatura y tiene en cuenta los aportes e interrogantes de los alumnos.

En el desarrollo del trabajo se mostró que es posible planear una secuencia donde se van definiendo conjuntos a partir de agregarle a los anteriores una nueva característica que obliga a replantear la justificaciones que se hicieron en los anteriores sobre si es o no un conjunto bien ordenado.

Pudimos mostrar cómo a pesar de ser cada vez más compleja la construcción de los distintos conjuntos, por ejemplo bajo ciertas condiciones puede existir un punto no aislado en la clausura del mismo, la demostración de que es un conjunto bien ordenado termina basándose en el principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$. Una situación análoga, pero más estudiada en la formación de los alumnos del profesorado, se da al analizar cuando un conjunto es o no coordinable con $\mathbb{N}$. A diferencia de la coordinabilidad con $\mathbb{N}$ que busca atrapar que un conjunto sea o no numerable a pesar de tener características muy distintas como es el caso de los números racionales, los conjuntos bien ordenados "heredan" de $\mathbb{N}$ la "buena ordenación", buen orden que no lo tienen conjuntos como $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$ pero que sin embargo lo tienen otros conjuntos de relativa complejidad.

Consideramos que el análisis realizado en el informe de adscripción y presentado en esta comunicación da herramientas para comprender la importancia que tiene el hecho de que $\mathbb{N}$ sea un conjunto bien ordenado, importancia que no se puede entender con sólo demostrar que $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado sin analizar otros ejemplos. El análisis de ejemplos como los presentados permitiría que los alumnos entiendan lo que trae en forma implícita que un conjunto esté bien ordenado y comprenderlo no quedaría a merced de lo que cada alumno pueda entender en momentos más avanzados de su formación.

REFERENCIAS

- Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). *Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias*. Communication au 2° congrès TAD, Uzès 2007.
- Bosch, M. & Gascón, J. (2009). *Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria.* Investigación en educación matemática XIII.
- Luedtke, K & Caram, C. (2012). *¿El rol del ayudante de cátedra en la enseñanza constructivista, es un proyecto? Cuestionamientos sobre el rol de un asistente académico.* Universidad de Palermo. Facultad de Diseño y de Comunicación.
- Noriega, R. (1979). *Cálculo diferencial e integral.* Docencia. Buenos Aires.
- Saiz, I.; Gorostegui, E. & Vilotta, D. (2013). *La matemática necesaria para la enseñanza de los racionales en secundario.* Yupana, Revista de Educación matemática de la Universidad Nacional del Litoral.
- Solberg, V.; Droblas, M.; Rodríguez, G.; Ulloa, G. & Viñas, W. (2008). *El adscripto... ¿quién? Conceptualizaciones sobre un rol poco abordado.* (V Encuentro Nacional y II Latinoamericano La Universidad como objeto de investigación. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires – Facultad de Ciencias Humanas).